ЧАСТЬ 1.
ПРОБЛЕМЫ ЛОГИКИ И НАУЧНОЙ МЕТОДОЛОГИИ

О. А. Антонова

ФИЛОСОФСКИЕ АСПЕКТЫ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ИНТУИЦИОНИСТСКОЙ ЛОГИКИ

Интуиционизм, с одной стороны, делает логику
более изощренной, с другой же стороны,
дезавуирует логику как источник истины.
Брауэр

1. Философские основания интуиционистской логики. Солипсизм Брауэра

В начале XX века в математике возникло новое направление, которое в дальнейшем получило название – интуиционизм. Основоположником этого направления был Брауэр. Он предложил совершенно новую и оригинальную концепцию математики, которая кардинально отличалась от тех, которые существовали прежде.

Согласно его концепции математика является областью точного мышления. Математические формулы встречаются и в обыденном мышлении, но употребляются в нем часто неосознанным образом. Ни одна наука, в том числе ни философия, ни логика, не может выступать в качестве основания математики. Очевидно, что использование в математике философских или логических положений было бы порочным кругом, так как их формулировка уже требовала бы математического образования понятий.

Если таким образом математика лишена оснований, то единственной ее предпосылкой является интуиция, которая и служит тем источником, из которого с непосредственной ясностью выводятся ее понятия. Итак, согласно его взглядам, единственным источником интуиционистской математики и критерием истинности ее построений является интуиция.

Что же понимает Брауэр под интуицией? Интуиция является способностью раздельного рассмотрения определенных понятий и выводов, регулярно встречающихся в обыденном мышлении. Или еще: интуиция – это процесс, порождающий натуральный ряд чисел и континуум. Развитие интуиции, по Брауэру, идет от интуиции времени к интуиции континуума. Интуиция времени является первоинтуицией и лежит в основании математики. Эта интуиция связана с порождением натурального ряда чисел. Таким образом, понятие натурального числа, согласно брауэровской концепции, вырабатывается на доматематическом уровне.

В основной интуиции целого числа содержится идея континуума. Континуум строится на основе свободно становящейся последовательности. Очень важным является то, что его невозможно составить из отдельных частей. Для интуиционистов – континуум среда свободного становления. Идея свободно становящейся последовательности позволяет характеризовать процессы, развертывающиеся во времени. Именно благодаря интуиции стало возможным введение идеи свободно становящейся последовательности в математику. Следует отметить, что подобного понятия не существовало в классической математике. Таким образом, в интуиционистской математике достоверность или ложность математического утверждения устанавливается в зависимости от того, возможно или невозможно построить доказательства, которые осуществляются во времени.

Итак, в обосновании математики лежит идея аподиктической интуиции – интуиции числа, которая обладает наибольшей достоверностью. Так как интуиция является источником интроспективного конструирования, то математика в действительности представляет собой конструктивную деятельность чистого мышления, которая опирается на механизм построения в сознании неограниченно продолжающегося натурального ряда, но состоящий всегда из конечного числа элементарных шагов. Однако ученик Брауэра Гейтинг справедливо отмечает, что «понятие интуитивной ясности в математике само не является интуитивно ясным». Мне кажется, об этом часто думал и Брауэр.

Брауэр полагал, что, поскольку невозможно уложить возможности мышления в прокрустово ложе заранее данных конструктивных принципов, то содержательное обоснование формалистической математики посредством доказательства ее непротиворечивости содержит порочный круг. Это обоснование покоится на содержательной истинности предположения, что из непротиворечивости какого-либо принципа следует его истинность, то есть на содержательной истинности принципа исключенного третьего.

В отличие от Брауэра, Гильберт рассматривал доказательство непротиворечивости как содержательное обоснование математики. Однако, несмотря на столь резкое расхождение в этом вопросе, между формалистической концепцией Гильберта и интуиционистской концепцией Брауэра существуют и точки соприкосновения. Известно, что в качестве предпосылки как математика первого порядка Брауэр берет некоторую содержательную математику, часть положений и средств доказательства которой можно формализовать. Если подвергнуть данную систему математическому анализу, возникнет содержательная система, подобная гильбертовской метаматематике и называемая Брауэром математикой второго порядка. Она полностью содержится в математике первого порядка и может быть расширена путем присоединения новых элементов, которые в свою очередь соответствуют идеальным предложениям. Гейтинг отмечает: «Таким образом, с одной стороны возможность интуиционистской математики является предпосылкой теории доказательства, а с другой – формальная математика заключает в себе в качестве части некоторую систему, поддающуюся интуиционистской интерпретации»[1].

Умозаключения интуиционистской математики не производятся по четко установленным правилам, которые можно было бы объединить в логическую систему. Наоборот, очевидность всякого отдельного вывода рассматривается непосредственно. Суть математического доказательства заключается не в логических выводах, а в конструировании математических систем. Однако, если какая-либо математическая система включается в другую, то сам процесс можно построить в форме логического вывода, но это касается скорее словесной оболочки математической мысли, чем ее самой.

Концепцию формализации математики Брауэра прекрасно изложил известный математик и логик Бет. Вот что он пишет:

1) «построение на интуитивном уровне системы математических объектов;

2) вербальное описание этой системы, т.е. параллель математического мышления или математический язык;

3) математический анализ этого языка, который приводит к обнаружению словесных конструкций, соответствующих принципам классической логики;

4) ступень абстрагирования от содержательного значения элементов, образующих эти словесные конструкции; системы второго порядка – формальные системы символической логики;

5) введение языка символической логики;

6) математический анализ языка логики;

7) новое абстрагирование»[2].

Математика является конструктивной деятельностью мышления, которая одновременно является и внелингвистической. Следовательно, Брауэр полностью отделяет математику от математического языка. Математический язык возникает только после того, как на интуитивном уровне построена система математических объектов. В 1933 году Брауэр пишет: «Таким образом для человеческого ума, снабженного неограниченной памятью, чистая математика, практикуемая в одиночестве и без употребления лингвистических знаков, была бы точной. Однако эта точность бы-

---

[1] *Гейтинг А.* Обзор исследований по основаниям математики. М., 1936. С. 74-75.

[2] *Beth E.W.* The Foundations of Mathematics // Study in the Philosophy of Science. Amsterdam. 1965. P. 410.

ла бы утрачена в математике общением между человеческими существами с неограниченной памятью, поскольку они в конце концов вынуждены были бы прибегнуть к языку как средству взаимопонимания»[3].

Как и от философии, математика независима от языка. Мышление единицы и мысленное образование фундаментальной последовательности единиц не связаны с его языковым выражением. Для сообщения математического хода мыслей язык необходим. Однако язык не является надежным средством передачи мыслей, поэтому существует опасность неверного истолкования этих мыслей. Никакая формализация не может служить гарантией от искажения мыслей. И причиной этого является изначальная неоднозначность языка. Отсюда: точность математического построения заключается именно в мысли. Точной является построенная в уме математическая система, но сравнение систем, построенных различными лицами, подвержено неточностям человеческого взаимопонимания.

Итак, отметим следующий важный момент. Брауэр отмечает необходимость полного отделения математики от математического языка, так как математический язык имеет высоко логический характер. Таким образом, математика – внелингвистическая деятельность мышления, отделенная от математического языка и логики. Четкое разграничение математики и математического языка является одним из важнейших пунктов программы Брауэра.

Очевидно, что математическую деятельность определяет не язык и логика, а конструктивная деятельность чистого мышления. Исходя из того положения, что интуиционистская математика является мыслительным процессом, очевидно, что любой язык, включая язык формализации, не может быть эквивалентной моделью данной системы, поскольку само мышление невозможно свести к конечному числу формальных правил.

Логика является только верной имитацией математического языка. Логика и язык возникают после математики, и математика не зависит от логики. Таким образом, с одной стороны, математика не зависит от логики, с другой – логика относится к числу приложений математики, т.е. логика есть прикладная математика.

Законы классической логики не являются универсальными. Брауэр называл классическую алгебру логики – «формальное отображение техники обыденного мышления», или «мышление здравого смысла». И еще один важный момент. В области бесконечного эти законы не применимы. Вера в универсальную применимость законов логики приобрела характер предрассудка, так как они подтверждаются на практике в об-

---

[3] *Troelstra A.S.* Arend Heyting and his contribution to intuition // Nieuw Archief voor Wiskunde 29 (3), 1981. P. 10-11.

ласти конечного. Законы классической логики абстрагированы от операций над конечными множествами.

Кроме того, неограниченное использование принципов классической логики в математике приводит к появлению парадоксов. Встает вопрос, возможно ли использовать принципы классической логики в математике, и какие? Ответ Брауэра такой. Брауэр считает, что возможно использовать все принципы, кроме закона исключенного третьего.

Неограниченное применение закона исключенного третьего на бесконечных множествах возможно в теоретико-множественной математике при использовании абстракции актуальной бесконечности.

Брауэр, принимая лишь абстракцию потенциальной бесконечности, ограничил математические объекты конструктивными. В связи с этим логика должна быть перестроена в соответствии с конструктивным пониманием существования математических объектов. Конструктивные объекты требуют иной логики – интуиционистской. Если ограничиваться кругом конструктивных проблем, то не существует проблем, неразрешимость которых могла бы быть доказана, но допущение, что каждая проблема разрешима, неправомерно.

Известные математики-конструктивисты А.А. Марков и Н.М. Нагорный пишут: «В идее неединственности логики, разумеется, нет ничего удивительного. В самом деле, с какой стати все наши рассуждения, о чем бы мы ни рассуждали, должны управляться одними и теми же законами? Для этого нет никаких оснований.

Впервые настойчиво подчеркивать эту идею стал один из крупнейших математиков нашего века Л.Э.Я. Брауэр, который в противовес теоретико-множественной концепции Кантора предложил свой особый подход к построению математики, названный "интуиционистским". Брауэр убедительно показал, что для построения интуиционистской математики требуется особая интуиционистская логика, отличная от классической»[4].

Так как именно логика является причиной возникновения парадоксов в математике, то необходимо ограничиться только теми системами, которые основываются на интуиции. Математика не должна зависеть от логики, наоборот основания логики лежат в математике. Брауэр своим столь отрицательным отношением к приоритету логики над математикой стремился показать, что в математике огромное значение имеет содержательное, а не формальное знание.

Взгляды Брауэра на логику прямо противоположны взглядам его противника Гильберта. Гильберт полагал, что логические связи выражаются в формулах, поэтому именно благодаря записи при помощи формул, они избавлены от неясностей, которые возникают при словес-

---

[4] *Марков А.А., Нагорный Н.М.* Теория алгорифмов. М., 1984. С. 38.

ном выражении. Брауэр же утверждал, что логические знаки и формулы не придают точности «неточному» языку. Логика является только имитацией языка, и так как она – копия языка, следовательно, все недостатки языка оказываются недостатками классической логики.

Можно предположить, что интуиционистская концепция математики Брауэра явилась некоторой реакцией на попытку удалить интуицию из математики и представить математику как формальную систему. Если противники интуиции использовали логику в качестве средства доказать недостоверность интуиции, то Брауэр использовал интуицию для доказательства недостаточности логики для математики.

Несомненно, что математическая концепция Брауэра имеет глубокие психологические корни. Брауэр пытается дать ответ на такой вопрос: возможно ли вывести целиком математику из законов мышления, реконструируя только конструктивные аспекты нашего мышления, при этом не затрагивая другие. Однако средства, которые используются, оказываются очень примитивными. Так в качестве метода Брауэр предлагает применять одно лишь самонаблюдение. И сводит его к «размышлению о собственном мышлении».

Гейтинг в 1947 году писал: «Таким образом, интуиционист ищет строгость не в языке, а в математической мысли самой по себе. В то же время мне кажется противоречащим реальности утверждать, что интуиционистская математика в своей чистой форме состоит лишь из мысленных конструкций индивидуальных математиков, конструкций, которые существуют независимо друг от друга и между которыми язык обеспечивает всего лишь очень расплывчатую связь. Для этого математики слишком сильно воздействуют друг на друга и понимают один другого слишком хорошо... Мы должны отдавать себе отчет в фикции математика с совершенной памятью, который был бы в состоянии обходиться без поддержки языка. В реальном математическом исследовании язык существенно вовлекается с самого начала; математика, представляющаяся нам облаченной в лингвистические выражения, предшествуется не фазой, полностью свободной от языка, а всего лишь фазой, в которой роль языка много менее значительна, чем в коммуникации».[5]

Так мог сказать только ученик Брауэра. Великий математик, который действительно глубоко верил в основные идеи интуиционизма.

2. Tertium non datur

Для Брауэра ответ на вопрос о том, какие принципы классической аристотелевской логики справедливы в математической логике, не вызывал сомнений. Закон противоречия может применяться без ограниче-

[5] *Troelstra A.S.* The scientific work of A. Heyting // Compositio Mathematica. Vol. 20. 1968. P. 7.

ния, но это не относится к закону исключенного третьего. Однако несмотря на столь безграничную возможность применения закона противоречия, Брауэр все же отмечает, что в тех случаях, когда проводится доказательство невозможности с помощью приведения к противоречию, закон противоречия применяется лишь по видимости, в действительности речь идет о том, что не удается некоторое математическое построение при данных условиях.

Брауэру очень важно было понять, почему догма универсальной законности принципа исключенного третьего в математике столь живуча. Он пишет: «Во-первых, очевидная непротиворечивость принципа для произвольного единичного суждения; во-вторых, практическая законность всей классической логики для обширной группы простых каждодневных явлений. Последний факт, видимо, произвел столь сильное впечатление, что деятельность мышления, которой первоначально была классическая логика, стала глубоко укоренившейся привычкой мышления, которая рассматривалась не только как полезная, но даже как априористическая»[6].

Закон исключенного третьего критиковали еще до Брауэра. Поэтому, конечно, он не был первый. Однако именно Брауэр предположил, что столь безграничное применение закона исключенного третьего ведет к появлению парадоксов теории множеств и возникновению кризиса оснований математики.

В защиту закона исключенного третьего выступил непримиримый оппонент Брауэра – Гильберт. Согласно Гильберту, закон исключенного третьего не виновен в парадоксах теории множеств. По его мнению, отнять закон исключенного третьего от математика это все равно, что запретить астроному пользоваться телескопом или боксеру – кулаками.

Неверно думать, что Брауэр вообще отрицал применение закона исключенного третьего, где бы то ни было. Он ограничивал его применение только конечными множествами и отвергал его использование на бесконечных множествах.

Брауэр предлагает модифицировать закон исключенного третьего. Но прежде чем рассмотреть, каким образом он это делает, обратимся к не менее важному моменту в концепции Брауэра – интуиционистскому отрицанию.

Прежде всего, следует отметить, что интуиционистское отрицание непосредственно связано с противоречием. Точку зрения Брауэра прекрасно изложил Данциг. Поэтому воспользуемся его изложением. Если A – произвольное утверждение в интуиционистском смысле, то $\neg A$ – его отрицание. То есть, $\neg A$ обозначает, что из A следовало бы проти-

---

[6] *Brouwer L.E.J.* Points and Spaces // Canadian Journal of Mathematics. Vol. 6 (1), 1954. P. 5.

воречие, или A «абсурдно». В классической математике потребовалось бы только доказательство $\neg\neg A$ вместо A. В интуиционистской математике каждое утверждение A возможно заменить на $\neg\neg A$. Данциг отмечает, что сомнения относительно данной операции не верны, так как Брауэр доказал, что из $\neg\neg\neg A$ всегда следует $\neg A$. Поэтому $\neg\neg\neg A$ эквивалентно $\neg A$. Итак, по Брауэру, абсурдности двух неэквивалентных утверждений могут быть эквивалентными, неэквивалентность – абсурдность эквивалентности.

Теперь непосредственно рассмотрим закон исключенного третьего, или, как его называет Брауэр, принцип исключенного третьего. Начнем с простого принципа исключенного третьего Брауэра.

Простой принцип исключенного третьего непротиворечив для отдельного утверждения или для конечного числа утверждений. Он пишет: «Каждое приписывание τ некоторого свойства некоторому математическому объекту можно оценить, т.е. либо доказать, либо свести к абсурду»[7]. Что означает, для отдельно взятого утверждения τ так истолкованный принцип исключенного третьего является непротиворечивым как в интуиционистской, так и в классической математике. Если бы принцип оказался противоречивым, то утверждение об абсурдности τ было бы одновременно истинным и ложным. Этого быть не может – поэтому одновременное существование этого простого принципа исключенного третьего для любого конечного числа таких утверждений τ является непротиворечивым.

Из простого принципа исключенного третьего, по Брауэру, вытекают следствия. Первое следствие простого принципа исключенного третьего говорит: «Если для приписывания τ некоторого свойства математическому объекту установлена непротиворечивость, т.е. абсурдность абсурдности, то можно доказать и истинность приписывания τ»[8]. То есть, это означает, что если установлена непротиворечивость, то можно доказать истинность τ. Или если установлено двойное отрицание τ, то можно доказать его истинность.

Второе следствие простого принципа исключенного третьего называется следствием проверочной возможности, и оно заключается в том, что каждое приписывание некоторого свойства математическому объекту можно проверить, т.е. «либо доказать, что оно непротиворечиво, либо доказать, что оно абсурдно»[9]. То есть, каждое приписывание τ можно проверить, доказав либо непротиворечивость, либо абсурдность.

---

[7] *Brouwer L.E.J.* Consciousness, Philosophy and Mathematics // Proceedings of the Tenth International Congress of Philosophy. Vol. 1. Amsterdam. 1949. P. 1244.

[8] Ibid. P. 1245.

[9] Ibid. P. 1245.

Теперь переходим к полному принципу исключенного третьего. Он гласит: «Если *a*, *b* и *c* – виды математических объектов, если далее *a* и *b* являются составными частями вида *c* и если *b* состоит из тех элементов вида *c*, которые не могут принадлежать виду *a*, то *c* совпадает с объединением *a* и *b*»[10].

Этот принцип также имеет два следствия. Первое следствие – принцип взаимности дополнительности формулируется так: «Если *a*, *b* и *c* – виды математических объектов, если далее *a* и *b* – составные части вида *c* и если *b* состоит из элементов вида *c*, которые не могут принадлежать виду *a*, то *a* состоит из тех элементов вида *c*, которые не могут принадлежать виду *b*»[11].

И второе – полный принцип проверочной возможности формулируется следующим образом: «Если *a*, *b*, *d* и *c* – виды математических объектов, если каждый из видов *a*, *b* и *d* – составная часть вида *c*, если *b* состоит из элементов вида *c*, которые не могут принадлежать виду *a*, а *d* – из элементов вида *c*, которые не могут принадлежать *b*, то *c* совпадает с объединением *b* и *d*»[12].

Отношения между принципом исключенного третьего, принципом проверочной возможности и принципом взаимности дополнительности Брауэр характеризует следующим образом. Он пишет, что «область законности принципа исключенного третьего идентична с пересечением области законности принципа проверочной возможности и области законности принципа взаимности дополнительности»[13]. Таким образом, область законности принципа исключенного третьего является лишь частью области законности принципа проверочной возможности, или принципа взаимности дополнительности. Это значит, что суждения могут удовлетворять принципу проверочной возможности, или принципу взаимности дополнительности, но при этом некоторые из них не удовлетворяют принципу исключенного третьего. Однако, по мнению Брауэра, такие отношения между тремя принципами сохраняются не всегда и не для всех видов утверждений.

Рассмотрим, например, негативные утверждения, или утверждения абсурдности. Каждое негативное утверждение является частным случаем реализации принципа взаимности дополнительности. Пусть α негативное утверждение, указывающее на абсурдность утверждения β. Абсурдность абсурдности β, то есть непротиворечивость α влечет за собой абсурдность β, то есть влечет α. Вследствие реализации принципа взаимности дополнительности, принципы проверочной возможности и ис-

---

[10] Ibid. P. 1245.
[11] Ibid. P. 1245.
[12] Ibid. P. 1245.
[13] Ibid. P. 1245.

ключенного третьего являются эквивалентными в области негативных утверждений. Если для α выполняется принцип проверочной возможности, то можно доказать либо абсурдность абсурдности β, либо непротиворечивость абсурдности β, то есть либо (по принципу взаимности дополнительности) абсурдность абсурдности β, либо абсурдность β, то есть либо абсурдность α, либо α. Так α удовлетворяет принципу исключенного третьего.

Для Брауэра два случая, которые допускаются относительно утверждения α, а именно, α может быть либо истинным, либо ложным, не достаточно доказательны. По его мнению, их необходимо заменить следующими:

«1) доказано, что α истинно;

2) доказано, что α ложно, т.е. абсурдно;

3) не доказано ни то, что α истинно, ни то, что α абсурдно, однако известен алгорифм, заставляющий принять решение либо о том, что α истинно, либо о том, что α абсурдно;

4) не доказано ни то, что α истинно, ни то, что α абсурдно, и кроме того мы не знаем никакого алгорифма, приводящего либо к утверждению о том, что α истинно, либо к утверждению о том, что α абсурдно»[14].

Первые три случая показывают, что утверждение можно оценить. В четвертом случае существует вероятность, что в какой-то момент утверждение может перейти в один из первых трех случаев. Известно, что в интуиционистской математике объект не является заранее данным, поэтому он может, находясь в состоянии свободного становления, приобрести новое свойство.

3. Можно ли формализовать неформальное?

В 1927 году Голландская математическая ассоциация в качестве конкурсной темы предложила проблему формализации интуиционистской математики. Прошел год, и Гейтинг был удостоен приза Ассоциации.

Еще в университете он стал учеником Брауэра. Следует отметить, что верить в идеи, которые предлагал Брауэр, и быть его последователем было совсем нелегко. Его взгляды, если и не были безумными, то считались весьма и весьма оригинальными. Считать, что математика – это умственные построения идеализированного субъекта с неограниченной памятью, и при этом идеализированный субъект опирается на первоначальную интуицию – на такое могли осмелиться немногие. И далее, математика больше не нуждается в актуальной бесконечности, а единственный способ существования математического объекта состоит в по-

---

[14] *Brouer L.E.J.* Effect of Intuitionism on Classical Algebra of Logic // Proceedings of the Royal Irish Academy. Vol. 57 (6). 1955. P. 114.

строении умственной конструкции. Экзистенциальные высказывания доказываются путем построения потенциально выполнимого объекта.

Несомненно, Гейтинг разделял основные идеи интуиционизма с Брауэром, однако он скептически относился к его философскому индивидуализму. Гейтинг рассматривает интуиционистскую логику как логику знания, классическая логика является логикой математического бытия.

Интуиционистские формальные системы требуют и иной, нежели классическая, семантики. Поэтому Гейтинг разрабатывает новую семантическую модель для интуиционистской логики.

Логические операторы рассматриваются с помощью отношения «*P* есть доказательство *A*» посредством перехода к логическим составляющим *A*, имеющим меньшую сложность. Это приводит в самоочевидным элементарным высказываниям.

Отрицание в интуиционистской логике рассматривается как операция, отражающая процесс построения. Отрицание означает выполнение построения *B*, которое приводит к противоречию предположение, что можно довести до конца построение *A*. Выделяется математическое отрицание и отрицание фактическое.

Гейтинг рассматривает это следующим образом:

1) Я выполнил в уме построение *A*;

2) Я выполнил в уме построение *B*, которое приводит к противоречию предположение, что можно довести до конца построение *A*;

3) Я не выполнил в уме построение *A*.

Первое утверждение Гейтинг называет формой, в которой представимо каждое математическое утверждение, второе – математическим отрицанием первого утверждения, третье – фактическим отрицанием.

Особую сложность представляет импликация. Для интуиционистов определение «$A \supset B$ ложно тогда, и только тогда, когда *A* истинно и *B* ложно» бессмысленно, пока неизвестны логические значения *A* и *B*. Гейтинг предположил, что доказать $A \supset B$ – значит построить конструкцию, которая преобразует каждое доказательство *A* в некоторое доказательство *B*. Это же можно рассмотреть и для отрицания, так как $\neg A$ можно рассмотреть как импликацию от *A* к какому-нибудь заведомо ложному суждению. Согласно Гейтингу, каждое предложение представляет собой требование некоторого математического построения, удовлетворяющего определенным условиям. Доказательство истинности предложения заключается в реализации требуемого в нем построения.

В отличие от Гейтинга, Колмогоров предполагал, что интуиционистская логика имеет статус, независимый от интуиционистской философии. Колмогоров придает исчислению созданному Гейтингом смысл, не зависящий от интуиционистских предпосылок. Колмогоров интерпретирует это исчисление как исчисление задач. Каждая переменная является задачей. Он вводит следующие функции:

$a \wedge b$ – решить обе задачи a и b;

$a \vee b$ – решить по крайней мере одну из задач;

$a \supset b$ – свести решение b к решению a;

$\neg a$ – предполагая, что дано решение a, прийти к противоречию.

Функции независимы между собой. Если решена задача $a \supset b$, то не всегда мы имеем решение задачи $\neg a \vee b$. В дальнейшем идеи Гейтинга-Колмогорова были развиты С. Клини в концепции рекурсивной реализуемости.

Рассмотрим некоторые, наиболее интересные, системы интуиционистской логики. Система P_H, предложенная Гильбертом, представляет в удобной форме связь между полным аксиоматическим пропозициональным исчислением и интуиционистским пропозициональным исчислением. Добавив к позитивному пропозициональному исчислению Гильберта более слабую аксиому или аксиомы, содержащие отрицание, получаем формулировку интуиционистского пропозиционального исчисления Гейтинга.

Следующая аксиоматическая формулировка интуиционистского пропозиционального исчисления принадлежит Г. Шольцу и К. Шретеру. Исходными связками в данном исчислении являются $\supset$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$ и $\neg$. Это исчисление имеет два правила вывода – *modus ponens* и правило подстановки.

Аксиомами данного исчисления являются аксиомы позитивного пропозиционального исчисления Гильберта, а также две следующие аксиомы:

$((p \supset \neg p) \supset \neg p)$

$(\neg p \supset (p \supset q))$.

Аксиоматическая формулировка минимального пропозиционального исчисления А.Н. Колмогорова и И. Иогансона может быть получена из вышеизложенного исчисления заменой двух последних аксиом следующей:

$((p \supset q) \supset ((p \supset \neg q) \supset \neg p)))$.

Теоремы интуиционистского пропозиционального исчисления или минимального пропозиционального исчисления, которые не содержат отрицания, совпадают с теоремами позитивного пропозиционального исчисления, а те теоремы единственной связкой которых является $\supset$, совпадают с теоремами импликативного пропозиционального исчисления. Аксиоматическая формулировка интуиционистского пропозиционального исчисления, предложенная М. Вайсбергом, использует константу f в качестве исходной связки вместо отрицания и добавляет к системе позитивного пропозиционального исчисления Гильберта аксиому $f \supset p$.

Следует отметить некоторые важные результаты, которые были получены в интуиционистской логике. Так, Гливенко доказал, что если A формула исчисления высказываний доказуема в классической логике, то в интуиционистской логике доказуема формула $\neg\neg A$. И если $\neg A$ формула исчисления высказываний доказуема в классической логике, то она доказуема также и в интуиционистской логике.

Гедель показал, что вопрос о том, имеет ли место в интуиционистской логике какая-нибудь формула, не может быть решен, как в классической логике, посредством конечного числа подстановок вместо входящих в нее букв слов «истинно» или «ложно».

Генцен доказал, что формула, имеющая вид $A \vee B$, доказуема в интуиционистской логике лишь в том случае, если либо A, либо B есть доказуемая формула.

Для того, что получить интуиционистское исчисление предикатов, необходимо добавить к аксиомам исчисления высказываний следующие аксиомы:

$\vdash \forall x A \supset A x_1$

$\vdash A x_1 \supset \exists x A$.

Генцен доказал, что если Ax есть формула, содержащая только одну свободную переменную x, и если $\exists x A$ доказуемо в интуиционистском исчислении предикатов, то доказуемым с интуиционистской точки зрения является $\forall x A$.

Также интересной является связь знаков $\forall$ и $\exists$ с двойным отрицанием. В интуиционистском исчислении предикатов доказуемы формулы:

$\vdash \exists x \neg\neg A \supset \neg\neg\exists x A$;

$\vdash \neg\neg\forall x A \supset \forall x \neg\neg A$.

Обратные формулы не справедливы.

В заключение рассмотрим, для каких классов формул проблема выводимости является разрешимой, для каких нет. Данные результаты были получены С.Ю. Масловым, Г.Е. Минцем, В.П. Оревковым.

Предварительно введем некоторые необходимые для дальнейшего изложения понятия и определения.

Секвенция называется положительной, если она не содержит вхождений знаков $\supset$ и $\neg$.

Секвенция называется квазиположительной, если она не содержит вхождений знака $\supset$ и формул видов:

$\neg\forall x A$, $\neg\exists x A$, $\neg(A \wedge B)$, $\neg(A \vee B)$, $\neg(A \supset B)$

где A и B формулы, x – предметная переменная.

Квазиположительная (положительная) секвенция называется квазиабсолютной (абсолютной) секвенцией, если она не содержит положительных вхождений квантора $\forall$.

Связанное вхождение переменной x в формулу A называется отрицательным вхождением, если оно находится в области действия $\forall x$, входящего отрицательно в A, или в области действия $\exists x$, входящего положительно в A. В противном случае связанное вхождение переменной в A называется положительным.

Вхождение элементарной формулы $P(x_1, \ldots, x_n)$ в формулу A называется простым, если все связанные вхождения переменных $x_1, \ldots, x_n$ в A являются положительными или если все вхождения являются отрицательными. Тогда формула A исчисления предикатов называется простой формулой, если все вхождения элементарных формул в A являются простыми вхождениями. Так, простой будет любая формула, содержащая только одноместные предикатные переменные.

Теперь, когда необходимые понятия и обозначения определены, рассмотрим проблему выводимости для формул классического исчисления предикатов.

В классическом исчислении предикатов проблема выводимости разрешима для класса формул, содержащих только одноместные предикатные переменные.

Любая абсолютная секвенция, выводимая в классическом исчислении предикатов, выводима также и в позитивном (абсолютном) исчислении предикатов, а, следовательно, также в минимальном исчислении предикатов и конструктивном.

Рассмотрим выводимость классов секвенций в конструктивном исчислении предикатов.

Разрешима проблема выводимости в конструктивном исчислении предикатов (а также в минимальном исчислении предикатов) для следующих классов секвенций:

- класс простых квазиабсолютных секвенций;
- класс простых квазиположительных секвенций, не содержащих положительных вхождений знака $\vee$;
- класс простых квазиположительных секвенций, в сукцедент которых не входит знак $\neg$, входит только одна одноместная предикатная переменная и не входят другие предикатные переменные;
- класс простых положительных секвенций, в сукцеденте которых в область действия квантора $\forall$ входят только одноместные предикатные переменные и не входит $\vee$.

Теперь рассмотрим, для каких классов формул проблема выводимости является неразрешимой.

Проблема выводимости является неразрешимой для следующих классов секвенций:

- класс абсолютных секвенций, содержащих двухместную предикатную переменную и не содержащих других предикатных переменных и положительных вхождений $\vee$ для классического, конструктивного, минимального, позитивного исчисления предикатов;

- класс секвенций, содержащих одноместную предикатную переменную и не содержащих других предикатных переменных, знака $\neg$ и положительных вхождений квантора $\forall$ для конструктивного, минимального, позитивного исчисления предикатов;
- класс секвенций, содержащих одноместную предикатную переменную и не содержащих других предикатных переменных, знака $\supset$ и положительных вхождений знака $\vee$ и квантора $\forall$ для конструктивного и минимального исчисления предикатов;
- класс положительных секвенций, содержащих одноместные предикатные переменные P и P' и не содержащих других предикатных переменных для конструктивного, минимального и позитивного исчисления предикатов;
- класс квазиположительных секвенций, содержащих одноместную предикатную переменную и не содержащих других предикатных переменных для конструктивного и минимального исчисления предикатов.

Проблема выводимости неразрешима в конструктивном исчислении предикатов без функциональных знаков для класса формул, содержащих только одну одноместную предикатную переменную.

Итак, формализация интуиционистской математики была осуществлена. Вследствие этого появились формальные системы, которые имели в дальнейшем широкое распространение, речь идет об интуиционистском исчислении высказываний и предикатов. При этом оказалось, что классические логические исчисления получаются из интуиционистских простым добавлением закона исключенного третьего. Однако, несмотря на столь блестящие результаты, Гейтинг, как бы отдавая дань своему великому учителю, все же предостерегал от переоценки возможностей формализации. Он писал: «Интуиционистская математика является мыслительным процессом, и любой язык, включая язык формализации, есть только некоторая опора для коммуникации. В принципе невозможно построить систему формул, эквивалентную интуиционистской математике, поскольку возможности мышления не могут быть сведены к конечному числу заранее построенных правил».[15]

Известно, что Брауэр высоко оценил результаты, полученные его учеником. Он понимал, что исследования Гейтинга являются очень важным этапом в развитии интуиционизма. И это несмотря на явное противоречие его взглядам! Но факты остаются фактами. После формализации Гейтингом интуиционистской математики Брауэр практически десять лет не занимался научной деятельностью.

---

[15] *Heyting A.* Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik // Sitzungsberichte der preussischen Akademie von Wissenschaften. Physikalisch-mathematische Klasse. 1930. P. 42.

Литература

1. *Beth E.W.* The Foundations of Mathematics // Study in the Philosophy of Science. Amsterdam, 1965.

2. *Brouwer L.E.J.* Effect of Intuitionism on Classical Algebra of Logic // Proceedings of the Royal Irish Academy. Vol. 57 (6). 1955.

3. *Brouwer L.E.J.* Points and Spaces // Canadian Journal of Mathematics, Vol. 6 (1). 1954.

4. *Brouwer L.E.J.* Consciousness, Philosophy and Mathematics // Proceedings of the Tenth International Congress of Philosophy. Vol. 1. Amsterdam, 1949.

5. *Heyting A.* Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik // Sitzungsberichte der preussischen Akademie von Wissenschaften. Physikalisch-mathematische Klasse. 1930.

6. *Troelstra A.S.* Arend Heyting and his contribution to intuition // Nieuw Archief voor Wiskunde 29 (3), 1981.

7. *Troelstra A.S.* The scientific work of A. Heyting // Compositio Mathematica. Vol. 20. 1968.

8. *Гейтинг А.* Обзор исследований по основаниям математики. М., 1936.

9. *Марков А.А., Нагорный Н.М.* Теория алгорифмов. М., 1984.