А. Л. Петров

Модальные категорические суждения и отношения между ними

1. Введение

1.1. О значении традиционной логики. Актуальность работы

На протяжении последних полутора столетий формальная логика претерпела значительные изменения, основным результатом которых является становление и интенсивная разработка математической (символической) логики. Математическая логика представляет собой применение формальных методов и языка математики к логике и дает возможность изучать содержательное логическое мышление (процессы умозаключения, рассуждения, доказательства) путем его отображения в формальных логических системах, что позволяет весьма эффективно формулировать и решать задачи логического исследования. Для современной логики характерно значительное усложнение используемых в ней математических методов.

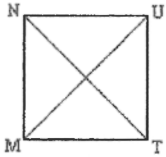
Вместе с тем, видимо, сохранит свое значение и традиционная, «школьная» логика, по-прежнему занимающая почетное место в учебниках. Нельзя не согласиться с тем, что мыслить правильно, последовательно, рассуждать доказательно, опровергать неправильные выводы – то есть уметь логически мыслить – должен каждый человек, особенно в наше время. С задачей логического «всеобуча» наилучшим образом справится традиционная логика, тем более, что в ней уделялось очень большое внимание именно проблеме обучения, и на протяжении многих веков вырабатывались и оттачивались многочисленные дидактические приемы для лучшего усвоения и запоминания трудного учебного материала.

Кроме того, традиционная логика может служить весьма неплохим, с точки зрения дидактики, введением в математическую логику. Эффективное решение задач переосмысления и более адекватного понимания наиболее близких к естественным логическим интуициям фактов традиционной логики, достижимое с помощью аппарата математической логики, самым наглядным образом демонстрирует ее огромные возможности.

В данной работе сделана попытка использовать возможности математической логики применительно к старой проблеме рассмотрения отношений между суждениями, отличающимися по качеству, количеству и модальности (модальными категорическими суждениями). Характерной особенностью разработки этой проблемы в русле традиционной логики является применение логико-мнемонических средств, как нам представляется, весьма полезных для достижения дидактических целей.

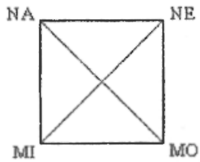
Византийский логик XI века Михаил Пселл изобрел всем известный «логический квадрат» школьной логики – для анализа отношений между суждениями, отличающимися по качеству и количеству (см. п. 2.1).

Англичанин Уильям Шервуд (XIII век) впервые в схоластике применил метод логического квадрата к суждениям, отличающимся по модальности. Квадрат модальностей Шервуда можно изобразить так:



где N означает «необходимо», M – «возможно», U – «невозможно», T – ненеобходимо». Между N и M, и между U и T здесь отношения подчинения; между N и T, и между U и M отношения контрадикторности; между N и U – отношения контрарности; между M и T – отношение субконтрарности.

Метод логического квадрата к суждениям, отличающимся по качеству, количеству и модальности, применял в XIV веке Уильям Оккам. Вот пример одного из квадратов Оккама:



где N означает «необходимо», M – «возможно», буквы A, E, I и O употреблены для обозначения общеутвердительного, общеотрицательного, частноутвердительного и частноотрицательного суждения аристотелевой силлогистики. Между NA и MI, и между NE и MO здесь отношения подчинения; между NA и MO, и между NE и MI отношения контрадикторности; между NA и NE – отношение контрарности; между MI и MO – отношение субконтрарности. Квадраты Оккама не охватывают все возможные комбинации суждений, отличающихся по качеству, количеству и модальности.[1]

Вслед за схоластами будем применять аналогичные мнемонические схемы и мы.

В традиционной логике уже давно решены проблемы анализа отношений между суждениями, отличающимися по качеству и количеству, и между суждениями, отличающимися по качеству и модальности. Таким образом, наша задача рассмотрения отношений между сужде-

[1] Эти и другие примеры мнемонических схем у средневековых логиков см.: *Стяжкин Н.И.* Формирование математической логики. М., 1967.

ниями, отличающимися по качеству, количеству и модальности, может быть в основном сведена к отношениям между суждениями, отличающимися по количеству и модальности.

В современной математической логике вопрос об отношениях между суждениями, отличающимися по количеству и модальности, решается в рамках модальной квантификационной теории – весьма сложной и во многом еще не ясной. В данной работе мы выходим за пределы пропозициональных модальных систем только с помощью силлогистических констант A и I (и определяемых через них E и O), служащих для простейшего различения суждений по количеству. Это связано со стремлением не слишком удаляться от традиционной (школьной) проблематики.

Построение работы обусловлено желанием показать основные этапы, пройденные нами на пути к тем весьма сильным допущениям, которые потребовались для достижения сколько-нибудь сносной экспликации отношений между модальными категорическими суждениями.

1.2. Дедуктивный базис и символика

Аксимагивация предложенной в данной работе модальной системы осуществлена обычным способом, состоящим в последовательном добавлении тех или иных модальных аксиом к какой-либо аксиоматизации классического пропозиционального исчисления (дедуктивному базису).

Мы выбрали дедуктивный базис, в котором неопределяемыми логическими связками являются:

– $\supset$ (материальная импликация) и

– $\sim$ (отрицание).

Пропозициональные переменные обозначаются строчными буквами латинского алфавита: p, q ,...

Другие логические связки вводятся по определению:

– $(p \wedge q) \underset{df}{=} \sim(p \supset \sim q)$ (конъюнкция);

– $(p / q) \underset{df}{=} (p \supset \sim q)$ (антиконъюнкция);

– $(p \vee q) \underset{df}{=} (\sim p \supset q)$ (дизъюнкция);

– $(p \veebar q) \underset{df}{=} (\sim p \supset q) \wedge (p \supset \sim q)$ (строгая дизъюнкция);

– $(p \equiv q) \underset{df}{=} (p \supset q) \wedge (q \supset p)$ (эквивалентность).

Неопределяемым модальным оператором является $\Box$ («необходимо»)

Оператор $\Diamond$ («возможно») вводится по определению:

$$\Diamond p \underset{df}{=} \sim \Box \sim p$$

Четыре типа суждений обозначаем в соответствии с традицией буквами A, E, I и O, указывая только константы, без переменных терминов аристотелевской логики, так как у всех рассматриваемых в данной работе суждений субъекты и предикаты одинаковы:

– А означает «Всякое S есть Р»;

– I означает «Некоторое S есть Р».

Константы Е и О для отрицательных суждений вводятся с помощью определений:

– $E =_{df} \sim I$ означает «Ни одно S не есть Р»;

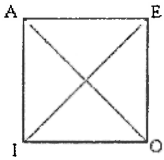
– $O =_{df} \sim A$ означает «Некоторое S не есть Р».

По ходу работы вводятся некоторые дополнительные обозначения и определения. Правила построения формул обычные.

2. Модальный декаэдр

2.1. Отношение между суждениями, отличающимися по качеству и количеству

Неотъемлемой частью любого курса традиционной логики является логический квадрат, известный уже средневековым логикам как мнемоническая схема для легкого запоминания отношений между суждениями, отличающимися по качеству и количеству.



В логическом квадрате имеет место:

– отношение контрадикторности между суждениями типа А и О между Е и I;

– отношение контрарности между А и Е;

– отношение субконтрарности между I и О;

отношение субординарности между А и I и между Е и О.

Известно, что перечисленные отношения не независимы. Так, например, зная отношения между А и О, между Е и I и между А и I, можно определить все остальные отношения логического квадрата.[2]

Известно также, что каждый тип отношения может быть эксплицирован соответствующей истинностной функцией:

– контрадикторность	– строгой дизъюнкцией;
– контрарность	– антиконъюнкцией;
– субконтрарность	– дизъюнкцией;
– субординация	– импликацией[3].

---

[2] Возможны и другие упрощения. См., например, *Мчедлишвили Л.И.* Некоторые понятия традиционной логики с современной точки зрения // Логика, семантика, методология. Тбилиси, 1978. С. 26-28.

[3] Об экспликации интуитивно понимаемых отношений логического квадрата с помощью понятий пропозициональной функции. См.: Tarskia. Logic, Semantics, Metamathematics. Oxf., 1956. P. 409-420.

В таком случае любые суждения p и q находятся в отношении
контрадикторности,
контрарности,
субконтрарности,
субординации
тогда и только тогда, когда формулы
$p \veebar q$,
p / q,
$p \vee q$,
$p \supset q$
соответственно истинны в силу одних логических оснований.

Для дальнейшей работы аналогичным образом введем отсутствующее в логическом квадрате отношение тождественности, эксплицируемое функцией эквивалентности:

суждения p и q находятся в отношении тождественности тогда и только тогда, когда формула $p \equiv q$ истинна в силу одних логических оснований.

Вместо определений для констант E и O (п. 1.2) для удобства будем употреблять следующие два правила вывода:

– возможна замена в формулах A на ~O и наоборот (правило RA);

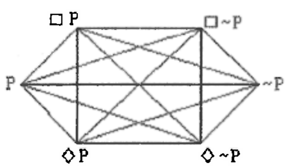
– возможна замена в формулах I на ~E и наоборот (правило RI) .

Приняв за аксиому импликацию $A \supset I$, можем с помощью сформулированных правил и дедуктивного базиса вывести формулы, эксплицирующие все отношения логического квадрата (например, отношение субординации между суждениями E и O):

1) $A \supset I$ – аксиома;
2) $(A \supset I) \supset (\sim I \supset \sim A)$ – закон контрапозиции (ЗК);
3) $\sim I \supset \sim A$ – правило отделения (МП) 1), 2), 3).
$E \supset O$ – RI, RA.

2.2. Отношения между суждениями, отличающимися по качеству и модальности. Модальный шестиугольник

Широко, и издревле, известна и другая мнемоническая схема, так называемый «модальный шестиугольник», изображающий отношения между суждениями, отличающимися по качеству и модальности:



В модальном шестиугольнике имеет место:

– отношение контрадикторности между суждениями □P и ◊~P, P и ~P, □~P и ◊P;

– отношение контрарности между суждениями □P и □~P, P и □~P, □P и ~P;

– отношение субконтрарности между суждениями P и ◊~P, ~P и ◊P, ◊P и ◊~P;

– отношение субординации между суждениями □P и P, P и ◊P, □P и ◊P, □~P и ~P, ~P и ◊~P, □~P и ◊~P.

Как и в логическом квадрате, перечисленные отношения не независимы. Достаточно знать отношения суждений □P и P и суждений ◊P и □~P, чтобы с помощью дедуктивного базиса определить все остальные отношения модального шестиугольника.

Вместо определения оператора ◊ (через оператор □, см. п.1.2) сформулируем правило редукции оператора возможности (R◊):

допускается заменять в формулах ◊P на ~□~P и наоборот.

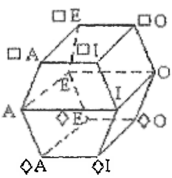
Приняв за аксиому импликацию □P □ P, можем с помощью сформулированного правила и дедуктивного базиса вывести формулы, эксплицирующие все отношения модального шестиугольника, в частности, отношение контрадикторности между □P и ◊~P. Без доказательства формулируем удобное производное правило редукции оператора необходимости (R□):

допускается заменять в формулах □P на ~◊~P и наоборот.

Итак, для рассмотрения отношений между суждениями, отличающимися по качеству и количеству, и по качеству и модальности, имеем весьма удобные (например, в практике преподавания) схемы. Возникает вопрос: нельзя ли построить столь же компактную схему для соединенного рассмотрения качества, количества и модальности суждений?

2.3. Схема отношений между суждениями, отличающимися по качеству, количеству и модальности. Модальный декаэдр

Объединить в одной фигуре логический квадрат и модальный шестиугольник нам помогает такое наблюдение: обе диагонали логического квадрата и диагональ {P; ~P} модального шестиугольника связывают контрадикторные, взаимоотрицающие суждения одной и той же модальности (ассерторической). Эти диагонали послужат общими элементами схемы, которую наиболее компактно можно нарисовать в виде объемной фигуры (будем называть её «модальный декаэдр»).



С помощью известной формулы комбинаторики

$$N = \frac{ab\,(ab - 1)}{Z},$$

где в данном случае: a – количество типов категорических суждений, b – количество модальностей, N – количество отношений, нетрудно подсчитать количество возможных отношений между суждениями, отличающимися по качеству, количеству и модальности (т.е. сторон, диагоналей и др. отрезков, связывающих вершины модального декаэдра).

Подстановка дает:

$$N = \frac{4 \times 3 \times ((4 \times 3) - 1)}{Z} = 66$$

Итак, 66 отношений модального декаэдра.

2.4. Расширенная основная модальная логика

Выпишем формулы, эксплицирующие отношения входящих в наш декаэдр логического квадрата {A; E; I; O}и модальных шестиугольников {E; □E; □I; I; ◊I; ◊E} и {A; □A; □O; O; ◊O; ◊A}. Эти 34 отношения известны нам по определению логического квадрата и модального шестиугольника.

Контрадикторность:

1. A $\underline{\vee}$ O
2. E $\underline{\vee}$ I
3. □E $\underline{\vee}$ ◊I
4. □I $\underline{\vee}$ ◊E
5. □A $\underline{\vee}$ ◊O
6. □O $\underline{\vee}$ ◊A

Контрарность:

7. A / O
8. □A / □O
9. □A / O
10. □O / A
11. □E / □I
12. □E / I
13. □I / E

Субконтрарность :

14. I ∨ O
15. A ∨ ◊O
16. O ∨ ◊A
17. ◊A ∨ ◊O
18. I ∨ ◊E

19. $E \vee \Diamond I$
20. $\Diamond E \vee \Diamond I$

Субординация:
21. $A \supset I$
22. $E \supset O$
23. $\Box A \supset A$
24. $\Box A \supset \Diamond A$
25. $A \supset \Diamond A$
26. $\Box E \supset E$
27. $\Box E \supset \Diamond E$
28. $E \supset \Diamond E$
29. $\Box O \supset O$
30. $\Box O \supset \Diamond O$
31. $\Box I \supset I$
32. $O \supset \Diamond O$
33. $\Box I \supset \Diamond I$
34. $I \supset \Diamond I$

Отметим следующее.

а) С помощью дедуктивного базиса, дополненного аксиомами и правилами, уже приводившимися в п.п.2.1 и 2.2:

$A \supset I$ (аксиома SI),

$\Box P \supset P$ (аксиома MI),

правило RA,

правило RI,

правило R◊,

можем вывести формулы 3-20 и 22-34. Формулы 1 и 2 обосновывают правила RA и RI, а формула 21 сама является аксиомой Нетрудный вывод формул 3-20 и 22-34 предоставим читателю, а в дальнейшем рассмотрении будем ссылаться на них, как на ранее доказанные. В данной аксиоматике можно вывести еще 12 формул, эксплицирующих отношения модального декаэдра, не данные по определениям логического квадрата и модального шестиугольника. Для каждого типа отношения приводим пример доказательства.

Субординация:
35. $\Box A \supset I$

Доказательство:

1) $\Box A \supset A$ – р.д.ф. 23

2) $A \supset I$ – акс. SI,

3) $(\Box A \supset A) \supset ((A \supset I) \supset (\Box A \supset I))$ – закон условного силлогизма (ЗС)

$\Box A \supset I$ – МП[2] 1), 2). 3)

36. $\Box E \supset O$
37. $\Box A \supset \Diamond I$
38. $\Box E \supset \Diamond O$
39. $A \supset \Diamond I$
40. $E \supset \Diamond O$

Контрарность:

41. $\Box A / E$

Доказательство:

1) $\Box A \supset I$ – р.д.ф. 35
2) $\Box A \supset \sim E$ – RI 1)

$\Box A / E$ – df 2)

42. $\Box A / \Box E$
43. $A / \Box E$

Субконтрарность:

44. $\Diamond O \vee I$
45. $\Diamond O \vee \Diamond I$

Доказательство:

1) $\Box A \supset \Diamond I$ – р.д.ф. 37
2) $\sim\Diamond\sim A \supset \Diamond I$ – R$\Box$ 1)
3) $\sim\Diamond O \supset \Diamond I$ – RA 2)

$\Diamond O \vee \Diamond I$ – df 3)

46. $O \vee \Diamond I$

Таков список формул, эксплицирующих 46 отношений модального декаэдра в рамках принятой аксиоматики. Для экспликации все: 66 отношений требуется вводить новые допущения.

б) Формулы 1-46 общеобязательны в любой системе пропозициональной модальной логики, расширенной за счет простейшей (с помощью констант А и I) квалификации суждений типа «S есть P». Таким образом, вышеперечисленные аксиомы и правила вместе с важнейшими следствиями $P \supset \Diamond P$, $\Box P \supset \Diamond P$ и производным правилом R$\Box$ являются, если следовать Я.Лукасевичу[4], «расширенной основной модальной логикой».

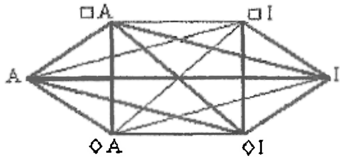
3. Отношения между суждениями, отличающимися по количеству и модальности

3.1. Модальный шестиугольник I

Графической схемой для рассмотрения количества и модальности суждений нам послужит входящий в модальный декаэдр «модальный

[4] См.: *Лукасевич Я.* Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М., 1959. С. 195.

шестиугольник I» {A; □A; □I; I; ◊I; ◊A}. (Назовем его так в отличие от модального шестиугольника, рассмотренного в п. 2.2).



Жирными линиями отмечены отношения расширенной основной модальной логики. Отметим следующие две особенности модального шестиугольника I:

а) Зная отношения между суждениями в модальном шестиугольнике I, можно с помощью дедуктивного базиса и правил получить все отношения модального декаэдра, так что задача соединенного рассмотрения качества, количества и модальности суждений сводится к рассмотрению отношений данного шестиугольника.

б) Суждения, входящие в модальный шестиугольник I, одинаковы по качеству и, следовательно, между ними не могут иметь место те или иные отношения, связанные с отрицанием (т.е. отношения контрарности, субконтрарности и контрадикторности).

Интуитивно неприемлема и имеющая место в расширенной основной модальной логике логическая независимость суждений A и □I, ◊A и □I, ◊A и I, □A и □I, ◊A и ◊I, в чем читателю нетрудно убедиться на примерах с конкретными терминами. Наилучшим образом удовлетворяет нашу логическую интуицию только допущение отношений следования (т.е. субординации в ту или иную сторону, или тождественности) между перечисленными суждениями. Совершенно очевидно, что расширенная основная модальная логика во многом беднее логической интуиции, но положение можно поправить введением в аксиоматику новых допущений.

3.2. Расширенная нормальная модальная логика

Добавим к перечисленным в п. 2.4 аксиомам и правилам вывода аксиому дистрибутивности оператора необходимости относительно импликации:

$$\Box (p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q) \qquad \text{(M2)}$$

и правило введения необходимости:

«если принимается p, то принимается □p» (B□).

Следствия из этих допущений выходят за рамки (расширенной) основной модальной логики и принадлежат уже только к нормальным системам (расширенной) модальной логики, т.е. к системам в той или иной форме включающим правило В$\Box$[5].

Приводим список формул, эксплицирующих те отношения модального декаэдра, которые принадлежат к указанным нормальным системам. Нумерация формул, начатая в п. 2.4, здесь продолжается.

47. $\Box A \supset \Box I$

Доказательство:

1) $A \supset I$	– акс. SI
2) $\Box (A \supset I)$	– В$\Box$ 1)
3) $\Box (A \supset I) \supset (\Box A \supset \Box I)$	– акс. M2
$\Box A \supset \Box I$	– МП 2), 3)

48. $\Diamond A \supset \Diamond I$

Доказательство:

I) $A \supset I$	– акс. S1
2) $\Box (A \supset I) \supset (\sim I \supset \sim A)$	– ЗК
3) $\sim I \supset \sim A$	– МП I), 2)
4) $\Box (\sim I \supset \sim A)$	– В$\Box$ 3)
5) $\Box (\sim I \supset \sim A) \supset (\Box \sim I \supset \Box \sim A)$	– акс. M2
6) $\Box \sim I \supset \Box \sim A$	– МП 4), 5)
7) $(\Box \sim I \supset \Box \sim A) \supset (\sim \Box \sim A \supset \sim \Box \sim I)$	– ЗК
8) $\sim \Box \sim A \supset \sim \Box \sim I$	– МП 6), 7)
$\Diamond A \supset \Diamond I$	– R$\Diamond$ 8)

49. $\Box A \,/\, \Diamond E$

Доказательство:

1) $\Box A \supset \Box I$	– р.д.ф. 47
2) $\Box A \supset \sim \Box \sim I$	– R$\Box$ 1)
3) $\Box A \supset \sim \Diamond E$	– RI 2)
$\Box A \,/\, \Diamond E$	

50. $\Diamond O \,/\, \Box I$

Доказательство:

1) $\Box A \supset \Box I$	– р.д.ф. 47
2) $\sim \Diamond \sim A \supset \Box I$	– R$\Box$ 1)
3) $\sim \Diamond O \supset \Box I$	– RA 2)
$\Diamond O \supset \Box I$	– df 3)

[5] См.: *Крипке С.А.* Семантический анализ модальной логики. I // *Фейс Р.* Модальная логика. М., 1974. С. 255.

51. $\Diamond E \supset \Diamond O$

Доказательство:

1) $\Box A \supset \Box I$	– р.д.ф. 47
2) $(\Box A \supset \Box I) \supset (\sim\Box I \supset \sim\Box A)$	– ЗК
3) $\sim\Box I \supset \sim\Box A$	– МП 1), 2)
4) $\sim\Box\sim E \supset \sim\Box\sim O$	– RI, RA 3)
$\Diamond E \supset \Diamond O$	– R$\Diamond$ 4)

52. $\Diamond A$ / $\Box E$

Доказательство:

1) $\Diamond A \supset \Diamond I$	– р.д.ф. 48
2) $\Diamond A \supset \sim\Box\sim I$	– R$\Diamond$ 1)
3) $\Diamond A \supset \sim\Box E$	– RI 2)
$\Diamond A$ / $\Box E$	– df 3)

53. $\Box O \vee \Diamond I$

Доказательство:

1) $\Diamond A \supset \Diamond I$	– р.д.ф. 48
2) $\sim\Box\sim A \supset \Diamond I$	– R$\Diamond$ 1)
3) $\sim\Box O \supset \Diamond I$	– RA 2)
$\Box O \supset \Diamond I$	– df 3)

54. $\Box E \supset \Box O$

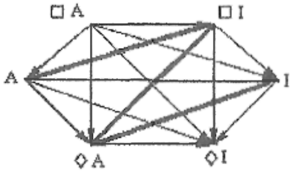
Доказательство:

1) $\Diamond A \supset \Diamond I$	– р.д.ф. 48
2) $(\Diamond A \supset \Diamond I) \supset (\sim\Diamond I \supset \sim\Diamond A)$	– ЗК
3) $\sim\Diamond I \supset \sim\Diamond A$	– МП 1), 2)
4) $\sim\Diamond\sim E \supset \sim\Diamond\sim O$	– RI, RA 3)
$\Box E \supset \Box O$	– R$\Box$ 4)

Отметим, что вместо аксиомы M2 и правила B$\Box$ можно было бы взять в качестве допущений формулы 47 и 48, эксплицирующие отношения модального шестиугольника I. Остальные 12 отношений модального декаэдра не определить без введения новых допущений, постулирующих отношения между суждениями A и $\Box$I, $\Diamond$A и I, $\Diamond$A и $\Box$I.

3.3. Варианты экспликации отношений модального декаэдра в зависимости от силы оператора

Стрелками на схеме модального шестиугольника I отметим направление отношений субординации, эксплицированных в рамках основной и нормальной расширенной модальной логики.



Нетрудно заметить, что каждое отмеченное стрелкой отношение соответствует по крайней мере одному из следующих условий:

- условие М: суждение с более сильной модальностью подчиняет суждение с более слабой модальностью;
- условие Q: общее суждение подчиняет частное.

На диагоналях {А; □I}, {◊А; I}, {◊А; □I} условия М и Q сталкиваются. Так, например, условие М требует, чтобы суждение □I подчиняло суждение А, а условие Q требует обратного, чтобы суждение А подчиняло суждение □I. Если допустить, что возможны различные соотношения силы этих условий (во всяком случае, формальных препятствий сделать такое допущение, кажется, нет) и, следовательно, допустить, что одно из условий может быть сильнее, слабее другого или равно ему по силе, то интересующие нас отношения модального шестиугольника I могут быть эксплицированы соответственно как отношения подчинения в ту или иную сторону, или тождества.

Интуитивно ясно, что одно суждение может быть более или менее необходимо (или возможно), чем другое, или так же необходимо (или возможно), как другое; поэтому сделаем также следующее допущение: при фиксированной силе условия Q сила условия М может быть больше, меньше или равна силе условия Q.

Формулируем следующие два уточнения условия М:

- М□: аподейктическое суждение подчиняет ассерторическое;
- М□: ассерторическое суждение подчиняет проблематическое.

Из М□ и М◊ в силу транзитивности отношения подчинения следует: аподейктическое суждение подчиняет проблематическое. Там, где потребуется, будем обозначать такое условие суммой М□ + М◊. В других случаях, принимая, что сила М□ и равна силе М◊ (то есть, принимая, что оператор ◊ по правилу R◊ определен через оператор □), ограничимся обозначением М□ с цифровым индексом, соответствующим номеру одного из пяти возможных вариантов отношения силы условия М к силе условия Q. Модальные операторы в формулах также будем обозначать цифровым показателем, соответствующим номеру варианта.

Вариант I.

М□(1) сильнее Q. (Следовательно, М□(1) + М◊(1) сильнее Q) .

Принимаем, продолжая начатую в п.2.4 нумерацию формул – с прибавлением соответствующего индекса для каждого варианта:

55.1. $\Box^1 I \supset A$ – допущ.
56.1. $I \supset \Diamond^1 A$ – допущ.
Следствия:
57.1. $\Box^1 I \supset \Diamond^1 A$
Доказательство (цифровые показатели операторов не проставляем):
1) $\Box I \supset A$ – допущ., 55.1
2) $A \supset \Diamond A$ – р.д.ф. 25
3) $(\Box I \supset A) \supset ((A \supset \Diamond A) \supset (\Box I \supset \Diamond A))$ – ЗС
$\Box I \supset \Diamond A$ – $МП^2$ 1), 2), 30

58.1. $\Box^1 I / O$
Доказательство:
1) $\Box I \supset A$ – допущ. 55.1
2) $\Box I \supset \sim O$ – RA 1)
$\Box I / O$ – df 2)

59.1. $\Diamond^1 E \vee A$
Доказательство:
1) $\Box I \supset A$ – допущ. 55.1
2) $\sim\Diamond\sim I \supset A$ – R$\Box$ 1)
3) $\sim\Diamond E \supset A$ – RI 2)
$\Diamond E \vee A$ – df 3)

60.1. $O \supset \Diamond^1 E$
Доказательство:
1) $\Box I \supset A$ – допущ. 55.1
2) $(\Box I \supset A) \supset (\sim A \supset \sim\Box I)$ – ЗК
3) $\sim A \supset \sim\Box I$ – МП 1), 2)
$O \supset \Diamond E$ – RA, R$\Diamond$, RI 3)

61.1. $I / \Box^1 O$
Доказательство:
1) $I \supset \Diamond A$ – допущ. 56.1.
2) $I \supset \sim\Box O$ – R$\Diamond$, RA 1)
$I / \Box O$ – df 2)

62.1. $E \vee \Diamond^1 A$
Доказательство:
1) $I \supset \Diamond A$ – допущ. 56.1
2) $\sim E \supset \Diamond A$ – RI 1)
$E \vee \Diamond A$ – df 2)

63.1. $\Box^1 O \supset E$

Доказательство:

1) $I \supset \Diamond A$ – допущ. 56.1

2) $(I \supset \Diamond A) \supset (\sim\Diamond A \supset \sim I)$ – ЗК

3) $\sim\Diamond A \supset \sim I$ – МП 1), 2)

$\Box O \supset E$ – R$\Box$, RA, RI 3)

64.1. $\Box^1 I / \Box^1 O$

Доказательство:

1) $\Box I \supset \Diamond A$ – р.д.ф. 57.1

2) $\Box I \supset \Box O$ – R$\Diamond$, RA 1)

$\Box I / \Box O$ – df 2)

65.1. $\Diamond^1 O \supset \Diamond^1 A$

Доказательство:

1) $\Box I \supset \Diamond A$ – р.д.ф. 57.1

2) $\sim\Diamond E \supset \Diamond A$ – R$\Box$, RI 1)

$\Diamond E \vee \Diamond A$ – df 2)

66.1. $\Box^1 O \supset \Diamond^1 E$

Доказательство:

1) $\Box I \supset \Diamond A$ – р.д.ф. 57.1

2) $(\Box I \supset \Diamond A) \supset (\sim\Diamond A \supset \sim\Box I)$ – ЗК

3) $\sim\Diamond A \supset \sim\Box I$ – МП 1), 2)

$\Box O \supset \Diamond E$ – R$\Box$, RA, R$\Diamond$ 3)

Вариант 2.

М$\Box$(2) равно по силе Q. (Следовательно, М$\Box$(2) + М$\Diamond$(2) сильнее Q).

Принимаем:

55.2. $\Box^2 I \equiv A$ – допущ.

56.2. $I \equiv \Diamond^2 A$ – допущ.

Следствия:

57.2. $\Box^2 I \supset \Diamond^2 A$

Доказательство:

1) $\Box I \equiv A$ – допущ. 55.2

2) $(\Box I \equiv A) \supset (\Box I \supset A)$ – теорема ассерторического пропозиционального исчисления (АПИ)

3) $\Box I \supset A$ – МП 1), 2)

4) $A \supset \Diamond A$ – р.д.ф. 25

5) $(\Box I \supset A) \supset ((A \supset \Diamond A) \supset (\Box I \supset A))$ – ЗС

$\Box I \supset \Diamond A$ – МП^2 3), 4), 5)

58.2. $\Box^2 I \veebar O$

Доказательство:

1) $\Box I \equiv A$ — допущ. 55.2

2) $\Box I \equiv \sim O$ — RA 1)

3) $(\Box I \equiv \sim O) \supset (\Box I \veebar O)$ — теорема АПИ

$\Box I \veebar O$ — МП 2), 3)

59.2. $\Diamond^2 E \veebar A$

Доказательство:

1) $\Box I \equiv A$ — допущ. 55.2

2) $\sim\Diamond E \equiv A$ — R$\Box$, RI 1)

3) $(\sim\Diamond E \equiv A) \supset (\Diamond E \veebar A)$ — теорема АПИ

$\Diamond E \veebar A$ — МП 2), 3)

60.2. $\Diamond^2 E \equiv O$

Доказательство:

1) $\Box I \equiv A$ — допущ. 55.2

2) $\sim\Diamond E \equiv \sim O$ — R$\Box$, RI, RA 1)

3) $(\sim\Diamond E \equiv \sim O) \supset (\Diamond E \equiv O)$ — теорема АПИ

$\Diamond E \equiv O$ — МП 2), 3)

61.2. $I \veebar \Box^2 O$

Доказательство:

1) $I \equiv \Diamond A$ — допущ. 56.2

2) $I \equiv \sim\Box O$ — R$\Diamond$, RA 1)

3) $(I \equiv \sim\Box O) \supset (I \veebar \Box O)$ — теорема АПИ

$I \veebar \Box O$ — МП 2), 3)

62.2. $E \veebar \Box^2 A$

Доказательство:

1) $I \equiv \Diamond A$ — допущ. 56.2.

2) $\sim E \equiv \Diamond A$ — RI 1)

3) $(\sim E \equiv \Diamond A) \supset (E \veebar \Diamond A)$ — теорема АПИ

$E \veebar \Diamond A$ — МП 2), 3)

63.2. $E \equiv \Box^2 O$

Доказательство:

1) $I \equiv \Diamond A$ — допущ. 56.2.

2) $\sim E \equiv \sim\Box O$ — RI, R$\Diamond$, RA 1)

3) $(\sim E \equiv \sim\Box O) \supset (E \equiv \Box O)$ — теорема АПИ

$E \equiv \Box O$ — МП 2), 3)

64.2. $\Box^2 I \,/\, \Box^2 O$
См. доказательство 65.1.

65.2. $\Diamond^2 E \vee \Diamond^2 A$
См. доказательство 65.1.

66.2. $\Box^2 O \supset \Diamond^2 E$
См. доказательство 66.1.
Простые доказательства в дальнейшем предоставляем читателю.

Вариант 3.
$M\Box(3)$ слабее Q (но $M\Box(3) + M\Diamond(3)$ сильнее Q)
Принимаем:
55.3. $A \supset \Box^3 I$ – допущ.
56.3. $\Diamond^3 A \supset I$ – допущ.
57.3. $\Box^3 I \supset \Diamond^3 A$ – допущ.
Следствия:
58.3. $\Box^3 I \vee O$
59.3. $\Diamond^3 E \,/\, A$
60.3. $\Diamond^3 E \supset O$
61.3. $I \vee \Box^3 O$
62.3. $E \,/\, \Diamond^3 A$
63.3. $E \supset \Box^3 O$
64.3. $\Box^3 I \,/\, \Box^3 O$
65.3. $\Diamond^3 E \vee$
66.3. $\Box^3 O \supset \Diamond^3 E$

Вариант 4.
$M\Box(4) + M\Diamond(4)$ равно по силе Q. (Следовательно $M\Box(4)$ слабее Q).
Принимаем:
55.4. $\Diamond^4 A = \Box^4 I$ – допущ.
Следствия:
56.4. $A \supset \Box^4 I$
Доказывается через транзитивность $A - \Diamond A - \Box I$
57.4. $\Diamond^4 A \supset I$
Доказывается через транзитивность $\Diamond A - \Box I - I$
58.4. $\Box^4 I \vee O$
59.4. $\Diamond^4 E \,/\, A$
60.4. $\Diamond^4 E \supset O$
61.4. $I \vee \Box^4 O$
62.4. $E \,/\, \Diamond^4 A$

63.4. $E \supset \Box^4 O$
64.4. $\Box^4 I \veebar \Box^4 O$
65.4. $\Diamond^4 E \veebar \Diamond^4 A$
66.4. $\Box^4 O \equiv \Diamond^4 E$

Вариант 5.
$M\Box(5) + M\Diamond(5)$ слабее Q. (Следовательно $M\Box(5)$ слабее Q).
Принимаем:
55.5. $\Diamond^5 A \supset \Box^5 I$ – допущ.
Следствия:
56.5. $A \supset \Box^5 I$
57.5. $\Diamond^5 A \supset I$
58.5. $\Box^5 I \vee O$
59.5. $\Diamond^5 E / A$
60.5. $\Diamond^5 E \supset O$
61.5. $I \vee \Box^5 O$
62.5. $E / \Diamond^5 A$
63.5. $E \supset \Box^5 O$
64.5. $\Box^5 I \vee \Box^5 O$
65.5. $\Diamond^5 E / \Diamond^5 A$
66.5. $\Diamond^5 E \supset \Box^5 O$

Можно считать, что в формулах 55.5–66.5 операторы необходимости и возможности уже не работают, так как исключение операторов превращает эти формулы в обычные экспликации отношений логического квадрата. Дальнейшее ослабление условия M ведет к отказу от операторов вообще, так что существует и «вырожденный» вариант 6, когда условие $M\Box(6)$ имеет нулевую силу. В этом случае модальный декаэдр вырождается в логический квадрат.

3.4. Постулаты

I) В предыдущем параграфе были перечислены пять независимых вариантов экспликации отношений модального декаэдра, отличающихся друг от друга принятой в каждом из вариантов силой условия $M\Box$. Вместе с тем, условия $M\Box(1) \div M\Box(5)$ могут быть соотнесены по силе не только с условием Q, но и друг с другом. Так, в первом варианте условие $M\Box(1)$ сильнее условия Q, во втором – условие $M\Box(2)$ равно по силе условию Q, в третьем – условие $M\Box(3)$ слабее условия Q. Ясно, что $M\Box(1)$ сильнее $M\Box(2)$, а $M\Box(2)$ сильнее $M\Box(3)$.

Теперь сравним друг с другом условия $(M\Box(3) + M\Diamond(3)) \div (M\Box(5) + M\Diamond(5))$: $(M\Box(3) + M\Diamond(3))$ сильнее Q, $(M\Box(4) + M\Diamond(4))$ равно по силе Q; $(M\Box(5) + M\Diamond(5))$ слабее Q. Ясно, что $M\Box(3)$ сильнее $M\Box(4)$, а $M\Box(4)$

сильнее M$\Box$(5) (так как принято, что M$\Box$ и M$\Diamond$ с одинаковыми индексами равны по силе). Исходя из того, что условие M$\Box$ определяет силу оператора $\Box$, то есть большую или меньшую степень необходимости модального суждения, переформулируем аксиому MI. $\Box p \supset p$ (п.2.4.) следующим образом:

$$M'1.\ \Box^i p \supset \Box^j p\ (i < j)$$

2) В аксиоме M'1. показатель силы оператора – α (обозначаемый строчными латинскими буквами i и j) может быть целым числом от 1 до 6:

$$M'2.\ 1 \leq \alpha \leq 6$$

Причем сила оператора возрастает с убыванием его показателя.

3) В предыдущем параграфе мы указывали, что в варианте 6 условие M$\Box$ имеет нулевую силу. В этом случае модальное суждение превращается в ассерторическое.

$$Df\ \Box^6. \qquad \Box^6 p \underset{df}{\equiv} p$$

4) Оператор возможности, как и прежде, вводится по определению:

$$Df\ \Diamond^i \qquad \Diamond^i p \underset{df}{\equiv} \sim \Box^i \sim p$$

5) Вместо аксиомы S1. $A \supset I$ (п.2.4) постулируем три эквивалентности, принимавшиеся как допущения 55.2, 56.2, 55.4:

S'1. $A \equiv \Box^2 I$

S'2. $I \equiv \Diamond^2 A$

S'3. $\Diamond^4 A \equiv \Box^4 I$

6) Формулировка правил RA и RI сохраняется.

7) Дедуктивный базис сохраняется.

Приводим некоторые характерные теоремы, следующие из перечисленных постулатов.

а) Теоремы пропозициональной модальной логики:

a1. $\Box^i p \equiv \sim\Diamond^i \sim p$

a2. $\Box^6 p \equiv \Diamond^6 p$

a3. $\Diamond^6 p \equiv p$

a4 $\Box^i p \supset p$

a5. $\Diamond^i p \supset \Diamond^j p\ (i > j)$

a6. $p \supset \Diamond^i p$

a7. $\Box^i p \supset \Diamond^i p$

a8. $\Box^i p \supset \Diamond^j p$

a9. $\sim\Diamond^i p \supset \sim p$

a10. $\sim p \supset \sim\Box^i p$

a11. $\sim\Diamond^i p \supset \sim\Box^j p$ и т.д.

б) Теоремы расширенной модальной логики

б1. $\Box^i A \supset \Box^i I\ (i > 1)$

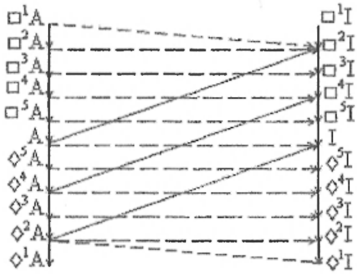
б2. $\Diamond^i A \supset \Diamond^i I\ (i > 1)$

Примечание: формулы не являются теоремами; они будут доказуемы, если дополнить аксиоматику правилом введения необходимости и аксиомой дистрибутивности оператора относительно импликации.

б3. $A \supset I$
б4. $A \equiv \Box^2\Diamond^2 A$
б5. $I \equiv \Diamond^2\Box^2 A$
б6. $A \veebar \Diamond^2 A$
б7. $O \veebar \Box^2 A$
б8. $O \equiv \Diamond^2 E$
б9. $I \veebar \Box^2 O$
б10. $E \veebar \Diamond^2 A$
б11. $E \equiv \Box^2 O$
б12. $E \equiv \Box^2\Diamond^2 E$
б13. $O \equiv \Diamond^2\Box^2 O$
б14. $\Diamond^4 A \veebar \Diamond^4 E$
б15. $\Box^4 O \supset \Box^4 I$
б16. $\Box^4 O \equiv \Diamond^4 E$
б17. $\Box^j I \supset \Diamond^i A$ $\quad (i \leq 2, j \leq 5)$
б18. $I \supset \Diamond^i A$ $\quad (i \leq 2)$ $\quad$ и т.д.

Теоремами также являются формулы. 1–46 расширенной основной модальной логики (показатели силы операторов – любые, меньшие: равные 5), формулы 47-54 расширенной нормальной модальной логики (показатели силы операторов – любые от 2 до 5) и формулы 55.1-66.5 (кроме формул 55.2, 56.2 и 55.4, использованных аксиоматике).

Отношения между разными модальностями утвердительных суждений в нашей аксиоматике можно отобразить на следующей графической схеме.



Обратим внимание на то обстоятельство, что общие суждения $\Diamond^2 A$, $\Diamond^4 A$ и ($\Box^0 A = A$) оказываются эквивалентны частным суждениям ($\Diamond^6 I = I$), $\Box^4 I$ и $\Box^2 I$, модальность каждого из которых на 4 градации сильнее модальности соответствующего общего суждения. Получается, что необходимость у нас как бы усиливает общность, а возможность – ослабляет. Такое понимание дальности, кажется, свободно как от крайности сведения необходимости к общности (и возможности – к особенности), так и от противоположной крайности.

3.5. Набросок расширенной модальной логики с непрерывной шкалой модальности

Такая логика имеет следующие основные особенности по сравнению с данной в предыдущем параграфе:

а) показатель силы оператора не ограничен целыми числами от 1 до 6;

б) оператор «нулевой» силы имеет показатель «О», с возрастанием показателя степень модальности суждения возрастает, а не убывает (степень модальности – как «удаленность» модального суждения от ассерторического);

в) введены отрицательные показатели силы операторов, так что оператор необходимости (возможности) с отрицательным показателем эквивалентен оператору возможности (необходимости) с таким же положительным показателем;

г) вместо постулирования трех отношений тождества на некоторых «отмеченных» точках шкалы силы операторов, формулируется обобщенный постулат для всей шкалы, основанный на предположении (см. заключение предыдущего параграфа) о тесном взаимодействии категории модальности и общности, таком, что частное суждение с более сильным (на определенную – см. ниже – величину) оператором модальности становится тождественным общему суждению с более слабым оператором.

Расширенная модальная логика с непрерывной шкалой модальности получается благодаря таким дополнениям к дедуктивному базису:

1) $\Box^{i}p \supset \Box^{j}p \qquad (i > j)$

2) $\Box^{0}p \underset{df}{=} p$

3) $\Diamond^{i}p \underset{df}{=} \sim\Box^{i}\sim p$

4) $\Diamond^{i}p \underset{df}{=} \Box^{-i}p$

5) $\Box^{i}A = \Box^{i+c}\,I \qquad (c > 0, c = const.)$

6) RA; RI

Пропозициональные теоремы:

$\Box^{i}p \equiv \sim\Diamond^{i}\sim p$

$\Box^{i}p = \Diamond^{-i}p$

$\Box^{i}p = \sim\Box^{-i}\sim p$

$\Diamond^{i}p = \sim\Diamond^{-i}\sim p$

$\Diamond^{0}p = \Box^{0}p$

$\Diamond^0 p \equiv p$

$\Diamond^i p \supset \Diamond^j p$ $\quad (i < j)$

$\Box^i p \supset p$ $\quad (i > 0)$

$\Box^i p \supset \Diamond^i p$ $\quad (i > 0)$

$\Diamond^i p \supset \Box^i p$ $\quad (i < 0)$

$p \supset \Box^i p$ $\quad (i < 0)$

$\sim\Diamond^i p \supset \sim p$ $\quad (i > 0)$

$\sim p \supset \sim\Diamond^i p$ $\quad (i < 0)$

$\sim p \supset \sim\Box^i p$ $\quad (i > 0)$

$\sim\Box^i p \supset \sim p$ $\quad (i < 0)$

Теоремы расширенной модальной логики

$\Box^i A \supset \Box^i I$

$\Diamond^i A \supset \Diamond^i I$

Примечание: интересно, что эти теоремы доказуемы без применения правила введения необходимости и аксиомы дистрибутивности оператора относительно импликации.

$A \equiv \Diamond^{-c}\Box^{-c}A$

$A \equiv \Diamond^{-c}\Diamond^{-c}A$

$A \equiv \Box^c I$

$I \equiv \Diamond^c A$

$A \equiv \Diamond^{-c} I$

$I \equiv \Box^{-c} A$

$A \supset I$

$A \equiv \Box^c\Diamond^c A$

$A \equiv \Box^c\Box^{-c} A$

$I \equiv \Diamond^c\Box^c A$

$I \equiv \Box^{-c}\Box^c I$

$\Box^i I \supset \Box^j A$ $\quad ((i - j) > c)$

$\Diamond^i I \supset \Diamond^j I$ $\quad ((i - j) > c)$

$\Box^i A \equiv \Box^{i+c}\Box^{-c} A$

$\Box^i\Box^c I \equiv \Box^{i+c}\Box^{-c}\Box^c I$ $\quad$ и т.д.

$\Box^i E \equiv \Box^{i+c} O$

$\Box^i A \equiv \sim\Diamond^{i+c} E$

$\Diamond^i O \equiv \sim\Box^{i+c} I$

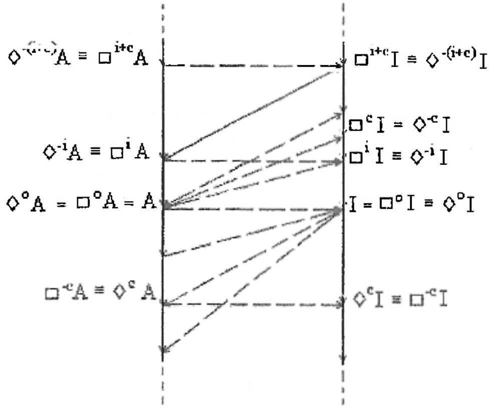
$\Diamond^i O \equiv \Diamond^{i+c} E$

$\Box^i E \equiv \sim\Diamond^{i+c} A$

$\Diamond^i I \equiv \sim\Box^{i+c} O$

$\Diamond^i I \equiv \Diamond^{i+c} A$ $\quad$ и т.д.

Отношения между модальными утвердительными суждениями в принятой аксиоматике можно отобразить на такой схеме:



По схеме видно, что частное суждение оказывается тождественным общему, если его модальный оператор сильнее на величину С; подчиняет общее, если его модальный оператор сильнее на величину, большую С; подчинено общему, если сила его модального оператора не превосходит силы модального оператора, общего суждения на величину, большую или равную С.

Для выяснения смысла константы С, играющей столь важную роль, вернемся к нашим условиям М и Q (см. п. 3.3):

М: суждение с более сильной модальностью подчиняет суждение с более слабой модальностью;

Q: общее суждение подчиняет частное.

Пусть общее суждение А подчиняет частное суждение I с силой С. Тогда, в случае равенства сил условий М и Q (см., например, вариант 2, где постулируется тождество суждений А и □I, ◊A и I), по условию М? суждение с более сильной модальностью (например, □I) подчиняет суждение с более слабой модальностью (например, I) также с силой С. Другими словами, в этом случае $□^{c}$I подчиняет I с такой же силой С, с какой А подчиняет I.