О. М. Мижевич

ДВА СПОСОБА ПРЕОДОЛЕНИЯ ПАРАДОКСОВ В ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ Г. КАНТОРА

1

Внимание к анализу такой абстрактной науки, как математика, всегда усиливалось в переломные моменты ее развития, когда приходилось заново пересматривать представления о природе математического знания в целом, о характере ее абстракций и идеализаций, правильности (истинности) доказательства, роли логики и интуиции в математическом познании.

В конце XIX в. в результате обнаружения парадоксов в канторовской теории множеств начались исследования оснований математики. Все попытки преодолеть эти парадоксы средствами самой теории множеств оказались безуспешными. Поэтому были предложены новые подходы к анализу основных математических понятий и методов. Данная статья посвящена двум наиболее известным программам обоснования математики: одна принадлежит Д. Гильберту, вторая — конструктивистам.

Первым попытался преодолеть кризисное положение в математике Д. Гильберт. Он выразил классическую математику в формальных аксиоматических системах и постарался доказать их противоречивость. С точки зрения формалистов, актуальная бесконечность представляет собой идеальное высказывание, которое приобретает смысл и получает обоснование через содержательные утверждения математической теории. Гильберт опирается исключительно на финитные (конечные) методы рассуждений. Если бы удалось реализовать программу, выдвинутую Гильбертом, то можно было бы сказать, что классическая математика действительно непротиворечива, а парадоксы в ней могут возникнуть в результате неправильного образования понятий и необоснованных умозаключений. Но эти цели оказались недостаточными, что наглядно продемонстрировали К. Гёдель, А. Чёрч, А. Тарский и другие исследователи.

Помимо Д. Гильберта после обнаружения парадоксов в теории множеств с критикой концепции актуальной бесконечности выступили интуиционисты. Далее родственные идеи были развернуты в трудах советской школы конструктивистов в математике, наиболее ярким представителем которой был А. А. Марков.

О необходимости более широкого, философского подхода к исследованиям оснований математики в свое время писали П. Бернайс, Ф. Гонсет, Г. Вейль. Выдвинутая ими концепция диалектической эпистемологии показывает ряд важных моментов в развитии математического познания, демонстрирует необходимость пересмотра и критики существующих математических понятий и теорий. Многие важные вопросы, связанные с данной тематикой, освещались в статьях и книгах А. Д. Александрова, И. М. Виноградова, Б. В. Гнеденко, Ю. Л. Ершова, А. Н. Колмогорова, А. А. Маркова, П. С. Новикова, В. А. Успенского.

2

В среде ученых долго бытовало мнение, что логика и математика суть науки, оперирующие формулами, которые лишены какого-либо содержания. Это представление о логике и математике усилилось после открытия неевклидовой геометрии, в результате чего возникли новый, абстрактный подход к геометрическому пространству, новые математические дисциплины. Оказались выдвинуты новые принципы и пересмотрены старые — с учетом нового способа математического мышления. Еще учеными Древней Греции были поставлены задачи из области элементарной геометрии, каковые они безуспешно пытались решить, а именно: разделить на три части произвольный угол при помощи циркуля и линейки; построить куб, объем которого был бы в два раза больше объема данного куба; построить квадрат, площадь которого равнялась бы площади данного круга. Только в XIX в. было доказано, что решить эти задачи, учитывая их условия, невозможно. Но названные исследования вызвали большой интерес к понятию числа, появилось строгое определение последнего, в результате чего были построены отрицательные, комплексные и иррациональные числа. Возникла совершенно новая область в математике — теория бесконечных множеств и трансфинитных чисел. Одним из самых важных достижений столетия стало решение аксиомы параллельности. Это теорема из школьной программы, суть которой заключается в том, что через точку, лежащую вне данной прямой, можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной прямой. Даже античным математикам указанная теорема не казалась очевидной, они безрезультатно пытались доказать ее как следствие из других, очевидных теорем Евклида. Такое положение дел существовало вплоть до середины XIX в., пока в трудах К. Ф. Гаусса, Я. Бояи, Н. И. Лобачевского не была продемонстрирована невозможность доказательства аксиомы параллельности из остальных аксиом Евклида. Самым удивительным оказался тот факт, что можно доказать как теорему невозможность доказательства некоторых теорем средствами данной теоремы. Таким образом, были подорваны традиционные взгляды на самоочевидность евклидовых теорем. Постепенно пришли к выводу, что предметом исследований чистой математики является вывод теорем из постулированных допущений, а вопрос об истинности аксиом — не ее забота. Стало ясно, что математика — это наука, изучающая получение логических выводов из заданных постулатов и аксиом. Математика оказалась более абстрактной и формальной наукой, чем это было принято считать: более абстрактной — поскольку математические предложения в принципе могут быть истолкованы как утверждения о чем-либо, о чем угодно, но только не как утверждения, относящиеся к какому-либо множеству предметов и их свойствам; более формальной — поскольку правильность математических доказательств гарантируется чисто формальной структурой этих предложений, но не их содержанием.

3

В конце XIX в. распространение формалистической точки зрения на математику было связано с развитием аксиоматического метода и той программой обоснования математики, которую выдвинул Д. Гильберт. Формализация была необходима для доказательства непротиворечивости классической математики. Учитывая средства и методы, которыми пользовался Гильберт, его цель оказалась принципиально невыполнимой, но его программа имела огромное влияние на все последующее развитие оснований математики. Гильберт достаточно долго работал над этой проблемой, построив первоначально аксиоматику геометрии. Поскольку решение проблемы оказалось достаточно успешным, он решил применить аксиоматический метод к теории натуральных чисел. Вот что он писал в связи с этим: «Я преследую важную цель: именно я хотел бы разделаться с вопросами обоснования математики как таковыми, превратив каждое математическое высказывание в строго выводимую формулу»[1].

[1] *Гильберт Д.* Основания математики // Гильберт Д. Основания геометрии. М., 1948. С. 365.

Новая программа обоснования математики, выдвинутая Гильбертом, должна была удовлетворять всем строгим требованиям, которые накладывали интуиционисты на бесконечность. Кроме того, данный проект шел значительно дальше тех мер, кои предлагали сторонники аксиоматического обоснования теории множеств и даже логицисты во главе с Б. Расселом. В отличие от сторонников аксиоматического направления Гильберт не ограничился формализацией содержательной теории Кантора. Гильберт поставил цель доказать непротиворечивость всей классической математики, в том числе и теории множеств. С самого начала было ясно, что такое доказательство не может быть найдено тем же способом, каким была установлена непротиворечивость геометрии Евклида, т. е. путем построения арифметической модели. Гильберт предложил, чтобы фигурирующее в аксиомах плоской геометрии понятие «точка» означало пару действительных чисел, понятие «прямая» — числовое соотношение, выражаемое уравнением первой степени с двумя неизвестными, понятие «окружность» — числовое соотношение, выражаемое квадратным уравнением некоторого специального вида, и т. д.

Таким образом, Гильберт видел проблему в доказательстве непротиворечивости самой арифметики. Исследуя рассуждения или доказательства в математике, он надеялся установить, что они никогда не приведут к противоречию, например в формуле $0 \neq 0$. Для этого надо было формализовать не только математику, но и логику. Программу обоснования математики Гильберт пытался осуществить в два этапа.

На первом этапе предстояло построить аксиоматические системы для конкретных математических теорий и объединить их с формальными системами логики. Обычно этот этап называют формализацией гильбертовского типа. Все входящие в дедуктивную систему выражения рассматриваются как лишенные какого-либо значения, как некое сочетание символов. Способы соединения символов и обращения с составленными из них выражениями предусмотрены специальными правилами. В результате мы получаем систему символов («исчисление»), содержащую только те символы, которые мы доказали. Постулаты и теоремы полностью формализованной системы — «строчки» ничего не означающих знаков, построенные из элементарных символов согласно правилам данной системы. В такой формализованной системе вывод теорем из постулатов представляет собой преобразование одной совокупности «строчек» в другую. Формализация позволяет ясно видеть структуру системы и назначение отдельных ее элементов — аналогично тому, как структура и работа отдельных машин яснее видны на модели, чем на самой машине. Логические соотношения между выражениями выступают очень четко, и мы видим, в каком соответствии находятся символы и строчки, каким способом они связаны между собой, как комбинируются и т. д. «Основная мысль моей теории доказательства такова: все высказывания, которые составляют вместе математику, превращаются в совокупность формул... Некоторые определенные формулы, которые служат фундаментом этого формального построения математики, называются аксиомами. Доказательство есть фигура, которая должна наглядно предстать перед нами... Доказуемые теоремы, т. е. формулы, получающиеся при этом способе, являются отображением мыслей, которые образуют обычную до сих пор математику»[2].

Для формализации математики Гильберт и его школа воспользовались теми аксиоматическими системами, которые были уже известны математикам. Это относится к системе аксиом для арифметики натуральных чисел, построенных Д. Пеано, аксиоматической теории множеств Э. Цермело. Для формализации логики были использованы системы символической логики, созданные Г. Фреге, Э. Шредером, Б. Расселом, А. Уайтхедом.

Второй этап программы Гильберта связан с доказательством непротиворечивости формальных систем математики. Теория, с помощью которой изучаются свойства формализованных математических систем, была названа Гильбертом теорией доказательств. Все осмысленные высказывания о бессмысленной (формализованной) математике сами по себе не принадлежат этой математике, они относятся к области «метаматематики», к языку, на котором говорят о математике. Математические высказывания — это высказывания о символах, входящих в математическую формализованную систему, о видах символов, об их взаимоотношениях внутри самой формальной системы, о способах составления из этих символов формул, о соотношении между формулами, о том, какие формулы могут быть получены в качестве «следствия» из других формул. Например, выражение «2 + 3 = 5» принадлежит математике, а высказывание «2 + 3 = 5 — арифметическая формула» относится к метаматематике. Это высказывание нечто утверждает об этом выражении. Оно не констатирует никакого арифметического факта и не относится к формальному языку арифметики, а

[2] *Гильберт Д.* Указ. соч. С. 366–367.

характеризует строчку, составленную из арифметических символов, как формулу.

Таким образом, предмет математики составляют сами формальные системы, которые создают математики, предмет метаматематики составляет описание этих систем, выяснение и обсуждение их свойств. Недооценка различия между математикой и метаматематикой приводит к недоразумениям, а порой и просто к противоречиям. Гильберт очень ясно уловил суть проблемы и поэтому положил в основу своих усилий по созданию «абсолютной» теории доказательств различие между формальным исчислением и его описанием. Он поставил своей целью создание специального метода, с помощью которого можно было бы проводить такие же убедительные доказательства непротиворечивости, что и доказательства, использующие конечные модели. Этот метод должен был дать исчерпывающий анализ конечного числа структурных свойств, выражений в формализованных исчислениях. Анализ должен исходить из точной фиксации различных видов символов, входящих в эту систему, указания на способы соединения этих символов в формулы, описания способа вывода одних формул из других и отвечать на вопрос, выводимы ли формулы какого-либо одного вида из других формул при помощи определенных заранее сформулированных правил оперирования формулами. Гильберт был убежден в том, что всякое математическое исчисление можно представить в геометрической форме, т. е. в виде такого сочетания формул, где каждая формула связана с другой формулой данного исчисления лишь структурными соотношениями из конечного перечня соотношений. На этом положении основывался расчет Гильберта, что он сумеет посредством систематического и полного обзора структурных свойств выражений системы доказать, что из аксиом данного исчисления нельзя получить противоречащие друг другу формулы. Одним из главных требований Гильберта было разрешение употреблять в доказательствах непротиворечивости только те приемы рассуждений, которые не используют ни бесконечное множество структурных свойств формулы, ни бесконечное множество операций над формулами. Такие методы рассуждения он назвал «финитными», а доказательства непротиворечивости, проведенные финитными средствами, — «абсолютными». «Абсолютное» доказательство достигает своей цели с помощью очень маленького количества принципов вывода и не исходит из непротиворечивости никакой другой системы аксиом. У Гильберта нет исчерпывающего перечисления всех допустимых финитных методов, но это и не было обязательным, так как более полное представление о них получено в процессе исследования формальных систем классической математики.

Более или менее полное представление о финитных методах дает ученик Гильберта Ж. Эрбран. Под финитными рассуждениями он понимает такие рассуждения, которые удовлетворяют следующим условиям:

«— всегда рассматривается лишь конечное и определенное число предметов и функций;

— функции имеют точное определение, и это определение позволяет нам вычислить их значение;

— никогда не утверждается "Этот объект существует", если не известен способ его построения;

— никогда не рассматривается множество всех предметов X какой-либо бесконечной совокупности;

— если известно, что какое-либо рассуждение или теорема верны для всех этих X, то это означает, что это общее рассуждение можно повторить для каждого конкретного X, причем само это общее рассуждение следует рассматривать только как образец для проведения таких конкретных рассуждений»[3].

Характеризуя гильбертовскую программу, Г. Крайзель подчеркивал, что если финитные истины рассматриваются как единственно допустимые и абсолютные, то было бы естественным считать математические выражения, содержащие трансфинитные символы, «идеальными». В этом случае непротиворечивость — единственное, что требуется, если доказательство ведется финитными методами.

По мнению Гильберта, именно метаматематика, опирающаяся на финитные методы рассуждения, служит основанием всей классической математики. Формализация математики и доказательство ее непротиворечивости в гильбертовской программе служат сохранению всего полезного, что содержится в классической математике, в том числе и теории Кантора.

4

Дальнейшее развитие математики продемонстрировало несостоятельность программы Д. Гильберта. Проблема обоснования математики не принадлежит к числу специальных, конкретных математических проблем, к тому же не все математические проблемы разрешимы.

---

[3] См. *Френкель А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств. М., 1969. С. 321.

Кроме того, работа К. Гёделя «О формально неразрешимых предложениях Principia Mathematica и родственных систем», написанная в 1931 г., полностью подорвала программу Гильберта. Что же, собственно, доказал Гёдель? Можно выделить три основных результата:

1. Гёдель показал невозможность математического доказательства непротиворечивости любой системы, достаточно обширной, чтобы включать в себя всю арифметику, доказательства, которое не использовало бы каких-либо иных правил вывода, кроме тех, что имеются в самой данной системе. Такое доказательство, которое использует более мощное правило вывода, может оказаться полезным. Но если эти правила вывода сильнее логических средств арифметического исчисления, то уверенности в непротиворечивости используемых в доказательстве допущений не будет. Во всяком случае, если используемые методы не будут финитистскими, то программа Гильберта окажется невыполнимой. Гёдель как раз и показывает несостоятельность расчетов на нахождение финитистского доказательства непротиворечивости арифметики.

2. Гёдель указал на принципиальную ограниченность возможностей аксиоматического метода: система Principia Mathematica, как и всякая иная система, с помощью которой строится арифметика, существенно неполна, т. е. для любой непротиворечивой системы арифметических аксиом имеются истинные арифметические предложения, которые не выводятся из аксиом этой системы.

3. Теорема Гёделя показывает, что никакое расширение арифметической системы не может сделать ее полной, и даже если мы наполним ее бесконечным множеством аксиом, то в новой системе всегда найдутся истинные, но не выводимые средствами этой системы положения. Аксиоматический подход к арифметике натуральных чисел не в состоянии охватить всю область истинных арифметических суждений, и то, что мы понимаем под процессом математического доказательства, не сводится к использованию аксиоматического метода. После теоремы Гёделя стало бессмысленно рассчитывать, что понятию убедительного математического доказательства можно будет придать раз и навсегда очерченные формы.

5

Следующий решающий удар по исследованиям Гильберта был сделан А. Чёрчем, который доказал отсутствие разрешающей процедуры для узкого исчисления предикатов. С помощью этой процедуры можно было бы в конечное число шагов установить, доказуема или нет любая формула какого-либо исчисления. Это было довольно странно, так как исчисление само по себе просто и обладает полнотой. Проблема разыскания разрешающей процедуры для данного класса проблем и задач называется проблемой разрешения. Можно сказать, что классы задач, которые эффективно решаются в конечное число шагов, обладают разрешающей процедурой. Но это интуитивное понимание эффективности, причем достаточно расплывчатое. Уточнение понятия эффективности было предпринято многими математиками. С точки зрения А. Тьюринга, наиболее близкой к интуитивному пониманию эффективности, она (эффективность) связывается с возможностью построения идеализированной вычислительной машины, которую впоследствии назвали машиной Тьюринга. Эта машина обладает потенциальной памятью, не делает ошибок. Другие уточнения эффективности были предложены А. Чёрчем, С. К. Клини, К. Гёделем, а также А. А. Марковым с помощью понятия нормального алгоритма. Так как понятия программы и алгоритма ближе всего были к интуитивным понятиям эффективной разрешимости и вычислимости, то их и использовали в дальнейшем, несмотря на то что все иные понятия эквивалентны.

Учитывая все это, Чёрч выдвинул гипотезу, согласно которой каждая интуитивно вычислимая функция является частично рекурсивной. Эта гипотеза впоследствии получила название тезиса Чёрча. Вышеуказанный тезис, как и тезис Тьюринга, не может быть математически строго доказан, так как он отождествляет неопределенное математическое понятие интуитивной вычислимости с математически точно определенным понятием частичной рекурсивности. Практически все используемые в теории чисел функции являются частично рекурсивными. Но легко доказать и то, что существуют функции, которые не являются таковыми. Следовательно (согласно тезису Чёрча), для этих функций невозможно построить эффективную процедуру вычисления. Доказательство неразрешимости узкого исчисления предикатов относится к логике, хотя сам Чёрч надеялся, что такие доказательства будут обнаружены и в математике. И действительно, доказательства неразрешимости математических проблем определенного вида стали появляться примерно с 1947 г., когда А. А. Марков и Э. Пост доказали неразрешимость «проблемы тождества» для полугрупп. В 1955 г. П. С. Новиков доказал неразрешимость «проблемы тождества» для групп.

Помимо вышеперечисленных теорем в 30-е годы XX в. А. Тарским была доказана еще одна ограничительная теорема, которая опирается на понятие семантической определимости. Эта теорема устанавливает, что если формальная теория, удовлетворяющая некоторым условиям, непротиворечива, то диагональная функция и множество всех истинных предложений теории не могут быть определимы в этой теории. В качестве частного случая можно доказать, что множество всех истинных предложений непротиворечивой формализованной системы, содержащей рекурсивную арифметику, неопределимо в этой системе. Исследования Тарского и его школы — это обобщение результатов Гёделя, несмотря на то что теорема Гёделя о неполноте показывает ограниченность дедуктивных возможностей любой достаточно богатой формальной системы, а теорема Тарского вскрывает ограниченность выразительных возможностей таких систем.

6

Какое же влияние оказали результаты исследований К. Гёделя, А. Чёрча, А. Тарского и других ученых на гильбертовскую программу обоснования математики?

Как мы помним, в целях обоснования математики Гильберт поставил перед собой две задачи. Первая задача — это доказательство непротиворечивости формализованной математики. Вторая связана с проблемой разрешения построенной формальной системы, т. е. обнаружения эффективных методов (алгоритмов), с помощью которых можно было бы в конечное число шагов доказать любую проблему либо установить ее неразрешимость. И хотя эти задачи оказались неосуществимы, программа Гильберта в значительной мере способствовала не только специальным исследованиям в области обоснования математики, но и разработке новой концепции предмета самой математики. Такое положение было развито и обосновано школой Н. Бурбаки, рассматривающей математику как науку об абстрактных структурах.

В первоначальной программе Гильберта для доказательства непротиворечивости формальных систем математики разрешалось использовать только финитные методы рассуждений, которые у самого Гильберта приблизительно совпадают с теми, что применяются при доказательстве реальных утверждений элементарной арифметики. Поскольку такой подход не оправдал себя из-за нереального требования финитности, можно попытаться использовать в математике более или менее нефинитные методы рассуждений. Это первый и основной путь дальнейшего развития идей Гильберта. Второй путь обусловлен установлением неразрешимости проблем для большинства формализованных систем математики. Отсутствие такого алгоритма четко указывает, что невозможность решения общей проблемы разрешения вовсе не исключает возможность его решения для какого-либо частного случая. Но поскольку наибольшее значение для обоснования математики имеют общие теории, развитие идей Гильберта должно осуществляться главным образом по первому пути. Такой выход из трудностей гильбертовской программы, возникших после открытий К. Геделя, А. Чёрча, А. Тарского, видели его ученики: Г. Генцен и П. Бернайс.

7

Дальнейшее развитие философии математики и анализ вопросов, связанных с обоснованием математики, принадлежат конструктивизму. Отличие конструктивного направления от теоретико-множественного состоит в отказе от абстракции актуальной бесконечности. Конструктивисты считают, что эта абстракция представляет собой слишком большое допущение, ибо рассматривает бесконечные множества как конечные, как некую совокупность, заданную со всеми своими элементами. Конструктивисты предлагают рассматривать бесконечность становящуюся, возникающую в процессе построения, т. е. потенциальную бесконечность.

Первыми, кто выступил с критикой концепции актуальной бесконечности, были интуиционисты. Их взгляды оказались поддержаны и в дальнейшем развиты в трудах конструктивистов, в частности, советской школы конструктивного направления (А. А. Марков, Н. А. Шанин и др.). По мнению А. А. Маркова, для конструктивного обоснования математики достаточно ограничиться абстракцией потенциальной осуществимости. «Она состоит в отвлечении от практических границ наших возможностей в пространстве, времени и материале, при осуществлении слов. То есть мы можем написать на доске сколь угодно длинное слово, но мы отвлекаемся от этой практической невозможности и говорим, что это возможно»[4].

Как более элементарные абстракция потенциальной осуществимости и возникающая на ее основе абстракция потенциальной бесконечности представляют лишь исходную основу для осуществления

---

[4] *Марков А. А.* Конструктивные направления в математике // Труды Математического ин-та им. В. А. Стеклова. 1962. Т. 67. С. 5.

программы конструктивного обоснования математики. Что касается идеи потенциальной бесконечности, то, согласно А. А. Маркову, она «опирается на абстракцию потенциальной осуществимости, но не совпадает с ней»[5]. Марков считал, что потенциальная бесконечность означает обязательный рост какого-либо количества. «В то время как абстракция потенциальной осуществимости разрешает нам рассуждать о сколь угодно больших натуральных числах и других конструктивных объектах, идея потенциальной бесконечности требует устремления в бесконечность в том смысле, что рассматриваемое нами изменяющееся количество должно в конце концов делаться большим любого наперед заданного натурального числа»[6].

Конструктивный подход к построению и обоснованию математики, так же как и теоретико-множественный, характеризуется в первую очередь специфическим пониманием природы математических объектов, исходными абстракциями и идеализациями, а также принципами той логики, которая используется для выведения одних утверждений из других. Хотя многие основополагающие идеи конструктивизма возникли в эпоху Античности, само конструктивное направление появилось лишь в 1930-е годы. Принято считать, что названная математика начинается с Л. Кронекера. Это достаточно спорное положение, так как, критикуя актуальную бесконечность, Кронекер, по сути дела, пытался дать обоснование математическому анализу с помощью ряда натуральных чисел, а также идеи потенциальной бесконечности. Но в то же время парадоксы теории множеств были неизвестны, и она, эта теория, успешно применялась. Только после критики теоретико-множественной математики в диссертации Л. Э. Я. Брауэра 1907 г. появилась возможность говорить о новом обосновании математики, получившем название интуиционизма. Некоторые фундаментальные идеи интуиционистов предопределили основные черты конструктивного направления математики.

Так как конструктивная математика имеет дело только со специфическими конструктивными объектами и процессами, необходимо рассмотреть характеристики объектов ее исследования. Понятие конструктивного объекта является основным в конструктивной математике и потому не поддается описанию с помощью других, более элементарных понятий: обычно ограничиваются примером или каким-либо разъяснением. Понятие конструктивного объекта рассматривается как

---

[5] *Марков А. А.* О логике конструктивной математики. М., 1972. С. 40.

[6] Там же.

интуитивно известное из практики обращения с последним в математике. Возможно, что само представление о конструктивных объектах и процессах в математике появляется по аналогии с процессами построения предметов в реальном мире. Конструктивные операции осуществляются над определенными знаковыми комплексами. Для этого необходимо иметь элементарные конструктивные объекты, позволяющие образовывать новые конструктивные объекты. «Конструктивные объекты, — писал Н. А. Шанин, — это некоторые фигуры, определенным образом составленные из элементарных конструктивных объектов»[7]. В роли элементарных конструктивных объектов могут выступать буквы в каком-либо заданном алфавите, причем под буквой могут пониматься не только обычные буквы реально существующего алфавита, но и любые иные символы. Это могут быть вертикальные черточки, буквы греческого, латинского алфавита. Такие буквы представляют собой элементарные знаки, т. е. конкретный объект, не имеющий частей. Над конструктивными элементарными объектами можно производить определенные операции, в результате которых получаются более сложные конструктивные объекты. Правила оперирования этими объектами могут быть весьма разнообразными, но они все должны удовлетворять требованию конструктивности (эффективности), т. е. в результате применения таких операций к конструктивным объектам должны быть получены также конструктивные объекты.

Самый простой способ получения конструктивных объектов — построение слов из букв заданного алфавита. Словом мы называем линейную последовательность элементарных знаков или просто знаковый комплекс. В теории алгоритмов словом является ряд записанных друг за другом букв в заданном алфавите. Натуральные числа могут быть представлены как слова в однобуквенном алфавите. Добавив к этому алфавиту горизонтальную наклонную черту, мы можем рассматривать рациональные числа как слова в трехбуквенном алфавите.

К конструктивным объектам относятся также полиномы с рациональными коэффициентами, матрицы, разнообразные таблицы и схемы. Нет смысла давать точное определение конструктивному объекту, потому что конструктивные объекты можно закодировать каким-либо словом. В конце концов конструктивные объекты сводятся к натуральным числам.

---

[7] *Шанин Н. А.* Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства // Труды Математического ин-та им. В. А. Стеклова. 1962. Т. 67. С. 28.

Операции над конструктивными объектами также являются первичными, неопределенными понятиями. Их содержание меняется от проблемы к проблеме, но в каждом случае такие операции должны обеспечить только построение конструктивных объектов.

Многократное применение тех или иных конструктивных операций, приводящих к построению отдельных конструктивных объектов, носит название конструктивного процесса. Поскольку конструктивный процесс осуществляется с конструктивными объектами по точно заданной схеме, вполне естественно, что он приводит к появлению закономерно возникающих последовательностей конструктивных объектов. Но интуиционисты говорят о свободно становящихся последовательностях. Впрочем, надо отметить, что, когда Брауэр выдвинул эту идею, не существовало понятия общерекурсивной функции и нельзя было произвольную закономерность выразить на языке общерекурсивных функций. Однако даже если мы примем известный тезис Чёрча и отождествим общерекурсивные функции с произвольными алгоритмами, такая интерпретация все равно некорректна.

Советские конструктивисты считают, что «свободно становящиеся последовательности, не являющиеся конструктивными объектами, нельзя рассматривать, не привлекая абстракцию актуальной бесконечности. И в этом их главное отличие от интуиционистов»[8].

8

Конструктивная математика широко использует идеализации и различного типа абстракции. Конструктивные объекты, хотя и выглядят как физически конкретные вещи (черточки, печатные буквы, слова), — по сути дела, абстрактные объекты конкретного вида. Сама конструктивная математика может быть охарактеризована как абстрактная, умозрительная наука о конструктивных процессах.

Самые элементарные абстракции, необходимые для оперирования конструктивными объектами, — абстракции отождествления. Рассматривая знаки, буквы, слова, мы отождествляем одинаковые объекты, несмотря на их различие. Отвлекаясь от незначительных различий между одинаковыми конструктивными объектами, мы можем образовать понятие абстрактного конструктивного объекта с помощью отождествления объектов, связанных отношением равенства. Благодаря

---

[8] *Марков А. А.* О логике конструктивной математики. С. 45.

этой абстракции мы можем говорить о двух одинаковых буквах как об одной абстрактной букве и т. д.

Второй тип абстракции — абстракция потенциальной осуществимости, которая связана с нашими возможностями осуществления объекта. Благодаря указанной абстракции мы можем не считаться с такими препятствиями, как пространство, время, материал. «Абстракция потенциальной осуществимости позволяет нам рассуждать о сколь угодно длинных конструктивных процессах и сколь угодно длинных конструктивных объектах. Их осуществимость потенциальна: они были бы осуществимы практически, располагай мы достаточным пространством, временем и материалом»[9]. С помощью этой абстракции в математику вводится понимание бесконечности в потенциальной форме. Таким образом, если мы припишем букву к слову, получится то же слово в том же алфавите.

9

Главное отличие конструктивной логики от классической состоит в совершенно иной интерпретации утверждений о математическом существовании. Так как в конструктивной логике существование объекта означает потенциальную осуществимость его построения, все доказательства и определения считаются обоснованными только в том случае, если имеется хотя бы один потенциальный способ построения доказываемого объекта, что требует иного обращения с логическими связками и кванторами.

Общие высказывания и, следовательно, квантор всеобщности можно рассматривать как утверждение, что любой конструктивный объект данного типа удовлетворяет некоторому требованию. Если обозначим названный объект через x, а условие, которому он должен удовлетворять, через P, то общее высказывание в конструктивной логике имеет вид $\forall(x)\mathrm{P}(x)$. Квантор всеобщности и соответствующее ему высказывание интерпретируются очень просто, если есть список конструктивных объектов определенного типа. Тогда общее высказывание можно представить как многочисленную конъюнкцию, где каждый член — конструктивный объект данного типа. Намного труднее становится тогда, когда подобный список нельзя задать по практическим и теоретическим соображениям. А. А. Марков считает, что эта проблема будет успешно решена, если мы обратимся к рассуждениям по аналогии или индукции. «Для некоторых объектов рассматривае-

[9] Там же. С. 7.

мого вида может быть установлено путем надежных рассуждений, что эти объекты удовлетворяют поставленному требованию. Эти рассуждения могут иметь такой характер, что будет ясна возможность провести аналогичные рассуждения для любого другого объекта рассматриваемого вида. Тогда у нас сложится убеждение в том, что, какой бы нам ни был предъявлен объект, мы сумеем доказать, сделать очевидным путем рассуждений, что этот объект удовлетворяет предъявленному требованию»[10].

Интерпретация логических связей в новой логике должна также соответствовать целям построения конструктивной математики. В классической логике отрицание высказывания означает высказывание, прямо противоположное данному высказыванию. Если данное высказывание истинно, то его отрицание ложно, и наоборот. Но в конструктивной логике утверждение означает возможность построения данного объекта, следовательно, можно сказать, что отрицание говорит о невозможности построения объекта. Марков считал, что подобное понимание отрицания некорректно, и предложил позаботиться о надлежащем, положительном понимании отрицания.

Марков рассматривает три основных вида отрицания в конструктивной логике:

1. Когда к высказыванию *A* удается подобрать не совместимое с ним высказывание *B*, причем такое, что верно выражение $A \vee B$. В таком случае все высказывания *B*, не совместимые с *A*, будут называться прямым отрицанием *A*. Что касается высказывания *A*, то про него говорится, что оно разрешимо, так как имеется способ доказать его истинность.

2. Но если эта проблема неразрешима, то для положительного ответа на вопрос, что истинно — *A* или *B*, у нас нет оснований. В качестве примера Марков рассматривает следующую нерешенную проблему из теории чисел: «существует ~N, такое, что ~N нечетно и ~N совершенно, где N — связанная предикатная переменная. Построим отрицание этого высказывания: при всяком ~N ~N четно и ~N несовершенно. Так как первое высказывание является неразрешенной проблемой, то мы не можем говорить об истинности дизъюнкции этих выражений»[11].

Таким образом, если первое высказывание полуразрешимо, то второе есть усиленное отрицание первого. Вопрос о верности выраже-

[10] Там же. С. 14.
[11] Там же. С. 18.

ния $A \vee B$ сводится к правомерности применения принципа исключенного третьего для полуразрешимого высказывания A и его усиленного отрицания B. Если дизъюнкция верна, то B — прямое отрицание A, так как A и B несовместимы. Но если A — нерешенная проблема, то проблемой становится и установление истинности $A \vee B$, следовательно, нет никаких оснований для положительного ответа на вопрос.

3. Третий тип отрицания — редукционное отрицание, связанное с возможностью приведения к высказыванию, ложность которого очевидна.

Импликация в конструктивной математике интерпретируется в соответствии с типом отрицания ее посылки. В классической математической логике импликация — то же самое, что дизъюнкция, первый член которой представляет отрицание посылки импликации, а второй — ее заключение (консеквент). В конструктивной математике можно выделить следующие виды импликаций:

1. Материальная импликация: импликация рассматривается как дизъюнкция, где первый член — прямое отрицание посылки импликации, а второй — ее заключение.

2. Усиленная импликация (импликация с полуразрешенной посылкой): в этом случае импликация рассматривается как дизъюнкция, первый член которой — усиленное отрицание посылки импликации, а второй — ее заключение.

3. Дедуктивная импликация: импликация рассматривается как выводимость заключения из посылок.

Как можно увидеть из всего вышесказанного, в конструктивной математической логике интерпретируются не только высказывания, но и операции над ними. То же самое относится и к интуиционистской логике, построенной А. Гейтингом. Она помогла лучше понять идею Брауэра, предложившего построить математический анализ на основе понятия потенциальной бесконечности. Он считал, что можно в этих целях использовать свободно становящиеся последовательности, которые все же не являются конструктивными процессами.

10

Какие же принципы конструктивизма используются для обоснования математического анализа? Главная цель здесь — поиск таких исходных понятий и посылок, которые были бы более ясными по сравнению с теоретико-множественными принципами. Естественно, что при этом основными выступают вычислительные и конструктивные возможности анализа, т. е. объекты анализа должны быть конструктивными или вычислительными функциями. Существует несколько подходов при построении конструктивного анализа:

1. Английский математик Р. Л. Гудстейн построил свой рекурсивный анализ на сравнительно-логической основе исчисления равенств.

2. Американский математик Э. Бишоп создал систему анализа, которая занимает промежуточное положение между интуиционизмом и алгоритмическим подходом. Он исходил из того положения, что любое утверждение анализа должно выражать некоторый факт, относящийся к вычислениям с натуральными числами.

3. Наиболее признан подход, основывающийся на точном понятии алгоритма. В качестве конструктивного объекта здесь выступают слова какого-либо алфавита. С помощью слов легко можно записать все первичные понятия математического анализа: натуральные числа — как слова буквенного алфавита, рациональные — четырехбуквенного. Немного сложнее с представлением действительного числа. В классическом математическом анализе оно рассматривается как сечение в актуально бесконечном множестве рациональных чисел (Ю. В. Р. Дедекинд), как бесконечная десятичная дробь (К. Т. В. Вейерштрасс) или как фундаментальная последовательность рациональных чисел, удовлетворяющих критерию Коши.

Чтобы дать определение действительному числу с точки зрения конструктивизма, можно использовать определение Кантора, правда, несколько его изменив. В этом случае необходимо:

— чтобы последовательность рациональных чисел была задана с помощью алгоритма;

— чтобы существование натурального числа N, зависящего от ε, рассматривалось с точки зрения потенциальной возможности его построения. А это предполагает наличие алгоритма, который по данному ε строит N.

«Короче говоря, — пишет А. А. Марков, — конструктивное действительное число может быть определено как запись нормального алгоритма, перерабатывающего натуральные числа в члены фундаментальной последовательности рациональных чисел, сходящихся достаточно быстро»[12].

---

[12] *Марков А. А.* О конструктивной математике // Труды Математического ин-та им. В. А. Стеклова. 1962. Т. 67. С. 12.

Еще одно важное понятие конструктивного анализа — это конструктивные функции. Если мы ограничимся конструктивными действительными переменными, то конструктивной функцией от таких переменных будет называться натуральный алгоритм в соответствующем алфавите, когда соблюдено следующее условие: алгоритм F применим к числу x и $x = y$, причем $F(x)$ и $F(y)$ суть равные конструктивные действительные числа. Так же определяются и другие понятия конструктивного анализа. Можно сказать, что всюду, где в традиционном анализе идет речь о числах и их последовательностях, в конструктивном анализе говорят об алгоритмах, перерабатывающих соответствующие числа. Поэтому очень часто этот подход называют алгоритмическим.

11

Сравнивая конструктивный анализ с классическим, можно прийти к выводу, что наиболее важные особенности связаны с теоремами существования общего характера. Ведь конструктивная математика связывает существование с фактическим и потенциальным построением объекта, существование которого утверждается. Что касается классической математики, то она доказывает такое существование, опираясь на чисто логические критерии, используя закон исключенного третьего. Но когда речь заходит о конкретных задачах, в которые включаются вычисление или построение объекта, результаты конструктивного анализа совпадают с известными результатами классического анализа, а если и отличаются, то незначительными деталями.

Возникает вопрос: почему конструктивный подход считается более надежным, чем теоретико-множественный метод в его первоначальной, аксиоматической форме? Чтобы ответить на этот вопрос, надо вспомнить, что исходное понятие конструктивистов, а именно абстракция потенциальной бесконечности, меньше идеализирует способы образования математических объектов и их последовательностей. Бесконечность перестает быть конечной совокупностью, она рассматривается как процесс порождения все новых и новых объектов из первоначально заданных. На смену неподвижному бытию теоретико-множественной математики выдвигается идея становления. Конструктивная точка зрения обращает внимание на потенциальный, становящийся характер бесконечности, возникающей благодаря неограниченной возможности построения все новых и новых математических объектов. Именно отношение конструктивной математики к бескоцечности есть тот барьер, который отделяет конструктивизм от концепции актуальной бесконечности (в ее платоновском понимании) и от номинализма и финитизма, допускающих существование только индивидуальных, конкретных объектов и конечных множеств.

12

Какие преимущества дает такой подход для обоснования математики? Актуальная бесконечность и связанные с ней неконструктивные доказательства существования порождают споры в силу их интуитивной неочевидиости. Наличие бесконечности, имеющей первоначально все элементы, допускающей неограниченное количество всевозможных бесконечностей, вызывает бурные дискуссии. Конструктивисты чаще всего рассматривают чистые теории существования и неконструктивные доказательства как эвристические указания на необходимость дальнейших исследований.

Аксиоматический подход к теории множеств также не решает проблем, связанных с этой теорией: они остаются за рамками аксиоматических систем, хотя известные парадоксы теории множеств здесь не возникают в силу самой структуры аксиоматической системы. И все же говорить об усиленном использовании аксиоматического подхода нельзя, так как остается недоказанной непротиворечивость этих систем. Надеяться на получение такого доказательства с помощью известных в настоящее время методов довольно трудно. Следовательно, необходимо было найти новые, более убедительные принципы и методы обоснования математики. Поэтому математики обратились к идеям и принципам тех теорий, которые возникли в 30-е годы, и так как они все эквивалентны, можно ограничиться рассмотрением теории алгоритмов.

В самом понятии теории алгоритмов отображаются такие стороны математической деятельности, которые всегда считались наиболее убедительными и надежными. Точность алгоритмов, выражающаяся в наличии ясного предписания о том, какие операции следует произвести над исходными объектами, и их результативность способствовали не только решению проблем практического характера, но и обоснованию математики. Надо отметить, что в математике алгоритмические проблемы существовали всегда. Все задачи, решаемые с помощью точного предписания, относятся к алгоритмическим. С этой точки зрения догреческую математику можно рассматривать как алгоритмическую, правда, здесь алгоритмы имели дело не столько с теоретическими, сколько с полуэмпирическими объектами. С появлением математики как теоретической науки алгоритмические операции стали осуществляться только над теоретическими объектами. Отличие алгоритмических операций от других типов мыслительной деятельности заключается в том, что эти операции над абстрактными математическими объектами выступают в форме действий с символами, формулами и другими знаковыми комплексами, являющимися конструктивными объектами.

В алгоритмических операциях действия над абстрактными объектами совершаются в виде последовательности преобразований, осуществляемых над знаками: отсюда появляется возможность не только проследить весь ход преобразований, но и проверить их результаты. Возможность чувственно-наглядной проверки алгоритмических процессов и основанного на них конструктивного мышления заставляет ученых обращаться к ним для обоснования математики. В качестве логического аппарата привлекается дедукция, но эта дедукция имеет дело с конкретными объектами, поэтому приходится обращаться к конструктивной логике.