ЛОГИКА СЕГОДНЯ

Александр Беликов[1]

ЛЮБОПЫТНЫЙ ФАКТ ОБ ИНФЕКЦИОННЫХ ЛОГИКАХ[2]

Аннотация. Работа посвящена исследованию свойств логического следования в контексте так называемых инфекционных логик. Среди последних особый интерес представляют две четырехзначные логики, которые также можно отнести к классу релевантных: логика Дойча $\mathbf{S_{fde}}$ и логика Шмуца $\mathbf{dS_{fde}}$. В этой короткой заметке я докажу, что если в $\mathbf{dS_{fde}}$ отношение следования определить через сохранность истинности и неложности, то результат эквивалентен отношению следования в другой недавно открытой логике $\mathbf{S_{etl}}$, а если определить его через сохранность неложности (в сильном смысле), то мы получим следование, эквивалентное следованию в логике $\mathbf{S_{nfl}}$, также предложенной совсем недавно. Поскольку обе логики $\mathbf{S_{etl}}$ и $\mathbf{S_{nfl}}$ получаются в результате аналогичной модификации логики $\mathbf{S_{fde}}$, главный тезис моей работы сводится к следующему: «в точности истинностная» и «неложностная» версии логик $\mathbf{S_{fde}}$ и $\mathbf{dS_{fde}}$ эквивалентны. С содержательной точки зрения эквивалентность исследуемых систем позволяет расширить область их возможных приложений, поскольку она свидетельствует о том, что эти системы могут быть интерпретированы как в контексте семантики с инфекционными истинностно-значными провалами, так и в контексте семантики с инфекционными пресыщенными оценками.

Ключевые слова: инфекционные логики, в точности истинностная логика, неложностная логика, логическое следование, секвенциальные исчисления, матричная семантика, истинностно-значные провалы, пресыщенные оценки, релевантная логика.

Alexander Belikov

A CURIOUS FACT ABOUT INFECTIOUS LOGICS

Abstract. This work is devoted to the study of some properties of logical consequence in infectious logics. Two four-valued systems—Deutsch's $\mathbf{S_{fde}}$ and Szmuc's $\mathbf{dS_{fde}}$—are of particular interest. In this short note, I prove the following two facts: (1) if we define a consequence relation via preservation of truth and non-falsity in the context of $\mathbf{dS_{fde}}$, then the resulting

[1] *Беликов Александр Александрович* — кандидат философских наук, специалист по учебно-методической работе кафедры логики философского факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.
Alexander Belikov, PhD, teaching and learning specialist, Department of Logic, Faculty of Philosophy, Lomonosov Moscow State University.
belikov@philos.msu.ru

[2] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-78-00044).

consequence relation is equivalent to the one from recently discovered logic $\mathbf{S_{etl}}$, (2) if we define a consequence relation via preservation of non-falsity (in the strong sense) in the context of $\mathbf{dS_{fde}}$, then the resulting consequence relation is equivalent to the one from recently discovered logic $\mathbf{S_{nfl}}$. Since both $\mathbf{S_{etl}}$ and $\mathbf{S_{nfl}}$ were originally obtained by analogous modification of $\mathbf{S_{fde}}$, the main thesis of my work can be formulated as follows: the exactly true and non-falsity versions of $\mathbf{S_{fde}}$ and $\mathbf{dS_{fde}}$ are equivalent. From the philosophical point of view, their equivalence allows to broaden the domain of possible applications, because it suggests that they can be equally interpreted in the context of infectious gaps as well as in the context of infectious gluts.
Keywords: infectious logics, exactly true logic, non-falsity logic, logical consequence, sequent calculi, matrix semantics, truth value gaps, truth value gluts, relevance logic.

Семантика логики **FDE**, предложенная Белнапом в семидесятые годы (Belnap 1977a, Belnap 1977b), как известно, основана на четырех истинностных значениях: `T` (истина), `B` (истина и ложь одновременно), `N` (ни истина, ни ложь) и `F` (ложь). Отношение следования в **FDE** определяется через сохранность истинности от посылок к заключению, что технически выражается в использовании двух значений `T` и `B` в качестве выделенных.

Учитывая особенность классической логики, где истинность высказывания эквивалентна его неложности, вполне разумно потребовать от следования в **FDE** сохранять не только истинность, но и неложность; то есть использовать в качестве выделенного значения только `T`. Как оказалось, полученное таким образом отношение следования порождает новую логическую теорию. Эта логика была изучена Капснером[3] и Ривьеччо под названием **ETL** в (Pirtz, Rivieccio 2013) (**ETL** — сокращение от «Exactly True Logic»). Можно сделать следующий шаг и потребовать от следования сохранять все значения, кроме «самого плохого», коим, очевидно, является ложь, то есть `F`. Этот шаг был сделан в работах (Shramko, Zaitsev, Belikov 2019, Shramko, Zaitsev, Belikov 2017, Shramko 2019), а соответствующая логика получила название **NFL**, что является сокращением от «Non-falsity logic».

Линия исследований аналогичных **ETL**- и **NFL**-версий других логических систем была недавно продолжена в работе (Belikov, Petrukhin 2020). На этот раз в качестве базисной логики была выбрана логика $\mathbf{S_{fde}}$, открытая Дойчем в (Deutsch 1977, Deutsch 1979). Стоит заметить, что выбор $\mathbf{S_{fde}}$ мотивирован не праздным любопытством, а несколькими вполне содержательными причинами. Прежде всего, $\mathbf{S_{fde}}$, как и **FDE**, относится к семейству релевантных логик, разница лишь в том, что в этих логиках реализованы разные критерии релевантности. Логика **FDE** характеризуется так называемым VSP-критерием, согласно которому в корректном рассуждении посылки и заключение имеют хотя бы одну общую пропозициональную переменную, см. (Anderson, Belnap 1975). В свою очередь, $\mathbf{S_{fde}}$ характеризуется более сильным PP-критерием, согласно которому в корректном рассуждении

[3] На момент написания упомянутой статьи Капснер носил фамилию Питц.

все пропозициональные переменные из заключения должны включаться в множество пропозициональных переменных, входящих в посылки, см. (Ferguson 2017). Поэтому вопрос о том, какими свойствами обладают **ETL**- и **NFL**-версии различных по своему духу релевантных логик представляет существенный интерес. Кроме того, несмотря на столь существенную разницу между $\mathbf{S_{fde}}$ и **FDE**, они обе основаны на четырехзначной семантике с одинаковой интерпретацией истинностных значений. Таким образом, описанная выше методология получения **ETL**- и **NFL**-версий **FDE** может быть напрямую перенесена на случай $\mathbf{S_{fde}}$.

Отличительной чертой $\mathbf{S_{fde}}$ является тот факт, что она относится к классу так называемых инфекционных логик, то есть логик, чьи матричные семантики содержат инфекционное истинностное значение. Последнее означает, что если некоторое высказывание A принимает такое значение, то любое другое высказывание B, в которое входит A, тоже автоматически принимает это значение. В контексте $\mathbf{S_{fde}}$ таким значением является $\mathtt{N}$, что позволяет выразить более строгий подход к интерпретации истинностно-значных провалов.

ETL- и **NFL**-версии логики $\mathbf{S_{fde}}$ получили название $\mathbf{S_{etl}}$ и $\mathbf{S_{nfl}}$, соответственно. Для них были предложены адекватные секвенциальные исчисления, получен результат о характеризации отношения логического следования, а также изучены различные импликативные расширения (более подробно см. (Belikov, Petrukhin 2020)). Замечу, что $\mathbf{S_{etl}}$ и $\mathbf{S_{nfl}}$ встречаются в работе (Szmuc 2016) под обозначениями $\mathbf{L}_{\mathfrak{ne}}$ и $\mathbf{L}_{\mathfrak{bb}'}$. Кроме того, логика $\mathbf{S_{etl}}$ независимо возникает в работе (Priest 2019), где она не обозначена никаким специальным образом.

В работах (Szmuc 2016, Szmuc 2019) Шмуц предложил логику $\mathbf{dS_{fde}}$, которая является двойственной по отношению к $\mathbf{S_{fde}}$. Двойственность заключается в том, что роль инфекционного значения в $\mathbf{dS_{fde}}$ выполняет значение $\mathtt{B}$. Возникает естественный вопрос: каковы **ETL**- и **NFL**-версии логики $\mathbf{dS_{fde}}$? Ответ на этот вопрос по крайней мере любопытный, и он может быть зафиксирован в виде следующего тезиса.

Тезис. **ETL**- и **NFL**-версии логик $\mathbf{dS_{fde}}$ и $\mathbf{S_{fde}}$ — это одни и те же логики.

Обоснованию истинности этого тезиса и посвящена моя заметка.

Для начала мне потребуется ввести ряд технических определений. Все исследуемые здесь логики основаны на стандартно-определяемом пропозициональном языке $\mathbb{L}$, содержащем связки $\{\wedge, \vee, \sim\}$. Понятие формулы стандартно. Множество пропозициональных переменных языка $\mathbb{L}$ обозначается через $\mathbb{P}$, а множество всех формул через $\mathbb{F}$. Собственно, под *логикой* я буду понимать упорядоченную пару $\langle \mathbb{L}, \models \rangle$, где $\mathbb{L}$ — это описанный выше пропозициональный язык, а $\models$ — это некоторое отношение следования, сформулированное в контексте некоторой семантики. Таким образом, для доказательства истинности утверждаемого мной тезиса достаточно доказать эквивалентность соответствующих отношений следования. Итак, перейдем к формулировке матричных семантик. Поскольку для целей моей работы интерпретация истинностных значений не существенна, я буду использовать для них абстрактные обозначения, а именно: $\{\mathtt{1}, \mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{0}\}$.

Определение 1. *Инфекционной b-матрицей* языка $\mathbb{L}$ называем упорядоченную тройку $\langle \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} \rangle$, где:

(a) $\mathcal{V} = \{\mathtt{1}, \mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{0}\}$;

(b) $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\mathbf{fde}}$ или $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\mathbf{etl}}$ или $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\mathbf{nfl}}$, где $\mathcal{D}_{\mathbf{fde}} = \{\mathtt{1}, \mathtt{a}\}$, $\mathcal{D}_{\mathbf{etl}} = \{\mathtt{1}\}$ и $\mathcal{D}_{\mathbf{nfl}} = \{\mathtt{1}, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}$;

(c) для всякой n-местной логической связки $\diamond$ языка $\mathbb{L}$ множество $\mathcal{O}$ содержит соответствующую n-местную функцию $\diamond_b$: $\mathcal{V}^n \to \mathcal{V}$. Функции из $\mathcal{O}$ определяются следующим образом:

$\sim_b$	A
0	1
a	a
b	b
1	0

$\wedge_b$	1	a	b	0
1	1	a	b	0
a	a	a	b	0
b	b	b	b	b
0	0	0	b	0

$\vee_b$	1	a	b	0
1	1	1	b	1
a	1	a	b	a
b	b	b	b	b
0	1	a	b	0

Оценкой в инфекционной b-матрице называем функцию $v : \mathbb{F} \to \mathcal{V}$, которая удовлетворяет следующему условию для всякой n-местной логической связки $\diamond$ языка $\mathbb{L}$ и $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{F}$:

$$v(\diamond(A_1, \ldots, A_n)) = \diamond_b(v(A_1), \ldots, v(A_n)).$$

Определение 2. *Инфекционной a-матрицей* языка $\mathbb{L}$ называем упорядоченную тройку $\langle \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} \rangle$, где:

(a) $\mathcal{V} = \{\mathtt{1}, \mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{0}\}$;

(b) $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\mathbf{fde}}$ или $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\mathbf{etl}}$ или $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\mathbf{nfl}}$, где $\mathcal{D}_{\mathbf{fde}} = \{\mathtt{1}, \mathtt{a}\}$, $\mathcal{D}_{\mathbf{etl}} = \{\mathtt{1}\}$ и $\mathcal{D}_{\mathbf{nfl}} = \{\mathtt{1}, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}$;

(c) для всякой n-местной логической связки $\diamond$ языка $\mathbb{L}$ множество $\mathcal{O}$ содержит соответствующую n-местную функцию $\diamond_a$: $\mathcal{V}^n \to \mathcal{V}$. Функции из $\mathcal{O}$ определяются следующим образом:

$\sim_a$	A
0	1
a	a
b	b
1	0

$\wedge_a$	1	a	b	0
1	1	a	b	0
a	a	a	a	a
b	b	a	b	0
0	0	a	0	0

$\vee_a$	1	a	b	0
1	1	a	1	1
a	a	a	a	a
b	1	a	b	b
0	1	a	b	0

Оценкой в инфекционной a-матрице называем функцию $w : \mathbb{F} \to \mathcal{V}$, которая удовлетворяет следующему условию для всякой n-местной логической связки $\diamond$ языка $\mathbb{L}$ и $A_1, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{F}$:

$$w(\diamond(A_1, \ldots, A_n)) = \diamond_a(w(A_1), \ldots, w(A_n)).$$

Замечание 1. Предполагая стандартное определение логического следования, как отношения, сохраняющего выделенные значения, можно определить следующие матрицы: инфекционная b-матрица с множеством выделенных значений $\mathcal{D}_{\mathbf{fde}}$ адекватна логике $\mathbf{S_{fde}}$ (обозначим эту матрицу $\mathcal{M}_{\mathbf{S_{fde}}}$), инфекционная a-матрица с множеством выделенных значений $\mathcal{D}_{\mathbf{fde}}$ адекватна логике $\mathbf{dS_{fde}}$ (обозначим эту матрицу $\mathcal{M}_{\mathbf{dS_{fde}}}$), инфекционные b-матрицы с множествами выделенных значений $\mathcal{D}_{\mathbf{etl}}$ и $\mathcal{D}_{\mathbf{nfl}}$ адекватны логикам $\mathbf{S_{etl}}$ и $\mathbf{S_{nfl}}$, соответственно (обозначим эти матрицы как $\mathcal{M}_{\mathbf{S_{etl}}}$ и $\mathcal{M}_{\mathbf{S_{nfl}}}$).

Из предыдущего замечания ясно, что две инфекционные a-матрицы остались не упомянутыми, одна с множеством выделенных значений $\mathcal{D}_{\mathbf{etl}}$, а другая с $\mathcal{D}_{\mathbf{nfl}}$ (обозначим эти матрицы как $\mathcal{M}_{\mathbf{dS_{etl}}}$ и $\mathcal{M}_{\mathbf{dS_{nfl}}}$). Основанные на них логики я обозначу как $\mathbf{dS_{etl}}$ и $\mathbf{dS_{nfl}}$. Собственно говоря, они и являются **ETL**- и **NFL**-версиями логики $\mathbf{dS_{fde}}$.

Для осуществления последующих доказательств мне нужно уточнить понятие логического следования для каждой из исследуемых логик.

Определение 3. Для всяких $\Gamma \cup \Delta \subseteq \mathbb{F}$:

- $\Gamma \models_{\mathbf{S_{etl}}} \Delta \Leftrightarrow$ для всякой оценки v в $\mathcal{M}_{\mathbf{S_{etl}}}$ если $v(A) = \mathtt{1}$ (для всякой $A \in \Gamma$), то $v(B) = \mathtt{1}$ (для некоторой $B \in \Delta$);
- $\Gamma \models_{\mathbf{dS_{etl}}} \Delta \Leftrightarrow$ для всякой оценки w в $\mathcal{M}_{\mathbf{dS_{etl}}}$ если $v(A) = \mathtt{1}$ (для всякой $A \in \Gamma$), то $w(B) = \mathtt{1}$ (для некоторой $B \in \Delta$);
- $\Gamma \models_{\mathbf{S_{nfl}}} \Delta \Leftrightarrow$ для всякой оценки v в $\mathcal{M}_{\mathbf{S_{nfl}}}$ если $v(A) \in \{\mathtt{1}, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ (для всякой $A \in \Gamma$), то $v(B) \in \{\mathtt{1}, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ (для некоторой $B \in \Delta$);
- $\Gamma \models_{\mathbf{dS_{nfl}}} \Delta \Leftrightarrow$ для всякой оценки w в $\mathcal{M}_{\mathbf{dS_{nfl}}}$ если $w(A) \in \{\mathtt{1}, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ (для всякой $A \in \Gamma$), то $w(B) \in \{\mathtt{1}, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ (для некоторой $B \in \Delta$).

Если чисто визуально исключить инфекционные значения из приведенных выше таблиц, то становится очевидно, что результирующие таблицы попросту совпадут со стандартными таблицами для многих трехзначных логик.

$\sim_b$	A
0	1
a	a
...	...
1	0

$\wedge_b$	1	a	...	0
1	1	a	...	0
a	a	a	...	0
...	...	...	...	...
0	0	0	...	0

$\vee_b$	1	a	...	0
1	1	1	...	1
a	1	a	...	a
...	...	...	...	...
0	1	a	...	0

$\sim_a$	A
0	1
...	...
b	b
1	0

$\wedge_a$	1	...	b	0
1	1	...	b	0
...	...	...	...	...
b	b	...	b	0
0	0	...	0	0

$\vee_a$	1	...	b	0
1	1	...	1	1
...	...	...	...	...
b	1	...	b	b
0	1	...	b	0

А если провести ту же процедуру с множествами выделенных значений, то соответствующие «ограничения» $\mathbf{S_{etl}}$ и $\mathbf{dS_{etl}}$ совпадут с сильной логикой Клини $\mathbf{K_3}$ (Kleene 1952), в то время как «ограничения» $\mathbf{S_{nfl}}$ и $\mathbf{dS_{nfl}}$ совпадут с логикой Приста **LP** (Priest 1979). Аналогичное наблюдение лежит в основе понятия «инфекционного аналога», предложенного в (Belikov, Petrukhin 2020). Этот факт подсказывает стратегию доказательства эквивалентности между интересующими меня логиками. Интуитивно, идея состоит в том, что инфекционное значение из одной семантики ставится в соответствие инфекционному значению из другой, оставляя при этом неинфекционные значения неинфекционными.

Определение 4. Пусть $\mathbf{S_x} \in \{\mathbf{S_{etl}}, \mathbf{S_{nfl}}\}$. Для всякой оценки v в $\mathcal{M}_{\mathbf{S_x}}$ определим соответствующую ей оценку w в $\mathcal{M}_{\mathbf{dS_x}}$, удовлетворяющую следующим условиям (для всякой $p \in \mathbb{P}$):

$$\begin{array}{ll} v(p) = \mathtt{1} \Leftrightarrow w(p) = \mathtt{1}, & v(p) = \mathtt{a} \Leftrightarrow w(p) = \mathtt{b}, \\ v(p) = \mathtt{b} \Leftrightarrow w(p) = \mathtt{a}, & v(p) = \mathtt{0} \Leftrightarrow w(p) = \mathtt{0}. \end{array}$$

Аналогичное определение формулируется для $\mathbf{dS_{etl}}$ и $\mathbf{dS_{nfl}}$.

Определение 5. Пусть $\mathbf{S_x} \in \{\mathbf{S_{etl}}, \mathbf{S_{nfl}}\}$. Для всякой оценки w в $\mathcal{M}_{\mathbf{dS_x}}$ определим соответствующую ей оценку v в $\mathcal{M}_{\mathbf{S_x}}$, удовлетворяющую следующим условиям (для всякой $p \in \mathbb{P}$):

$$\begin{array}{ll} w(p) = \mathtt{1} \Leftrightarrow v(p) = \mathtt{1}, & w(p) = \mathtt{a} \Leftrightarrow v(p) = \mathtt{b}, \\ w(p) = \mathtt{b} \Leftrightarrow v(p) = \mathtt{a}, & w(p) = \mathtt{0} \Leftrightarrow v(p) = \mathtt{0}. \end{array}$$

Теперь необходимо доказать, что условия, зафиксированные в определениях 4 и 5, выполняются для любых видов формул языка $\mathbb{L}$.

Лемма 1. Пусть $\mathbf{S_x} \in \{\mathbf{S_{etl}}, \mathbf{S_{nfl}}\}$. Для всякой оценки v в $\mathcal{M}_{\mathbf{S_x}}$ существует такая оценка w в $\mathcal{M}_{\mathbf{dS_x}}$, что для всякой $A \in \mathbb{F}$ верно следующее:

$$\begin{array}{ll} \text{(a) } v(A) = \mathtt{1} \Leftrightarrow w(A) = \mathtt{1}, & \text{(b) } v(A) = \mathtt{a} \Leftrightarrow w(A) = \mathtt{b}, \\ \text{(c) } v(A) = \mathtt{b} \Leftrightarrow w(A) = \mathtt{a}, & \text{(d) } v(A) = \mathtt{0} \Leftrightarrow w(A) = \mathtt{0}. \end{array}$$

Доказательство. Рассмотрим случай $\mathbf{S_x} = \mathbf{S_{etl}}$. Доказательство ведется индукцией по построению формулы A. Базисный случай, когда $A \in \mathbb{P}$, имеет место в силу определения 4. Индуктивное допущение: пусть утверждение леммы справедливо для формул с числом связок меньше, чем s, где s — число связок в рассматриваемой формуле.

Пусть $A = {\sim}B$: (a) $v({\sim}B) = \mathtt{1} \Leftrightarrow v(B) = \mathtt{0}$ (определение ${\sim}_b$) $\Leftrightarrow w(B) = \mathtt{0}$ (индуктивное допущение) $\Leftrightarrow w({\sim}B) = \mathtt{1}$ (определение ${\sim}_a$). (b) $v({\sim}B) = \mathtt{a} \Leftrightarrow v(B) = \mathtt{a}$ (определение ${\sim}_b$) $\Leftrightarrow w(B) = \mathtt{b}$ (индуктивное допущение) $\Leftrightarrow w({\sim}B) = \mathtt{b}$ (определение ${\sim}_a$). (c) $v({\sim}B) = \mathtt{b} \Leftrightarrow v(B) = \mathtt{b}$ (определение ${\sim}_b$) $\Leftrightarrow w(B) = \mathtt{a}$ (индуктивное допущение) $\Leftrightarrow w(\sim B) = \mathtt{a}$ (определение $\sim_a$). (d) $v(\sim B) = \mathtt{0} \Leftrightarrow v(B) = \mathtt{1}$ (определение $\sim_b$) $\Leftrightarrow w(B) = \mathtt{1}$ (индуктивное допущение) $\Leftrightarrow w(\sim B) = \mathtt{0}$ (определение $\sim_a$).

Пусть $A = B \wedge C$: (a) $v(B \wedge C) = \mathtt{1} \Leftrightarrow v(B) = \mathtt{1}$ и $v(C) = \mathtt{1}$ (определение $\wedge_b$) $\Leftrightarrow w(B) = \mathtt{1}$ и $w(C) = \mathtt{1}$ (индуктивное допущение) $\Leftrightarrow w(B \wedge C) = \mathtt{1}$ (определение $\wedge_a$). (b) $v(B \wedge C) = \mathtt{a} \Leftrightarrow [v(B) = \mathtt{1}$ и $v(C) = \mathtt{a}]$ или $[v(B) = \mathtt{a}$ и $v(C) = \mathtt{a}]$ или $[v(B) = \mathtt{a}$ и $v(C) = \mathtt{1}]$ (определение $\wedge_b$) $\Leftrightarrow [w(B) = \mathtt{1}$ и $w(C) = \mathtt{b}]$ или $[w(B) = \mathtt{b}$ и $w(C) = \mathtt{b}]$ или $[w(B) = \mathtt{b}$ и $w(C) = \mathtt{1}]$ (индуктивное допущение) $\Leftrightarrow w(B \wedge C) = \mathtt{b}$ (определение $\wedge_a$). (c) $v(B \wedge C) = \mathtt{b} \Leftrightarrow v(B) = \mathtt{b}$ или $v(C) = \mathtt{b}$ (определение $\wedge_b$) $\Leftrightarrow w(B) = \mathtt{a}$ или $w(C) = \mathtt{a}$ (индуктивное допущение) $\Leftrightarrow w(B \wedge C) = \mathtt{a}$ (определение $\wedge_a$). (d) $v(B \wedge C) = \mathtt{0} \Leftrightarrow [v(B) = \mathtt{1}$ и $v(C) = \mathtt{0}]$ или $[v(B) = \mathtt{a}$ и $v(C) = \mathtt{0}]$ или $[v(B) = \mathtt{0}$ и $v(C) = \mathtt{0}]$ или $[v(B) = \mathtt{0}$ и $v(C) = \mathtt{1}]$ или $[v(B) = \mathtt{0}$ и $v(C) = \mathtt{a}]$ (определение $\wedge_b$) $\Leftrightarrow [w(B) = \mathtt{1}$ и $w(C) = \mathtt{0}]$ или $[w(B) = \mathtt{b}$ и $w(C) = \mathtt{0}]$ или $[w(B) = \mathtt{0}$ и $w(C) = \mathtt{0}]$ или $[w(B) = \mathtt{0}$ и $w(C) = \mathtt{1}]$ или $[w(B) = \mathtt{0}$ и $w(C) = \mathtt{b}]$ (индуктивное допущение) $\Leftrightarrow w(B \wedge C) = \mathtt{0}$ (определение $\wedge_a$).

Пусть $A = B \vee C$: (a) $v(B \vee C) = \mathtt{1} \Leftrightarrow [v(B) = \mathtt{1}$ и $v(C) = \mathtt{1}]$ или $[v(B) = \mathtt{1}$ и $v(C) = \mathtt{a}]$ или $[v(B) = \mathtt{1}$ и $v(C) = \mathtt{0}]$ или $[v(B) = \mathtt{a}$ и $v(C) = \mathtt{1}]$ или $[v(B) = \mathtt{0}$ и $v(C) = \mathtt{1}]$ (определение $\vee_b$) $\Leftrightarrow [w(B) = \mathtt{1}$ и $w(C) = \mathtt{1}]$ или $[w(B) = \mathtt{1}$ и $w(C) = \mathtt{b}]$ или $[w(B) = \mathtt{1}$ и $w(C) = \mathtt{0}]$ или $[w(B) = \mathtt{b}$ и $w(C) = \mathtt{1}]$ или $[w(B) = \mathtt{0}$ и $w(C) = \mathtt{1}]$ (индуктивное допущение) $\Leftrightarrow w(B \vee C) = \mathtt{1}$ (определение $\vee_a$). (b) $v(B \vee C) = \mathtt{a} \Leftrightarrow [v(B) = \mathtt{a}$ и $v(C) = \mathtt{a}]$ или $[v(B) = \mathtt{a}$ и $v(C) = \mathtt{0}]$ или $[v(B) = \mathtt{0}$ и $v(C) = \mathtt{a}]$ (определение $\vee_b$) $\Leftrightarrow [w(B) = \mathtt{b}$ и $w(C) = \mathtt{b}]$ или $[w(B) = \mathtt{b}$ и $w(C) = \mathtt{0}]$ или $[w(B) = \mathtt{0}$ и $w(C) = \mathtt{b}]$ (индуктивное допущение) $\Leftrightarrow w(B \vee C) = \mathtt{b}$ (определение $\vee_a$). (c) $v(B \vee C) = \mathtt{b} \Leftrightarrow v(B) = \mathtt{b}$ или $v(C) = \mathtt{b}$ (определение $\vee_b$) $\Leftrightarrow w(B) = \mathtt{a}$ или $w(C) = \mathtt{a}$ (индуктивное допущение) $\Leftrightarrow w(B \vee C) = \mathtt{a}$ (определение $\vee_a$). (d) $v(B \vee C) = \mathtt{0} \Leftrightarrow v(B) = \mathtt{0}$ и $v(C) = \mathtt{0}$ (определение $\vee_b$) $\Leftrightarrow w(B) = \mathtt{0}$ и $w(C) = \mathtt{0}$ (индуктивное допущение) $\Leftrightarrow w(B \vee C) = \mathtt{0}$ (определение $\vee_a$).

Случай $\mathbf{S_x} = \mathbf{S_{nfl}}$ доказывается идентично. □

Лемма 2. Пусть $\mathbf{S_x} \in \{\mathbf{S_{etl}}, \mathbf{S_{nfl}}\}$. Тогда для всякой оценки w в $\mathcal{M}_{\mathbf{dS_x}}$ существует такая оценка v в $\mathcal{M}_{\mathbf{S_x}}$, что для всякой $A \in \mathbb{F}$ верно следующее:

$$\begin{array}{ll} \text{(a) } w(A) = \mathtt{1} \Leftrightarrow v(A) = \mathtt{1}, & \text{(b) } w(A) = \mathtt{a} \Leftrightarrow v(A) = \mathtt{b}, \\ \text{(c) } w(A) = \mathtt{b} \Leftrightarrow v(A) = \mathtt{a}, & \text{(d) } w(A) = \mathtt{0} \Leftrightarrow v(A) = \mathtt{0}. \end{array}$$

Доказательство. Аналогично лемме 1, используя определения 5, 2 и 1. □

Теорема 1. Для всяких $\Gamma \cup \Delta \subseteq \mathbb{F}$ верно, что $\Gamma \models_{\mathbf{S_{etl}}} \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_{\mathbf{dS_{etl}}} \Delta$.

Доказательство. Допустим, что $\Gamma \models_{\mathbf{S_{etl}}} \Delta$ и $\Gamma \not\models_{\mathbf{dS_{etl}}} \Delta$. $\Gamma \not\models_{\mathbf{dS_{etl}}} \Delta$, по определению 3, влечет, что существует оценка w в $\mathcal{M}_{\mathbf{dS_{etl}}}$ такая, что $w(A) = \mathtt{1}$ (для всякой $A \in \Gamma$) и $w(B) \neq \mathtt{1}$ (для всякой $B \in \Delta$). Зафиксируем оценку w' в $\mathcal{M}_{\mathbf{dS_{etl}}}$, при которой $w'(A) = \mathtt{1}$ (для всякой $A \in \Gamma$), и $w'(B) \neq \mathtt{1}$ (для всякой $B \in \Delta$). Из этого, используя лемму 2, получаем, что существует оценка v в $\mathcal{M}_{\mathbf{S}_{\mathbf{etl}}}$ такая, что $v(A) = \mathtt{1}$ (для всякой $A \in \Gamma$) и $v(B) \neq \mathtt{1}$ (для всякой $B \in \Delta$). Но тогда, используя определение 3, мы получаем $\Gamma \nvDash_{\mathbf{S}_{\mathbf{etl}}} \Delta$. Противоречие. Допустим, что $\Gamma \nvDash_{\mathbf{S}_{\mathbf{etl}}} \Delta$. Из этого, по определению 3, следует, что существует оценка v в $\mathcal{M}_{\mathbf{S}_{\mathbf{etl}}}$ такая, что $v(A) = \mathtt{1}$ (для всякой $A \in \Gamma$) и $v(B) \neq \mathtt{1}$ (для всякой $B \in \Delta$). Зафиксируем оценку v' в матрице $\mathcal{M}_{\mathbf{S}_{\mathbf{etl}}}$, при которой $v'(A) = \mathtt{1}$ (для всякой $A \in \Gamma$) и $v'(B) \neq \mathtt{1}$ (для всякой $B \in \Delta$). Используя лемму 1, получаем, что существует оценка w в матрице $\mathcal{M}_{\mathbf{dS}_{\mathbf{etl}}}$ такая, что $w(A) = \mathtt{1}$ (для всякой $A \in \Gamma$) и $w(B) \neq \mathtt{1}$ (для всякой $B \in \Delta$). Из последнего, по определению 3, мы получаем $\Gamma \nvDash_{\mathbf{dS}_{\mathbf{etl}}} \Delta$. Таким образом, применяя контрапозицию, приходим к желаемому результату. □

Теорема 2. Для всяких $\Gamma \cup \Delta \subseteq \mathbb{F}$ верно, что $\Gamma \vDash_{\mathbf{S}_{\mathbf{nfl}}} \Delta \Leftrightarrow \Gamma \vDash_{\mathbf{dS}_{\mathbf{nfl}}} \Delta$.

Доказательство. Допустим, что $\Gamma \vDash_{\mathbf{S}_{\mathbf{nfl}}} \Delta$ и $\Gamma \nvDash_{\mathbf{dS}_{\mathbf{nfl}}} \Delta$. Из $\Gamma \nvDash_{\mathbf{dS}_{\mathbf{nfl}}} \Delta$, по определению 3, получаем, что существует оценка w в $\mathcal{M}_{\mathbf{dS}_{\mathbf{nfl}}}$ такая, что $w(A) \in \{\mathtt{1}, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ (для всякой $A \in \Gamma$) и $w(B) \notin \{\mathtt{1}, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ (для всякой $B \in \Delta$). Зафиксируем оценку w' в $\mathcal{M}_{\mathbf{dS}_{\mathbf{nfl}}}$, при которой $w'(A) \in \{\mathtt{1}, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ (для всякой $A \in \Gamma$) и $w'(B) \notin \{\mathtt{1}, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ (для всякой $B \in \Delta$). Из этого, используя лемму 2, получаем, что существует оценка v в матрице $\mathcal{M}_{\mathbf{S}_{\mathbf{nfl}}}$ такая, что $v(A) \in \{\mathtt{1}, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ (для всякой $A \in \Gamma$) и $v(B) \notin \{\mathtt{1}, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ (для всякой $B \in \Delta$). Но тогда, используя определение 3, мы получаем $\Gamma \nvDash_{\mathbf{S}_{\mathbf{nfl}}} \Delta$, что приводит к противоречию. Пусть $\Gamma \nvDash_{\mathbf{S}_{\mathbf{nfl}}} \Delta$. Из этого, по определению 3, следует, что существует оценка v в матрице $\mathcal{M}_{\mathbf{S}_{\mathbf{nfl}}}$ такая, что $v(A) \in \{\mathtt{1}, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ (для всякой $A \in \Gamma$) и $v(B) \notin \{\mathtt{1}, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ (для всякой $B \in \Delta$). Зафиксируем оценку v' в $\mathcal{M}_{\mathbf{S}_{\mathbf{nfl}}}$, при которой $v'(A) \in \{\mathtt{1}, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ (для всякой $A \in \Gamma$) и $v'(B) \notin \{\mathtt{1}, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ (для всякой $B \in \Delta$). Используя лемму 1, получаем, что существует оценка w в $\mathcal{M}_{\mathbf{dS}_{\mathbf{nfl}}}$ такая, что $w(A) \in \{\mathtt{1}, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ (для всякой $A \in \Gamma$) и $w(B) \notin \{\mathtt{1}, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ (для всякой $B \in \Delta$). Отсюда, используя определение 3, мы получаем $\Gamma \nvDash_{\mathbf{dS}_{\mathbf{nfl}}} \Delta$. Наконец, по контрапозиции получаем желаемый результат. □

Итак, истинность моего тезиса обоснована при помощи теоремы 1 и теоремы 2. Следовательно, **ETL**- и **NFL**-версии логик $\mathbf{S}_{\mathbf{fde}}$ и $\mathbf{dS}_{\mathbf{fde}}$, в сущности, представляют собой одни и те же логики.

Более того, теоремы 1 и 2 вместе с теоремами 4.1, 4.2, 4.3 и 4.4 из (Belikov, Petrukhin 2020) позволяют получить следующие результаты.

Следствие 1. Для всяких $\Gamma \cup \Delta \subseteq \mathbb{F}$ верно, что $\Gamma \vdash_{\mathbf{S}_{\mathbf{etl}}} \Delta \Leftrightarrow \Gamma \vDash_{\mathbf{dS}_{\mathbf{etl}}} \Delta$.

Следствие 2. Для всяких $\Gamma \cup \Delta \subseteq \mathbb{F}$ верно, что $\Gamma \vdash_{\mathbf{S}_{\mathbf{nfl}}} \Delta \Leftrightarrow \Gamma \vDash_{\mathbf{dS}_{\mathbf{nfl}}} \Delta$.

Таким образом, логика $\mathbf{dS}_{\mathbf{etl}}$ адекватно формализуется тем же самым секвенциальным исчислением, что и $\mathbf{S}_{\mathbf{etl}}$. В свою очередь, логика $\mathbf{dS}_{\mathbf{nfl}}$ адекватно формализуется исчислением для $\mathbf{S}_{\mathbf{nfl}}$. (Формулировки упомянутых исчислений см. в работе (Belikov, Petrukhin 2020).)

Кроме того, в силу следствий 2.3 и 2.4 из (Belikov, Petrukhin 2020) для $\mathbf{dS_{etl}}$ и $\mathbf{dS_{nfl}}$ также верен результат о характеризации отношений следования относительно сильной логики Клини $\mathbf{K_3}$ и логики Приста $\mathbf{LP}$.

Следствие 3. Для всяких $\Gamma \cup \Delta \subseteq \mathbb{F}$ верно, что если $var(\Delta) \subseteq var(\Gamma)$ и $\Gamma \models_{\mathbf{K_3}} \Delta$, то $\Gamma \models_{\mathbf{dS_{etl}}} \Delta$.

Следствие 4. Для всяких $\Gamma \cup \Delta \subseteq \mathbb{F}$ верно, что если $var(\Gamma) \subseteq var(\Delta)$ и $\Gamma \models_{\mathbf{LP}} \Delta$, то $\Gamma \models_{\mathbf{dS_{nfl}}} \Delta$.

Может показаться, что эквивалентность указанных логик является негативным признаком, однако это не так. С содержательной точки зрения их эквивалентность означает, что одни и те же логические системы могут быть интерпретированы как в контексте семантики с инфекционной трактовкой истинностно-значных провалов, так и в контексте семантики с инфекционной трактовкой пресыщенных оценок. Подобная семантическая «гибкость», скорее, играет на руку, когда дело касается конкретных приложений, например в области формальных теорий истинности (о приложении инфекционных логик в этом контексте см. (Ré, Pailos, Szmuc 2018), для общего обзора по теме см. (Beal, Glanzberg, Ripley 2018)).

Литература

Anderson, Belnap 1975 — *Anderson A. R., Belnap N. D.* Entailment. The Logic of Relevance and Necessity, Vol. 1. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1975.

Beal, Glanzberg, Ripley 2018 — *Beal J. C., Glanzberg M., Ripley D.* Formal Theories of Truth. Oxford University Press, 2018.

Belikov, Petrukhin 2020 — *Belikov A., Petrukhin Y.* Exactly true and non-falsity logics meeting infectious ones // Journal of Applied Non-Classical Logics. 2020. Vol. 30, no. 2. P. 93–122.

Belnap 1977a — *Belnap N. D.* A useful four-valued logic // Modern Uses of Multiple-Valued Logic / ed. by J. M. Dunn, G. Epstein. Boston: Reidel Publishing Company, 1977. P. 7–37.

Belnap 1977b — *Belnap N. D.* How a computer should think // Contemporary Aspects of Philosophy / ed. by G. Rule. Stocksfield: Oriel Press, 1977. P. 30–56.

Deutsch 1977 — *Deutsch H.* Relevant analytic entailment // The Relevance Logic Newsletter. 1977. Vol. 2, no. 1. P. 26–44.

Deutsch 1979 — *Deutsch H.* The completeness of S // Studia Logica. 1979. Vol. 38, no. 2. P. 137–147.

Kleene 1952 — *Kleene S. C.* Introduction to metamathematics. New York; Toronto: D. Van Nostrand Company, Inc., 1952.

Ferguson 2017 — *Ferguson T. M.* Meaning and proscription in formal logic. Variations on the propositional logic of William T. Parry. Dordrecht: Springer, 2017.

Pirtz, Rivieccio 2013 — *Pietz A., Rivieccio U.* Nothing but the truth // Journal of Philosophical Logic. 2013. Vol. 42, no. 1. P. 125–135.

Priest 1979 — *Priest G.* The logic of paradox // Journal of Philosophical Logic. 1979. No. 8. P. 219–241.

Priest 2019 — *Priest G.* Natural Deduction Systems for Logics in the FDE Family // New Essays on Belnap-Dunn Logic / ed. by H. Omori, H. Wansing. Synthese Library (Studies in Epistemology, Logic, Methodology, and Philosophy of Science), vol. 418. Cham: Springer, 2019. P. 270–292.

Ré, Pailos, Szmuc 2018 — *Ré B. D., Pailos F., Szmuc D.* Theories of truth based on four-valued infectious logics // Logic Journal of IGPL. URL: https://doi.org/10.1093/jigpal/jzy057 (accessed: September 15, 2020).

Shramko 2019 — *Shramko Y.* Dual-Belnap logic and anything but falsehood // Journal of Applied Logics—IfCoLog Journal of Logics and their Applications. 2019. Vol. 6. P. 413–433.

Shramko, Zaitsev, Belikov 2017 — *Shramko Y., Zaitsev D., Belikov A.* First degree entailment and its relatives // Studia Logica. 2017. Vol. 105, no. 6. P. 1291–1317.

Shramko, Zaitsev, Belikov 2019 — *Shramko Y., Zaitsev D., Belikov A.* The FMLA-FMLA Axiomatizations of the exactly true and non-falsity logics and some of their cousins // Journal of Philosophical Logic. 2019. Vol. 48, no. 5. P. 787–808.

Szmuc 2019 — *Szmuc, D. E.* An Epistemic Interpretation of Paraconsistent Weak Kleene Logic // Logic and Logical Philosophy. 2019. Vol. 28, no. 2. P. 277–330.

Szmuc 2016 — *Szmuc D. E.* Defining LFIs and LFUs in extensions of infectious logics // Journal of Applied Non-Classical Logics. 2016. Vol. 26, no. 4. P. 286–314.