Я. Я. Голота

О ФОРМАЛИЗАЦИИ ВЕРОЯТНОСТНОЙ ЛОГИКИ (ЛОГИКИ ЭКСПЕРТНОГО ОЦЕНИВАНИЯ)

В работе предлагается формальный аппарат, позволяющий вычислять степень субъективной вероятности сложных событий при условии, что известны субъективные вероятности элементарных событий. Представленным здесь формализмом можно воспользоваться и в случае, когда вероятности элементарных событий вычислены средствами теории вероятностей. Пункты 1–4 носят вводный характер. Текст написан таким образом, что тот, кто интересуется самим формализмом, может начать чтение с пункта 5. В пункте 4 излагается полуинтуитивные соображения, подводящие к выбору аксиом формальной системы. Это своего рода обоснование нижеприведенной аксиоматики.

При экспертном (значит, субъективном) оценивании, в частности при принятии решений одним лицом, приходится иметь дело с событиями, зависящими от ряда параметров. По мнению психологов, успешно справиться с задачей при выборе наилучшего варианта человек может, если необходимо учитывать одновременно не более примерно семи параметров. Предлагаемый формализм может быть полезен при рассмотрении сколь угодно сложных событий. В силу этого его можно воспринимать как логику экспертного оценивания.

1. Сложились два подхода к понятию «вероятность». В формулировке А. Н. Колмогорова, «вероятность — числовая характеристика степени возможности появления какого-либо определенного события в тех или иных определенных, могущих повторяться неограниченное число раз условиях». Это — определение «математической вероятности». Она объективно, независимо от исследователя, количественно характеризует события. Именно в таком понимании «вероятность» является предметом изучения в теории вероятностей.

Согласно же второму подходу, «вероятность» — мера субъективной уверенности познающего субъекта. Второй подход не связан непосредственно с массовостью, со статистикой. Он отражает отношение исследователя к отдельным, обособленным, единичным событиям. Вероятность во втором понимании рассматривается в вероятностной логике. Ее выделение из теории вероятностей наметилось с середины XIX в. Тогда начал осознаваться предмет теории вероятностей — массовые случайные события.

Приведенные понятия значительно отличаются друг от друга. Однако всякий раз, когда нужно количественно оценить вероятность как меру субъективной уверенности, прибегают к аппарату теории вероятностей. На взгляд автора данной работы, правомерность этого шага сомнительна, как и попытка рассматривать учение о вероятностях в качестве единой науки, ветвями которой являются теория вероятностей и вероятностная логика. Работы, в которых признается единство формального аппарата для двух несовместимых понятий, оставляют открытым вопрос: не являются ли они попыткой оправдать применение теории вероятностей ввиду отсутствия более подходящего формального аппарата?

Вероятность чего может быть предметом вероятностной логики? В ней может рассматриваться вероятность как свойство отдельного высказывания. В этом случае вероятность приписывается высказыванию в качестве промежуточного значения между истиной и ложью. Если истинному высказыванию поставить в соответствие 1, а ложному — 0, то вследствие этого предметом вероятностной логики будут высказывания, истинностные значения которых находятся между 1 и 0. Таким образом, вероятностная логика — непрерывнозначная логика с истинностными значениями из отрезка [0, 1]. Если считать, что высказывания могут быть только либо истинными, либо ложными, но не могут иметь истинностные значения из какого-либо промежутка, то в таком случае приемлем подход, согласно которому вероятность выражает отношение субъекта к событию. Во втором случае, как и в теории вероятностей, предметом рассмотрения являются события, но не массовые события, изучаемые в теории вероятностей, а единичные, и оценки не объективные, а субъективные. Представляется, если разделять взгляд, согласно которому логика может быть не только двузначной, не только дискретной, но и непрерывнозначной, то теряет остроту вопрос о том, что является предметом изучения в вероятностной логике: суждения или события. Для лиц, приемлющих непрерывнозначные логики, по-видимому, не составляет труда принять эквивалентность следующих утверждений:

«Вероятность того, что имеет место событие A, равна R». (1)

«Истинность высказывания, утверждающего, что имеет место событие A, равна R». (2)

Здесь R — число из некоторого промежутка. Первое утверждение касается физического мира, второе — суждения, объекта логики, в приведенном примере — непрерывнозначной. Если эти утверждения эквивалентны, то говорить о вероятности событий то же самое, что говорить о истинности высказывания в непрерывнозначной логике. Предложение (1) — более краткая форма передачи информации, содержащейся в предложении (2). Но не только более краткая форма, но и более удобная для практики. Еще раз обращаю внимание на то, что данный подход может быть признан справедливым, если принимать непрерывнозначную логику как одну из множества возможных логик. Именно на таких читателей ориентирована данная статья.

Предлагаемый ниже формальный аппарат применим как к вероятностям событий, так и к оценкам истинности высказываний. Сначала рассмотрим события как в теории вероятностей, но оговоримся, что для нас в отличие от этой теории вероятность является нс объективной характеристикой, а субъективной. Упор на рассмотрение событий, а не высказываний, сделанный в нашей работе, объясняется ее целью: она рассчитана на потенциально широкое применение. Такая возможность подтверждается опытом автора. Поскольку теория вероятностей известна многим специалистам в самых разных областях человеческой деятельности и накоплен большой опыт ее применения, автор надеется, что внедрение разработанного им формализма в практику не составит большого труда. Говорить же в первую очередь и в основном о суждениях, а не о событиях — значит заведомо обрекать наше исследование на роль интеллектуального упражнения, если и интересного, то только очень узкому кругу специалистов из небольшого числа профессиональных логиков. Хотя, безусловно, было бы более традиционным связывать «логику» с «суждением».

2. Оценка степени вероятности событий существенно зависит от состояния накопленных знаний, касающихся исследуемого события. Самое изученное, хорошо известное, с необходимостью происходящее при каждой реализации соответствующего комплекса условий — ***достоверное*** событие. Поскольку очевидно, что все достоверные события равносильны друг другу, вполне допустимо все такие события обозначать одной буквой. Будем употреблять для этого букву U. Допустим, что мы в своем воображении каким-то образом упорядочили все мыслимые события по их близости к достоверному событию. Тогда самым «далеким» от достоверного будет ***невозможное*** событие. Оно никогда не происходит при осуществлении соответствующего комплекса условий. Будем обозначать невозможные события посредством буквы Λ. Все остальные события распределятся между этими двумя событиями, которые играют роль своеобразных констант-событий, ограничивающих множество всевозможных событий. Нас интересует степень вероятности событий (иначе: степень достоверности событий, степень возможности событий), короче — вероятность событий (соответственно: достоверность событий, возможность событий). Будем обозначать степень вероятности события A в рассматриваемом случае (т.е. в случае субъективных вероятностей) посредством $R[A]$. Степень невозможности события A будем обозначать посредством $I[A]$.

3. В 1850 г. немецкий физик Клаузиус (1822–1888) сформулировал закон, который был назван вторым законом термодинамики: теплота не может сама собой перейти от более холодного тела к более теплому.

Допустим, что в горячую печь поставлен сосуд с водой. Может ли произойти событие, состоящее в том, что вода не закипит, а превратится в лед, печь же вследствие этого еще больше нагреется? Английский физик Джинс (1887–1946) вычислил вероятность такого события. Оказалось, что о нем нельзя говорить как о невозможном, а только как о в высшей степени невероятном. Таким образом, второй закон термодинамики, давший четкое понимание тепловых процессов, вовсе не абсолютно достоверен.

Аналогично можно трактовать и закон Гука (1635–1703), гласящий, что деформация упругого тела пропорциональна силе, к нему приложенной. Перечень законов, которые со временем перестали быть таковыми, т. е. абсолютно достоверными, можно было бы продолжать и продолжать. Дело в том, что все законы, на которые опирается современная физика, введены на основании фактов, полученных в данный момент наукой. Но наука не стоит на месте. Она постоянно открывает новые явления природы, и некоторые из них вносят существенные поправки в традиционные представления, хотя далеко не всегда ученые в состоянии их объяснить.

Итак, во-первых, понимание достоверного зависит от уровня знаний, и, во-вторых, справедливо считать, что в общем случае, как бы ни была велика степень достоверности события, степень его невозможности никогда не становится равной нулю. И наоборот, как бы ни была велика степень невозможности события, степень его достоверности никогда не становится равной нулю.

Поскольку процесс постижения мира бесконечен, кажется естественным считать, что оценка степени достоверности со временем растет, что степень достоверности не может быть ограничена раз навсегда выбранным числом. Таким числом не может быть, например, единица. Абсолютная достоверность, если допустить возможность ее существования, теоретически может быть «достигнута» в процессе бесконечного изменения и пополнения знаний, а потому степень ее достоверности, по мнению автора, ассоциирует с бесконечностью. Формальный аппарат вероятностной логики, чтобы быть адекватным мировоззренческим представлениям, должен каким-то образом отражать это обстоятельство. Самый простой способ — рассматривать в качестве промежутка изменения степени достоверности событий всю положительную полуось, а не отрезок оси, как это делается в теории вероятностей. В теории вероятностей степень вероятности — число из отрезка $[0, 1]$. Из этого следует, что, задав степень вероятности события p, сразу же получим степень невозможности события $q = 1 - p$. Если же в качестве степени достоверности брать числа из промежутка $[0, \infty)$, то так же просто, как в теории вероятностей, уже не удастся найти степень невозможности события, а без знания ее трудно судить о достоверности события. Действительно, велика ли возможность события, если степень достоверности, например, 150? Сказать трудно, если не известна степень невозможности того же события. Только сравнивая обе степени можно сделать заключение о том, сколь вероятно событие. Это означает (наводит на мысль), что, кроме оси, на которой бы откладывались степени достоверности событий (назовем ее ***осью достоверности*** и обозначим $0R$), нужно ввести в рассмотрение ось для откладывания на ней степеней невозможности событий (назовем ее ***осью невозможности*** и обозначим $0I$). Обе оси задают плоскость (назовем ее ***плоскостью достоверности***). Достоверному событию на ней соответствует идеальная (мнимая) точка с координатами $R[U] = \infty$, $I[U] = 0$, а невозможному — точка с координатами $R[\Lambda] = 0$, $I[\Lambda] = \infty$. Кажется абсурдным (?) считать, что координаты любой точки первого квадранта плоскости, определяемой осями $0R$ и $0I$, можно считать степенью достоверности и степенью невозможности некоторого события, т. е. кажется абсурдным, что степени эти не связаны между собой.

Будем исходить из того, что симметрия — непременный элемент объективной реальности. Попытаемся учесть это в формальных построениях, поскольку хотим их сделать по возможности тождественными своим мировоззренческим представлениям. События U и Λ противоположны друг другу. Отношение противоположности есть симметричное отношение. Отсюда следует, что идеальные точки, соответствующие событиям U и Λ, симметричны друг другу. Каждое событие A имеет себе противоположное событие. В обозначениях логики антонимов (логики противоположностей) событие, противоположное событию A, записывается посредством αA. Так как в любой паре событий A и αA эти события симметричны друг другу, симметричны друг другу и точки, им соответствующие.

Любое событие A характеризуется степенью своей возможности $R[A]$ и степенью своей невозможности $I[A]$. Откладывая $R[A]$ на оси абсцисс (оси достоверности), а $I[A]$ — на оси ординат (оси невозможности), получим точку на плоскости достоверности с координатами $R[A]$, $I[A]$. Таким образом, каждому событию A соответствует точка $(R[A], I[A])$. Степень невозможности события A есть степень возможности противоположного события αA, т. е. $I[A] = R[\alpha A]$. Отсюда следует, что на плоскости достоверности каждому событию A соответствует точка $(R[A], R[\alpha A])$. Согласно логике противоположностей величины $R[A]$ и $R[\alpha A]$ связаны уравнением

$$2^{-R[A]} + 2^{-R[\alpha A]} = 1. \qquad (3)$$

Кривая, заданная уравнением (3), удовлетворяет условиям, легко усматриваемым из изложенного выше: незамкнута, бесконечна в обе стороны, симметрична, не пересекает осей, тем больше прилегает к осям, чем дальше точки от начала координат, ей принадлежат мнимые точки $(0, \infty)$ и $(\infty, 0)$. Итак, каждому событию A соответствует точка на кривой (3), и наоборот: каждую точку на кривой (3) можно рассматривать как точку, координаты которой соответствуют степеням достоверности и невозможности некоторого события A.

4. Интуитивно и с учетом уже отмеченного мы знаем, что степени возможностей событий должны обладать рядом очевидных условий. Немного остановимся на них.

Во-первых, кажется неестественным ограничивать степени возможностей каким-либо числом. Особенно это неестественно, когда речь идет о степени вероятности объединений событий в широком смысле слова. Чем больше число возможных событий, образующих некоторое объединение, тем больше должна быть степень вероятности объединения. Таким образом, присоединение к объединению нового события должно, как правило, увеличивать вероятность объединения. Причем никаких ограничений в росте этой оценки быть не может. Степень достоверности может быть больше любого, сколь угодно большого числа (достоверность может быть бесконечной). Степени противоположных событий связаны между собой.

Во-вторых, кажется естественным считать, что степень вероятности объединения событий не зависит ни от порядка событий (закон коммутативности), ни от их соединения посредством скобок (закон ассоциативности).

В-третьих, очевидно, что событие, противоположное противоположному событию A, есть само событие A (аналог закона двойного отрицания — закон «двойной противоположности»).

Как и в теории вероятностей, наряду с рассмотрением вероятностей событий будем рассматривать вероятности событий при дополнительном условии, что произошло некоторое событие C, имеющее положительную вероятность. Такие вероятности будем называть ***условными*** и обозначать посредством знакосочетаний вида $R[A \mid C]$. Читаться они будут так же, как и в теории вероятностей — «вероятность события A при условии, что произошло событие C».

В-четвертых, достоверное событие не перестанет быть таковым при любых имеющих место условиях.

В-пятых, следует приравнивать к достоверному событию любое событие при условии, что оно произошло.

В-шестых, достоверное событие, стоящее в условии, не изменит вероятности любого события.

В-седьмых, вероятность любого условного события не изменится, если из ряда условий удалить достоверное событие.

5. ***Вероятностная логика (ВЛ)***. Приступим к построению формализма. Вообще говоря, следуя сложившейся традиции, для этого не нужно было предварять аксиоматику никакими соображениями вводного характера (пункты 1–4). Для достижения преследуемой цели достаточно математизировать интуитивно подозреваемые сформулированные выше свойства вероятностей (пункт 4). Далее изложение ведется таким образом, как если бы не было предыдущих пунктов.

Если рассматриваемое событие обозначено посредством A, то событие, противоположное ему, будем обозначать посредством αA. Поскольку тут усматривается связь с операцией отрицания, по крайней мере — аналогия, к знаку α будем относиться как к символу операции.

Пусть A, B, C, … — события. Из них будем образовывать сложные события с помощью одной одноместной операции (ее знаком будет α) и одной двухместной операции (ее знаком будет β). Будем рассматривать еще одну двухместную операцию γ, понимая знакосочетание $A\gamma B$ как сокращенную запись знакосочетания $\alpha((\alpha A)\beta(\alpha B))$. Если проводить аналогию с математической логикой (или теорией множеств), то знакам α, β, γ соответствуют знаки отрицания (дополнения), дизъюнкции (объединения), конъюнкции (пересечения).

Среди возможных событий будем выделять ***достоверное***, обозначаемое далее посредством U. Будем предполагать, что у нас есть средства, дающие возможность устанавливать, является ли событие достоверным или нет. Сокращенно знакосочетание αU будем обозначать посредством Λ, Λ — невозможное событие.

Будем предполагать, что событиям A, B, C, … поставлены в соответствие числа $R[A]$, $R[B]$, $R[C]$, … — степени вероятности (достоверности, возможности) указанных в скобках событий. Эти числа — значения функционала R, определенного на объектах A, B, C, … . Наряду с указанными числами будем рассматривать числа, поставленные в соответствие выражениям вида $M \mid N$, которые будем записывать как $R[M \mid N]$ — условные вероятности (вероятность события M при условии, что имеет место событие N). Само существование чисел $R[A]$, …, $R[M \mid N]$, … нами декларируется, их же свойства (точнее, свойства определенного на рассматриваемых событиях функционала) будут заданы аксиоматически.

Введем понятие «формула»:

1. (A), (B), … — формулы.

2. Если A и B — формулы, то будут формулами и следующие выражения: (αA), (αB), $(A\beta B)$.

3. Других формул нет.

Будем опускать «лишние» скобки. Знакосочетание вида $A\gamma B$, введенное в качестве сокращения записи, будет рассматриваться как формула.

Знак α связывает теснее, чем знаки β и γ, которые, в свою очередь, связывают теснее, чем знак «|». Знак «|» в рассматриваемых выражениях употребляется только один раз.

Итак, вне формализма: события (элементарные и сложные), степень вероятности событий; в формализме: объекты рассмотрения (элементарные и сложные) — формулы, функционал, определенный на формулах и знакосочетаниях вида $M \mid N$, где M и N — формулы.

Аксиомы ВЛ

1. $R[A \mid B] \in [0, \infty)$.
2. $R[U] = \infty$.
3. $R[\alpha A \mid B] = -\log_2 \left[1 - 2^{-R[A|B]}\right]$.
4. $R[A\beta B \mid C] = R[A \mid C] + R[B \mid \alpha A\gamma C]$.
5. $R[A \mid A\gamma C] = \infty$.
6. $R[U \mid A] = \infty$, если $R[A] \neq 0$.
7. $R[A \mid U] = R[A]$.
8. $R[A\gamma B \mid C] = R[B\gamma A \mid C]$.
9. $R[A \mid \alpha\alpha B\gamma C] = R[A \mid B\gamma C]$.
10. $R[A \mid B\gamma U] = R[A \mid B]$.
11. $R[D \mid (A\gamma B)\gamma C] = R[D \mid A\gamma(B\gamma C)]$.

Правило подстановки. Пусть равенство $R[C \mid E] = R[D \mid F]$ содержит букву A, а B — произвольная формула. Равенство сохранится, если всюду в нем заменить букву A формулой B.

Если приглядеться к написанным аксиомам, в них усматривается классическая логика. Вероятностная интерпретация формализма, предполагающая ее практическую оправданность, рассмотрение противоположностей, отсутствие обычного для логических систем отрицания-дополнения — все это нисколько не явилось преградой для принятия логики, с которой многие, быть может, не всегда осознанно, знакомы. Подчеркиваем, что не интуиционистская, казалось бы, более «практичная» логика, а именно ***классическая*** оказалась «близкой» к нашей интерпретации.

6. Итак, ВЛ задана системой приведенных аксиом. ВЛ не что иное, как вероятностная интерпретация логики антонимов, ранее построенной автором. В сугубо формальном отношении ничего нового в пункте 5 автор не предлагает. Новизна — в изложении, в понимании объектов рассмотрения и функционала, на них определенного. Данной работой автор хотел продемонстрировать плодотворность идей, содержащихся в логике антонимов, возможность построения различных логик — частных случаев (конкретных интерпретаций) логики антонимов, позволяющих «работать» с такими понятиями, как надежность, доходность, прочность, стабильность, выгодность, работоспособность и пр., и пр. Логика антонимов применима в широком классе задач. На этом можно было бы закончить статью, предложив заинтересованным читателям обратиться к логике антонимов, достаточно полно рассмотренной автором в разных публикациях. Но эти публикации не всегда доступны, поэтому напомним некоторые из ранее опубликованных результатов.

7. *Следствия из системы аксиом.* Нашей ближайшей целью будет получение следствий из указанных выше аксиом. Эти следствия дадут возможность составить представление о свойствах функционала R, а также доказать несколько теорем. Доказательства следствий опускаем, они могут быть получены читателем или найдены в работе (1). Следствия перечисляются в таком порядке, что каждое из них вытекает из аксиом и ранее полученных следствий.

Всюду в дальнейшем будем считать символические дроби $1/0$ и $1/\infty$ равными соответственно ∞ и 0. Знакосочетание $A\delta B$ будем понимать как сокращенную запись знакосочетания $\alpha A\beta B$. Операция, символизируемая знаком δ, аналогична имплицированию.

1. Если $R[A \mid D] = R[B \mid D]$ при любом D, то $R[A] = R[B]$.
2. Если $R[A \mid C] = R[B \mid D]$, то $R[\alpha A \mid C] = R[\alpha B \mid D]$, и наоборот.
3. $R[\alpha A] = -\log_2 \left[1 - 2^{-R[A]}\right]$.
4. $R[A\beta B] = R[A] + R[B \mid \alpha A]$.
5. $R[\alpha U \mid D] = 0$, т. е. $R[\Lambda \mid D] = 0$, если $R[D] \neq 0$.
6. $R[\alpha\alpha A \mid D] = R[A \mid D]$.
7. $R[D \mid \alpha\alpha A] = R[D \mid A]$.
8. $R[A \mid B] = R[\alpha B\beta A] - R[\alpha B]$..

Последнее равенство можно записать так:

$$R[A \mid B] = R[B\delta A] - R[\alpha B].$$

Из следствия 8 вытекает, что можно было бы исключить из рассмотрения выражения вида $R[A \mid B]$, поскольку на них можно смотреть как на сокращенную запись правой части сформулированного равенства. Уравнение 8 раскрывает связь между значениями функционала R, соответствующего $B\delta A$, со значением функционала, соответствующего выражению $A \mid B$.

9. $R[\alpha A \mid C] + R[\alpha B \mid A\gamma C] = R[\alpha B \mid C] + R[\alpha A \mid B\gamma C]$.
10. Если $R[A \mid F] = R[B \mid F]$ при любом F, то $R[D \mid A\gamma C] = R[D \mid B\gamma C]$.
11. $R[\alpha A] + R[\alpha B \mid A] = R[\alpha B] + R[\alpha A \mid B]$.
12. $R[A \mid B] = -\log_2 \frac{2^{-R[A]} - 2^{-R[B]} + 2^{-R[\alpha A] - R[B \mid A]}}{2^{-R[\alpha B]}}$.

Следствие 12 — аналог формулы Бейеса.

13. $R[A\gamma B \mid D] = -\log_2 \left[1 - 2^{-R[\alpha A \mid D] - R[\alpha B \mid A\gamma D]}\right]$.

14. $R[\alpha\alpha A\gamma B \mid D] = R[A\gamma B \mid D]$.
15. $R[\alpha A\gamma F \mid A\gamma G] = 0$.
16. $R[\alpha A\gamma F \mid A] = 0$.
17. $R[\alpha A \mid A\gamma G] = 0$.
18. $R[\alpha A \mid A] = 0$.
19. $R[A\gamma F \mid \alpha A\gamma G] = 0$.
20. $R[A\gamma F \mid \alpha A] = 0$.
21. $R[A \mid \alpha A\gamma G] = 0$.
22. $R[A \mid \alpha A] = 0$.
23. $R[A\gamma\alpha A \mid D] = 0$.
24. $R[D \mid (A\gamma B)\gamma C] = R[D \mid (B\gamma A)\gamma C]$.
25. $R[D \mid A\gamma B] = R[D \mid B\gamma A]$.
26. $R[D \mid A\gamma(B\gamma C)] = R[D \mid A\gamma(C\gamma B)]$.
27. $R[\alpha(A\gamma B) \mid D] = R[\alpha A\beta\alpha B \mid D]$.
28. $R[D \mid \alpha(A\gamma B)\gamma F] = R[D \mid (\alpha A\beta\alpha B)\gamma F]$.
29. $R[(A\gamma B)\gamma C \mid D] = R[A\gamma(B\gamma C) \mid D]$.
30. $R[A\gamma A \mid B] = R[A \mid B]$.
31. $R[B \mid (A\gamma A)\gamma F] = R[B \mid A\gamma F]$.
32. $R[A\gamma B \mid A\gamma C] = R[B \mid A\gamma C]$.
33. $R[A\gamma B \mid A] = R[B \mid A]$.
34. $R[A\beta B \mid D] = R[B\beta A \mid D]$.
35. $R[D \mid (A\beta B)\gamma F] = R[D \mid (B\beta A)\gamma F]$.
36. $R[\alpha(A\beta B) \mid D] = R[\alpha A\gamma\alpha B \mid D]$.
37. $R[D \mid \alpha(A\beta B)\gamma F] = R[D \mid (\alpha A\gamma\alpha B)\gamma F]$.
38. $R[(A\beta B)\beta C \mid D] = R[A\beta(B\beta C)] \mid D]$.
39. $R[D \mid (A\beta B)\beta C] = R[D \mid A\beta(B\beta C)]$.
40. $R[A\beta A \mid D] = R[A \mid D]$.
41. $R[D \mid A\beta A] = R[D \mid A]$.
42. $R[A\beta\alpha A \mid D] = \infty$.
43. $R[A\gamma U \mid D] = R[A \mid D]$, если $R[D] \neq 0$.
44. $R[A\gamma\Lambda \mid D] = 0$, если $R[D] \neq 0$.
45. $R[A\beta U \mid D] = \infty$, если $R[D] \neq 0$.
46. $R[A\beta\Lambda \mid D] = R[A \mid D]$, если $R[D] \neq 0$.
47. $R[(A\gamma B)\beta A \mid D] = R[A \mid D]$.
48. $R[D \mid ((A\gamma B)\beta A)\gamma F] = R[D \mid A\gamma F]$.
49. $R[(A\beta B)\gamma A \mid D] = R[A \mid D]$.
50. $R[D \mid ((A\beta B)\gamma A)\gamma F] = R[D \mid A\gamma F]$.
51. $R[A\gamma B \mid D] = -\log_2\left[2^{-R[A|D]} + 2^{-R[\alpha A\beta B|D]}\right]$.
52. $R[A\beta B \mid D] = -\log_2\left[2^{-R[A|D]} - 2^{-R[A\beta\alpha B|D]}\right]$.
53. $R[(A\gamma B)\beta C \mid D] = R[(A\beta C)\gamma(B\beta C) \mid D]$.

54. $R[A\beta(B\beta C) \mid D] = R[A\beta(C\beta B) \mid D]$.

55. $R[(A\beta B)\gamma C \mid D] = R[(A\gamma C)\beta(B\gamma C) \mid D]$.

56. $R[A_1\gamma A_2\gamma\ldots\gamma A_n \mid D] = -\log_2\left[1-\left(1-2^{-R[A_1|D]}\right)\cdot\right.$
$\left.\cdot\left(1-2^{-R[A_2]A_1\gamma D]}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-2^{-R[A_n]A_{n-1}\gamma A_{n-2}\gamma\ldots\gamma A_1\gamma D]}\right)\right]$.

Наряду со степенью вероятности события A введем в рассмотрение степень невозможности, обозначаемую посредством $I[A]$. Функционалы R и I связаны уравнением $I[A] = R[\alpha A]$ по определению. В терминах невозможности становится более ясным смысл некоторых следствий из системы аксиом ВЛ. Например, следствие 2 утверждает: если равны степени вероятности событий A и B, то равны и степени невозможности этих событий. Следствие 3 позволяет количественно выразить степень невозможности через степень возможности. Следствие 5 означает: степень невозможности достоверного события равна нулю. Следствие 8 утверждает: вероятность того, что из события B следует событие A, равна вероятности события A при условии, что имеет место событие B плюс степень невозможности события B. В быту часто вероятность того, что из события B следует событие A, приравнивают вероятности события A при условии, что имеет место событие B. Следствие 8 говорит о том, что делать этого нельзя. Нужно учесть степень невозможности события B. Из лжи следует все что угодно, а потому вероятность того, что из B следует A, тем больше, чем больше невозможность события B. Следствие 8 интересно тем, что количественно уточняет «добавку», отличающую вероятность события $B\delta A$ от вероятности события $A \mid B$.

8. ***Некоторые теоремы, следующие из аксиом ВЛ***. Рассмотрим несколько теорем, раскрывающих свойства функционала R (аксиом ВЛ), хотя, конечно, приведенные следствия уже позволяют составить представление о ВЛ, описываемой аксиоматикой, сформулированной выше, и сравнить ее с двузначной логикой высказываний. Заметим, что при любой интерпретации (логической или теоретико-множественной) объектов рассмотрения и операций над ними имеют место следующие эквивалентности (эквивалентности этого списка будем называть эквивалентностями списка A):

1. $\alpha\alpha A$ экв A.
2. $\alpha(A\gamma B)$ экв $\alpha A\beta\alpha B$.
3. $\alpha(A\beta B)$ экв $\alpha A\gamma\alpha B$.
4. $A\gamma B$ экв $B\gamma A$.
5. $A\beta B$ экв $B\beta A$.
6. $(A\gamma B)\gamma C$ экв $A\gamma(B\gamma C)$.
7. $(A\beta B)\beta C$ экв $A\beta(B\beta C)$.
8. $A\gamma A$ экв A.
9. $A\beta A$ экв A.
10. $A\gamma\alpha A$ экв Λ.

11. $A\beta\alpha A$ экв U.

12. $A\gamma U$ экв A.

13. $A\beta\Lambda$ экв A.

14. $A\beta U$ экв U.

15. $A\gamma\Lambda$ экв Λ.

16. $(A\gamma B)\beta A$ экв A.

17. $(A\beta B)\gamma A$ экв A.

18. $(A\gamma B)\beta C$ экв $(A\beta C)\gamma(B\beta C)$.

19. $(A\beta B)\gamma C$ экв $(A\gamma C)\beta(B\gamma C)$.

Теорема 1. Если A_i экв B_i $(1 \leqslant i \leqslant 19)$ — одна из эквивалентностей списка A, то $R[A_i] = R[B_i]$ и $R[A_i \mid D] = R[B_i \mid D]$, каково бы ни было D.

Чтобы убедиться в справедливости теоремы, достаточно просмотреть следствия из системы аксиом ВЛ. При извлечении следствий, собственно, других целей и не было, кроме обоснования указанной теоремы. Заметим, что для ее доказательства нужны все сформулированные следствия, исключая самое последнее. Поскольку можно считать эквивалентности списка A основными эквивалентностями двузначной классической логики, заключаем, что вероятностный функционал R определен таким образом, что он сохраняет основные эквивалентности классической логики высказываний. Уже одно это делает правдоподобным утверждение, что функционал R сохраняет любую эквивалентность двузначной логики. Последующие теоремы преследуют цель обоснования этого утверждения. Конечно, даже среди следствий 1–56 много таких, которые ни в коей мере не напоминают никакие эквивалентности двузначной логики, не говоря уж об их соответствии. К ним, например, относятся следствия 8, 9, 11–13.

Для формулировки следующей теоремы введем обозначение. Обозначим посредством $\xi A\eta$ формулу, в которой выделено некоторое вхождение формулы A в качестве подформулы (у ξ и η могут быть индексы).

Теорема 2. Если $R[A \mid D] = R[B \mid D]$, то $R[\xi A\eta \mid D] = R[\xi B\eta \mid D]$.

Доказательство: Пусть $R[A \mid D] = R[B \mid D]$. Доказательство теоремы проведем индукцией по глубине n вхождения $\xi * A * \eta$ в формулу $\xi A\eta$.

Пусть $n = 0$. В этом случае формула $\xi A\eta$ есть просто A (ξ и η — пустые слова) и утверждение верно в силу предположения, что $R[A \mid D] = R[B \mid D]$.

Допустим, что теорема верна при $n = k$. Покажем, что она верна и при $n = k + 1$. Возможны случаи:

1. $\xi A\eta = \alpha N$,

2. $\xi A\eta = M\beta N$.

Предположим, что интересующее нас вхождение формулы A принадлежит N, т. е.

1. $\xi A\eta = \alpha\xi_1 A\eta_1$,
2. $\xi A\eta = M\beta\xi_1 A\eta_1$

(здесь для простоты записи опущены «лишние» скобки).

В случае 1 имеем:

$$R[\xi A\eta \mid D] = R[\alpha\xi_1 A\eta_1 \mid D] = -\log_2 \left[1 - 2^{-R[\xi_1 A\eta_1 \mid D]}\right] =$$
$$= -\log_2 \left[1 - 2^{-R[\xi_1 B\eta_1 \mid D]}\right] = R[\alpha\xi_1 B\eta_1 \mid D] = R[\xi B\eta \mid D].$$

Здесь мы воспользовались тем, что теорема верна для $R[\xi_1 A\eta_1 \mid D]$ в силу того, что интересующее нас вхождение находится на глубине $n = k$.

В случае 2 имеем:

$$R[|\xi A\eta \mid D] = R[M\beta\xi_1 A\eta_1 \mid D] = R[M \mid D] + R[\xi_1 A\eta_1 \mid \alpha M\gamma D] =$$
$$= R[M \mid D] + R[\xi_1 B\eta_1 \mid \alpha M\gamma D] = R[M\beta\xi_1 B\eta_1 \mid D] = R[\xi B\eta \mid D].$$

Пусть теперь интересующее нас вхождение формулы A принадлежит подформуле M. Теорема верна и в этом случае, так как в силу следствия 34 имеем:

$$R[M\beta N \mid D] = R[N\beta M \mid D].$$

Доказательство теоремы завершено.

Замечание 1. Очевидно, верно утверждение: если $R[A] = R[B]$, то $R[\xi A\eta] = R[\xi B\eta]$.

Теорема 3. Если A_i экв B_i $(1 \leqslant i \leqslant 19)$ — одна из эквивалентностей списка A, то $R[\xi A_i\eta \mid D] = R[\xi B_i\eta \mid D]$ и $R[D \mid \xi A_i\eta] = R[D \mid \xi B_i\eta]$.

Теорема 3 следует из теорем 1, 2 и следствия 12.

Как вытекает из обоснования теоремы 3, для того чтобы убедиться, что некоторое преобразование формулы (преобразование на любой глубине) не меняет значения функционала R, достаточно проверить, что это преобразование не меняет значения функционала в том случае, когда оно находится на нулевой глубине, т. е. надо проверить справедливость равенства $R[A \mid D] = R[B \mid D]$, где B получается из A посредством преобразования, о котором шла речь выше.

Теорема 4. Пусть $D_1 \& D_2 \& \ldots \& D_m$ $(C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_m)$ — совершенная конъюнктивная нормальная форма (совершенная дизъюнктивная нормальная форма) формулы A. Тогда $R[A \mid D] = R[D_1 \& D_2 \& \ldots \& D_m \mid D]$ $(R[A \mid D] = R[C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_m \mid D])$.

Доказательство. Справедливость теоремы следует из теоремы 3 и из того, что все эквивалентности, нужные для приведения к с. к. н. ф. (с. д. н. ф.), содержатся в списке A.

Замечание 2. В предлагаемом формализме ВЛ нет знаков $\vee$, $\&$, в нем есть соответствующие им знаки β и γ. Чтобы не вводить понятия, аналогичные совершенным нормальным формам, рассматриваемым в математической логике, автор в теореме 4 воспользовался известными многим понятиями с. к. н. ф. и с. д. н. ф. Недостающие определения легко могут быть сформулированы читателем.

Теорема 5. Если A эквивалентно B, то $R[A \mid D] = R[B \mid D]$.

Доказательство. Пусть A эквивалентно B и пусть K_1 — с. к. н. ф. (или с. д. н. ф.), к которой приведена формула A, а K_2 — с. к. н. ф. (или с. д. н. ф.), к которой приведена формула B. Согласно теореме 4 получим $R[A \mid D] = R[K_1 \mid D]$ и $R[B \mid D] = R[K_2 \mid D]$. Применяя эквивалентности 4 и 5 списка A (с учетом того, что значение функционала R не зависят от расстановки скобок в кратных конъюнкциях (дизъюнкциях), что следует из аксиомы 7 (следствия 34), следствия 29 (следствия 38) и теоремы 3), приведем K_1 и K_2 к одному и тому же виду K. Такое K существует в силу сделанного допущения об эквивалентности A и B. Согласно теореме 3 $R[K_1 \mid D] = R[K \mid D]$ и $R[K_2 \mid D] = R[K \mid D]$. Таким образом, $R[A \mid D] = R[K \mid D]$ и $R[B \mid D] = R[K \mid D]$. Отсюда следует, что $R[A \mid D] = R[B \mid D]$. Доказательство теоремы завершено.

Приведем еще несколько теорем, расширяющих представление о функционале R. Доказательства теорем опускаем, их можно найти в (1). Ближайшие три утверждения направлены на установление условий, при которых удается сохранить значения функционала, меняя местами объекты рассмотрения и условия, при которых они изучаются. Теорема 7 является в некотором смысле обратной по отношению к теореме 6, а теорема 8 — обобщением теоремы 6. Теорема же 9 содержит условия сохранения значения функционала при усложнении условий, при которых рассматриваются объекты изучения.

Теорема 6. Если $R[A] = R[B]$ и $R[A \mid D] = R[B \mid D]$, то $R[D \mid A] = R[D \mid B]$.

Теорема 7. Если $R[A] = R[B]$ и $R[D \mid A] = R[D \mid B]$, то $R[A \mid D] = R[B \mid D]$.

Теорема 8. Если $R[A \mid D] = R[B \mid D]$, то $R[D \mid \xi A\eta] = R[D \mid \xi B\eta]$.

Теорема 9. Если $R[A] = R[B]$, $R[A \mid D] = R[B \mid D]$ и $R[A \mid C] = R[B \mid C]$, то $R[A \mid D\gamma C] = R[B \mid D\gamma C]$, $R[A \mid D\beta C] = R[B \mid D\beta C]$, $R[A \mid D\delta C] = R[B \mid D\delta C]$.

Для формулирования следующей теоремы нам понадобится понятие двойственной формулы.

Будем рассматривать формулы, составленные из элементарных символов (иначе: букв, атомов) и знаков α, γ, β. Пусть A — такая формула. Сделаем в формуле A следующие преобразования: все γ заменим на β, все β заменим на γ. Формулу, полученную из формулы A таким образом, будем называть двойственной к формуле A.

Теорема 10. Если $R[A \mid C] = R[B \mid C]$ и A_1, B_1 двойственны соответственно к A и к B, то $R[A_1 \mid C] = R[B_1 \mid C]$.

Может быть доказано, что на любой тавтологии классической логики высказываний функционал, задаваемый системой аксиом ВЛ, равен бесконечности при любом условии.

Теорема 11. В формализме, порождаемом аксиоматикой ВЛ, имеют место неравенства:

$$R[A\gamma B \mid D] < R[A\beta B \mid D],$$

$$R[A \mid D] < R[A\beta B \mid D] < R[A\beta B\beta C \mid D] < \ldots,$$

$$R[A \mid D] > R[A\gamma B \mid D] > R[A\gamma B\gamma C \mid D] > \ldots,$$

$$R[A\beta B \mid D] < R[A\beta C \mid D], \quad \text{если} \quad R[B] < R[C],$$

$$R[A\gamma B \mid D] < R[A\gamma C \mid D], \quad \text{если} \quad R[B] < R[C],$$

в которых первые три неравенства переходят в равенства только в исключительных случаях.

9. ***Об эффективности вычисления значений функционала*** R. Остановимся на возможности эффективного вычисления значений функционала R. Допустим, что рассматриваем три элементарных объекта A, B, C. Обозначим посредством Γ_A упорядоченную каким-либо образом совокупность:

$$R[A], \quad R[A \mid B], \quad R[A \mid \alpha B], \quad R[A \mid C], \quad R[A \mid \alpha C],$$

$$R[A \mid B\gamma C], \quad R[A \mid \alpha B\gamma C], \quad R[A \mid B\gamma\alpha C], \quad R[A \mid \alpha B\gamma\alpha C].$$

Аналогично введем обозначения Γ_B, Γ_C.

Пусть M и N — формулы, построенные из элементарных объектов A, B, C и знаков α, β. Очевидно, что путем многократного применения аксиом и следствий из аксиом ВЛ (в первую очередь аксиомы 4 и следствия 12) вычисление $R[M \mid N]$ можно свести к вычислению Γ_A, Γ_B, Γ_C. Иными словами, можно доказать теорему: каковы бы ни были формулы M и N и последовательности чисел Γ_A, Γ_B, Γ_C, существует функция f — такая, что $R[M \mid N] = f(\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C)$.

Аналогичное утверждение справедливо и в случае, когда рассматриваемые формулы построены из n элементарных объектов рассмотрения. Таким образом, сколь бы сложными ни были M и N, есть возможность вычислить значение функционала $R[M \mid N]$, если известны его значения на более простых объектах рассмотрения.

10. ***Некоторые следствия и теоремы, вытекающие из системы аксиом ВЛ.*** Удачность выбора аксиом, эффективность формализма — в его возможностях, проявляемых при решении, в том числе прикладных задач, а также в соответствии формализма мировоззренческим установкам и интуитивным представлениям. О возможностях формальной системы можно судить уже по следствиям из ее аксиом. Чем адекватнее формализм нашей интуиции, тем, следовательно, удачнее выбраны аксиомы. В частности, вероятность события, как подсказывает интуиция, тем меньше, чем больше событий фигурирует в условии. Убедимся в том, что предлагаемый формализм ВЛ удовлетворяет нашей интуиции. Итак, в данном пункте нас будет интересовать зависимость оценок функционала R от условий, при которых рассматриваются объекты, от их числа, от их вероятности.

Поскольку нижеследующие теоремы не только важны для использования, но и демонстрируют свойства вводимых вероятностей, которых не найти, по крайней мере в широко известных изложениях статистических вероятностей, они выделены в отдельный пункт.

Следствие 57. Если $R[A] = 0$, то $R[A \mid B] = 0$, каково бы ни было условие B, оценка которого отлична от нуля (т. е. $R[B] \neq 0$).

Действительно, пусть $R[A] = 0$, $R[B] \neq 0$. Из следствия 3 получаем: $R[\alpha A] = \infty$. Согласно следствию 12 имеем:

$$2^{-R[A|B]} = \frac{2^{-0} - 2^{-R[B]} - 2^{-\infty - R[B|A]}}{2^{-R[\alpha B]}} = \frac{1 - 2^{-R[B]} - 0}{2^{-R[\alpha B]}} = \frac{2^{-R[\alpha B]}}{2^{-R[\alpha B]}} = 1.$$

Откуда следует, что $R[A \mid B] = 0$.

Следствие 57*. Если $R[A] = \infty$, $R[B] \neq 0$, то $R[A \mid B] = \infty$.

Действительно, пусть $R[A] = \infty$, $R[B] \neq 0$. В этом случае в силу аксиомы 6 получаем $R[A \mid B] = \infty$.

Пусть $R[B] = \infty$. Из аксиомы 7 следует: $R[A \mid B] = R[A]$.

Пусть объект рассмотрения графически равен условию (т. е. $A \doteq B$), тогда в силу аксиомы 5 имеем: $R[A \mid A] = \infty$.

Исключим из нашего рассмотрения объекты, представляющие собой константы U, Λ $(\Lambda \leftrightharpoons \alpha U)$, поскольку вычисление от них функционала R при любом условии приводит к тем же результатам, какие уже были отмечены в следствиях 57, 57*.

Теорема 12. Если рассматриваемые объекты A и B: 1) различны $(A \neq B)$; 2) $R[A] \neq 0$, $R[A] \neq \infty$, $R[B] \neq 0$, $R[B] \neq \infty$; 3) не являются константами U, Λ, то в формализме ВЛ имеет место один из случаев:

1) оценки

$$R[B], \quad R[A], \quad R[A \mid B] \tag{4}$$

связаны неравенством:

$$R[A] > R[A \mid B]; \tag{5}$$

2) оценки (4) связаны неравенствами:

$$R[A] < R[A \mid B], \tag{6}$$

$$2^{-R[B]} > 1 - \frac{2^{-I[A]}}{2^{-I[A|B]}}. \tag{7}$$

Перед тем, как перейти к доказательству, заметим, что в первом случае из трех оценок (4) в качестве первой оценки ($R[B]$) может быть взято любое положительное число. Из двух других оценок

$$R[A], \quad R[A \mid B] \tag{8}$$

одна выбирается произвольно, вторая — согласно неравенству (5). Во втором же случае одна из оценок (8) выбирается произвольно, вторая — согласно неравенству (6), а третья — согласно неравенству (7).

Случаи, указанные в формулировке теоремы, не совместимы, более того, они противоположны. В первом предполагается неравенство (5), а во втором (6). В первом — значение $R[B]$ может быть любым, во втором — лишь таким, которое удовлетворяет неравенству (7). Оба случая отражают разные «философии». В рамках решения задачи или разработки математической модели надо придерживаться одного из этих случаев. Либо оценка условия может быть любой и условная оценка объекта A меньше безусловной, либо оценка условия зависит от оценки объекта A и введение условия увеличивает оценку.

Доказательство. Пусть $R[A]$ и $R[B]$ произвольны. Согласно следствию 12 имеем:

$$2^{-R[B|A]} = \frac{2^{-R[B]} - 2^{-R[A]} + 2^{-R[\alpha B]-R[A|B]}}{2^{-R[\alpha A]}}. \tag{9}$$

Преобразуем правую часть (9) следующим образом:

$$2^{-R[B|A]} = \frac{2^{-R[B]} - 2^{-R[A]} + \left(1 - 2^{-R[B]}\right) \cdot 2^{-R[A|B]}}{2^{-R[\alpha A]}} =$$

$$= \frac{2^{-R[B]} \cdot \left(1 - 2^{-R[A|B]}\right) - 2^{-R[A]} + 2^{-R[A|B]}}{2^{-R[\alpha A]}} =$$

$$= \left[2^{-R[B]} + \frac{2^{-R[A|B]} - 2^{-R[A]}}{1 - 2^{-R[A|B]}}\right] \cdot \frac{1 - 2^{-R[A|B]}}{2^{-R[\alpha A]}}.$$

Итак,

$$2^{-R[B|A]} = \left[2^{-R[B]} + \frac{2^{-R[A|B]} - 2^{-R[A]}}{1 - 2^{-R[A|B]}}\right] \cdot \frac{1 - 2^{-R[A|B]}}{2^{-R[\alpha A]}}. \quad (10)$$

В силу сделанных допущений 1–3 значением функционала $R[B \mid A]$ не являются ни 0, ни ∞, т. е. левая часть равенства (10) не равна ни 0, ни 1. Она принимает значения из интервала (0, 1). Отсюда следует, что правая часть (10) строго больше нуля. Откуда получаем, что оба сомножителя в правой части (10) одного знака. Второй сомножитель — строго положителен. Значит, первый сомножитель (т. е. выражение в квадратных скобках) тоже строго положителен.

Итак,

$$2^{-R[B]} + \frac{2^{-R[A|B]} - 2^{-R[A]}}{1 - 2^{-R[A|B]}} > 0. \quad (11)$$

Поскольку первое слагаемое в сумме (11) строго больше нуля, значит: 1) либо второе слагаемое больше нуля; 2) либо второе слагаемое меньше нуля, но по абсолютной величине меньше первого слагаемого.

Рассмотрим первый случай. Имеем:

$$\frac{2^{-R[A|B]} - 2^{-R[A]}}{1 - 2^{-R[A|B]}} > 0. \quad (12)$$

Поскольку знаменатель дроби (12) положителен, значит, справедливо неравенство:

$$2^{-R[A|B]} - 2^{-R[A]} > 0. \quad (13)$$

Из (13) следует неравенство (5). Итак, $R[B]$ и, например, $R[A]$ могут быть любыми числами, а $R[A|B]$ должно быть меньше $R[A]$. Таким образом, доказываемая теорема верна в рассматриваемом случае.

Рассмотрим второй случай. Имеем:

$$2^{-R[B]} > \frac{2^{-R[A]} - 2^{-R[A|B]}}{1 - 2^{-R[A|B]}}. \quad (14)$$

Числитель правой части неравенства (14) положителен. Отсюда следует неравенство (6).

Правую часть неравенства (14) преобразуем следующим образом:

$$\frac{2^{-R[A]} - 1 + 1 - 2^{-R[A|B]}}{1 - 2^{-R[A|B]}} = 1 - \frac{1 - 2^{-R[A]}}{1 - 2^{-R[A|B]}} = 1 - \frac{2^{-R[\alpha A]}}{2^{-R[\alpha A|B]}} = 1 - \frac{2^{-I[A]}}{2^{-I[A|B]}}.$$

Откуда следует:

$$2^{-R[B]} > 1 - \frac{2^{-I[A]}}{2^{-I[A|B]}}.$$

Видим, что оба неравенства (6) и (7) выполнены. Этим завершено доказательство теоремы.

Теорема 13. Если $R[A|C] > R[B|D]$, то $R[\alpha A|C] < R[\alpha B|D]$.

Доказательство. Пусть $R[A|C] > R[B|D]$. Отсюда следует:

$$-R[A|C] < -R[B|D], \quad 2^{-R[A|C]} < 2^{-R[B|D]}, \quad 1 - 2^{R[A|C]} > 1 - 2^{-R[B|D]},$$

$$2^{-R[\alpha A|C]} > 2^{-R[\alpha B|D]}, \quad -R[\alpha A|C] > -R[\alpha B|D], \quad R[\alpha A|C] < R[\alpha B|D].$$

В частности, из теоремы 13 следует:
если $R[A] > R[A|B]$, то

$$R[\alpha A] < R[\alpha A|B]. \tag{15}$$

Видим, что переход от объекта рассмотрения A к объекту αA приводит к замене знака неравенства на противоположный. Однако что брать в качестве объекта рассмотрения, а что в качестве объекта, ему противоположного, зависит от исследователя.

Теорема 14. Если $R[A] > R[A|B]$, то $R[B] > R[B|A]$.

Доказательство. Пусть $R[A] > R[A|B]$. Из следствия 11 получаем:

$$R[\alpha B|A] - R[\alpha B] = R[\alpha A|B] - R[\alpha A]. \tag{16}$$

Из выражений (15) и (16) вытекает:

$$R[\alpha B|A] - R[\alpha B] > 0, \quad R[\alpha B|A] > R[\alpha B], \quad -R[\alpha B|A] < -R[\alpha B],$$

$$2^{-R[\alpha B|A]} < 2^{-R[\alpha B]}, \quad 1 - 2^{-R[\alpha B|A]} > 1 - 2^{-R[\alpha B]}, 2^{-R[B|A]} > 2^{-R[B]},$$

$$-R[B|A] > -R[B], \quad R[B|A] < R[B].$$

Итак, получили: $R[B] > R[B|A]$. Что и требовалось доказать.

Видимо, уравнение (10) не удастся разрешить относительно разности $R[B] - R[B|A]$, как и относительно разности

$$2^{-R[B|A]} - 2^{-R[B]} \tag{17}$$

так, чтобы в правой части уравнения не было ни $R[B|A]$, ни $R[B]$. Правда, ЭВМ дают возможность вычислить «погрешность» $\Delta = R[B] - R[B|A]$ на основе численных методов. Однако легко оценить разность (17). Действительно, пусть $R[A] > R[A|B]$. Из допущения, согласно теореме 13, следует: $R[\alpha A|B] > R[\alpha A]$.

Откуда получаем:

$$-R[\alpha A|B] < -R[\alpha A], \quad 2^{-R[\alpha A|B]} < 2^{-R[\alpha A]},$$

$$\frac{2^{-R[\alpha A]B]}}{2^{-R[\alpha A]}} = \frac{1 - 2^{-R[A|B]}}{1 - 2^{-R[A]}} < 1. \tag{18}$$

Из выражений (10) и (18) получаем:

$$2^{-R[B|A]} - 2^{-R[B]} < \frac{2^{-R[A|B]} - 2^{-R[A]}}{1 - 2^{-R[A|B]}}. \tag{19}$$

Обратим внимание, что в правой части неравенства (19) фигурируют оценки условия, при котором рассматривается объект, указанный в левой части неравенства (19).

Итак, если оценка $R[B]$ может быть любой, то $R[A] > R[A|B]$ и $R[B] > R[B|A]$, т. е. оценка объекта уменьшается, если он начинает рассматриваться при некотором условии. Иными словами, при этом условии безусловные оценки значительнее условных. Заметим, что роли A и B могут поменяться. С учетом последнего обстоятельства теоремы 12 и 14 могут быть объединены в одной формулировке: если объекты A и B различны и в качестве $R[A]$ и $R[B]$ могут быть взяты любые числа, отличные от нуля, то в ВЛ имеют место неравенства: $R[A] > R[A|B]$ и $R[B] > R[B|A]$.

Теперь ответим на вопрос, как изменяется оценка объекта, если к условию, при котором он рассматривается, прибавляется новое условие.

Теорема 15. Если: 1) B и C не зависят друг от друга; 2) C и $A\gamma B$ различны и в качестве $R[C]$ и $R[A\gamma B]$ могут быть взяты любые числа, отличные от нуля, то

$$R[A|B] > R[A|B\gamma C]. \tag{20}$$

Доказательство. Пусть: 1) B и C не зависят друг от друга; 2) C и $A\gamma B$ различны и в качестве $R[C]$ и $R[A\gamma B]$ могут быть взяты любые числа, отличные от нуля.

На основании следствия 9 и аксиомы 3 имеем:

$$\begin{aligned} R[\alpha A|B] - R[\alpha A|B\gamma C] &= R[\alpha C|B] - R[\alpha C|A\gamma B] = \\ &= -\log_2\left[1 - 2^{-R[C|B]}\right] + \log_2\left[1 - 2^{-R[C|A\gamma B]}\right] = \\ &= \log_2\frac{1 - 2^{-R[C|A\gamma B]}}{1 - 2^{-R[C|B]}}. \end{aligned}$$

Таким образом:

$$R[\alpha A|B] - R[\alpha A|B\gamma C] = \log_2\frac{1 - 2^{-R[C|A\gamma B]}}{1 - 2^{-R[C|B]}}. \tag{21}$$

Так как по предположению B и C не зависят друг от друга, имеем: $R[C|B] = R[C]$. Отсюда на основании (21) следует:

$$R[\alpha A|B] - R[\alpha A|B\gamma C] = \log_2 \frac{1 - 2^{-R[C|A\gamma B]}}{1 - 2^{-R[C]}}. \tag{22}$$

В силу допущения 2 и объединенной формулировки теорем 12 и 14 имеем: $R[C] > R[C|A\gamma B]$. Отсюда путем простых преобразований получаем:

$$-R[C] < -R[C|A\gamma B], \quad 2^{-R[C]} < 2^{-R[C|A\gamma B]}, \quad 1-2^{-R[C]} > 1-2^{-R[C|A\gamma B]},$$

$$\frac{1 - 2^{-R[C|A\gamma B]}}{1 - 2^{-R[C]}} < 1. \tag{23}$$

На основании (22) и (23) заключаем: $R[\alpha A|B] < R[\alpha A|B\gamma C]$. Из последнего неравенства следует: $R[A|B] > R[A|B\gamma C]$. Что и требовалось доказать.

Если в теореме 15 условия B и C зависят друг от друга, то для вычисления интересующей нас разности $R[\alpha A|B] - R[\alpha A|B\gamma C]$ надо воспользоваться равенством (21) или какой-либо его разновидностью.

Если оценки $R[C|B]$ и $R[C|A\gamma B]$ близки друг другу, то в качестве $R[A|B\gamma C]$ можно брать $R[A|B]$. При этом погрешность может быть вычислена путем использования (21).

При выполнении условий теорем 12 и 15 справедливы неравенства:

$$R[A] > R[A|B] > R[A|B\gamma C],$$

которые можно переписать так:

$$R[A|U] > R[A|B] > R[A|B\gamma C]. \tag{24}$$

Поскольку условия неравенств (24) связаны между собой следующим образом: $R[U] > R[B] > R[B\gamma C]$, можно предположить, что справедливо утверждение: чем меньше оцениваются условия, при которых рассматривается объект A, тем меньше оценка самого объекта A при этих условиях. Это утверждение вполне согласуется с интуицией (по крайней мере, с интуицией автора). Справедлива теорема 16.

Теорема 16. Если при любом A справедливо неравенство $R[B|A] > R[b|A]$ и

$$|I[B|A] - I[b|A]| > |I[b] - I[B]|, \tag{25}$$

то $R[A|B] > R[A|b]$.

Доказательство: пусть при любом A имеет место неравенство: $R[B|A] > R[b|A]$ и абсолютная величина разности $I[B|A] - I[b|A]$ больше абсолютной величины разности $I[b] - I[B]$. Поскольку по предположению A — любое, возьмем U в качестве A. Получим: $R[B|U] > R[b|U]$. Отсюда, согласно аксиоме 6, следует неравенство:

$$R[B] > R[b]. \tag{26}$$

Из допущения и неравенства (26) в силу теоремы 13 вытекают неравенства:

$$R[\alpha b|A] > R[\alpha B|A], \tag{27}$$

$$R[\alpha b] > R[\alpha B]. \tag{28}$$

На основании следствия 11 имеем:

$$\begin{cases} R[\alpha A] + R[\alpha B|A] = R[\alpha B] + R[\alpha A|B], \\ R[\alpha A] + R[\alpha b|A] = R[\alpha b] + R[\alpha A|b]. \end{cases} \tag{29}$$

Равенства системы (29) перепишем следующим образом:

$$\begin{cases} R[\alpha A|B] = R[\alpha A] + R[\alpha B|A] - R[\alpha B], \\ R[\alpha A|b] = R[\alpha A] + R[\alpha b|A] - R[\alpha b]. \end{cases} \tag{30}$$

Из (30) получаем:

$$R[\alpha A|B] - R[\alpha A|b] = \{R[\alpha B|A] - R[\alpha b|A]\} + \{R[\alpha b] - R[\alpha B]\}. \tag{31}$$

В правой части равенства (31), согласно (27), выражение в первых фигурных скобках меньше нуля, а выражение во вторых фигурных скобках, согласно (28), больше нуля. Итак, первое слагаемое суммы правой части равенства (31) отрицательно, а второе — положительно. Учитывая предположение (25), которое можно записать в виде:

$$|R[\alpha B|A] - R[\alpha b|A]| > |R[\alpha b] - R[\alpha B]|,$$

заключаем, что правая часть равенства (31) отрицательна. Отсюда следует:

$$\begin{gathered} R[\alpha A|B] - R[\alpha A|b] < 0, \\ R[\alpha A|B] < R[\alpha A|b]. \end{gathered} \tag{32}$$

Из (32), согласно теореме 13, получаем:

$$R[\alpha\alpha A|B] > R[\alpha\alpha A|b].$$

Отсюда в силу следствия 6: $R[A|B] > R[A|b]$.

Получением последнего неравенства заканчивается доказательство теоремы.

Теорема 16 может быть преформулирована следующим образом: если имеют место неравенства:

$$R[B] > R[b], \quad R[B|A] > R[b|A],$$

$$|I[B|A] - I[b|A]| > |I[b] - I[B]|, \quad \text{то} \quad R[A|B] > R[A|b].$$

В приведенной формулировке отсутствует предположение о произвольности объекта A. Это предположение нужно только для извлечения из неравенства $R[B|A] > R[b|A]$ неравенства $R[B] > R[b]$. Предположив, что имеют место оба неравенства, мы сделали ненужным допущение произвольности объекта A.

Из доказанной теоремы и теоремы 11, в частности, следует: если

$$\begin{gathered} |I[B\beta C|A] - I[B\gamma C|A]| > |I[B\beta C] - I[B\gamma C]|, \quad \text{то} \\ R[A|B\gamma C] < R[A|B\beta C]. \end{gathered} \tag{33}$$

Смысл неравенства (33) интуитивно понятен. Последнее неравенство, соответствующее интуиции, еще одно подтверждение правильности выбранной аксиоматики ВЛ. Интересно, справедливо ли оно без каких-либо условий?

11. Допустим, что в отличие от предыдущего мы хотим интерпретировать объекты рассмотрения не как «события», а как «высказывания» или «суждения». В этом случае абсолютно все в пунктах, касающихся формализма, т. е. в пунктах 5, 7–10, остается без изменения. Изменяется только интерпретация формальных выражений и «обоснование» выбора аксиом. Правда, содержательно обосновывать выбор аксиом вовсе не обязательно (точнее — не сложилась такая традиция). В новой интерпретации знакосочетания вида $R[A]$ и $I[A]$ следует читать соответственно как «степень истинности высказывания A» и «степень ложности высказывания A», а знакосочетание вида $A|B$ читается так: «Высказывание A при условии, что имеет место высказывание B» или «A при условии, что высказано B».

Истинностные оценки в значительной мере зависят от знаний, накопленных обществом. Процесс пополнения, уточнения, изменения, совершенствования знаний никогда и ничем не будет ограничен. Процесс этот бесконечен (конечно, в той мере, в какой вообще возможна бесконечность). Его, так сказать, пределом является абсолютная истина, т. е. полное, исчерпывающее знание о действительности — знание, которое не может быть опровергнуто в будущем. Здесь, говоря о «пределе», мы воспользовались аналогией с понятием предела, рассматриваемого в математике. Аналогия эта кажется вполне уместной. Как и в математике, налицо бесконечный процесс приближения к некоторому результату, который отличается от результатов, возникающих по ходу постоянного развития. Представляется естественным поставить в соответствие абсолютной истине символ ∞. Если абсолютную истину обозначить посредством U, то предыдущее можно записать в виде равенства $R[U] = \infty$ (аксиома 2). Очевидно, абсолютная истина остается таковой при любых условиях. Формализацией этого является аксиома 6. Упоминание абсолютных истин в условиях не может отразиться на степени истинности любых условных высказываний. Выражением этого являются аксиомы 7 и 10. Любое условное высказывание приравнивается к абсолютной истине, если одно и то же высказывание фигурирует и как объект оценивания (т. е. слева от вертикальной черты), и как одно из условий (т. е. справа от черты). Это обстоятельство фиксируется аксиомой 5. Высказыванием, противоположным абсолютно истинному высказыванию, является ложное высказывание — ложь. Ложь будем обозначать посредством буквы Λ. Ложь — самое «удаленное» от абсолютной истины высказывание. В нем, так сказать, нуль истинности. Кажется естественным поставить в соответствие ложному высказыванию число нуль. Итак, из всего сказанного получаем:

$$R[\Lambda] = 0, \quad R[U] = \infty. \tag{34}$$

Если принять равенства (34), то естественно согласиться, что степень истинности любого высказывания — положительное число из бесконечного полуинтервала $[0, \infty)$. Перенося это замечание на условные высказывания, придем к аксиоме 1. Приняв аксиому 1, чтобы иметь ясное представление об истинности условного высказывания $A|B$, мало знать $R[A|B]$, надо еще знать $I[A|B]$. Только знание двух этих чисел вносит ясность в понимание истинности высказывания. Истинность и ложность противоположны друг другу. Высказывание, противоположное высказыванию A, будем обозначать посредством αA. Говорить о степени ложности высказывания A то же самое, что говорить о степени истинности высказывания αA, т. е. $I[A] = R[\alpha A]$ и $I[A|B] = R[\alpha A|B]$. Естественно считать, что степени истинности противоположных высказываний связаны между собой. Если учесть сказанное выше, то кривая, на которой лежат точки $(R[A],\ R[\alpha A])$, должна напоминать гиперболу с уравнением $y = 1/x$. Отсюда следует приемлемость аксиомы 3. Очевидно, отношение противоположности подчиняется закону «двойной противоположности» — аксиома 9. Справедливость законов коммуникативности и ассоциативности (аксиомы 8 и 11) при истинностной оценке высказываний, видимо, сомнений не вызывает. И, наконец, аксиома 4. Автору кажется естественным считать, что истинность объединения, в принципе, больше истинности объединяемых высказываний. Каждое новое высказывание, присоединяемое к объединению, должно увеличивать истинность всей совокупности в целом (теорема 11). И только в исключительном случае присоединение нового высказывания не изменяет истинности совокупности высказываний.

Итак, истинностные значения, рассматриваемые в ВЛ, — суть вся неотрицательная полуось. Ноль соответствует лжи, бесконечность — абсолютной истине. Все остальные положительные числа соответствуют относительным истинам. ВЛ более соответствует философскому представлению об истине, чем двузначные или иные дискретные логики. Тем самым ВЛ более адекватна нашим мировоззренческим представлениям, чем дискретные логики.

Точки

$$(R[A|B], \quad R[\alpha A|B]), \tag{35}$$

лежащие на кривой, описываемой уравнением аксиомы 3, дают возможность составить более полное представление об истинности высказывания A, чем значение только первой координаты $R|A|B|$. Представление это будет еще более полным, если координаты точки (35) сравнить с координатами точки, которая кажется субъекту (исследователю) в силу каких-то причин более предпочтительной. Иными словами, истинностная оценка зависит не только от высказывания и уровня научных знаний в обществе, но и от уровня знаний, кругозора, преследуемых целей, быть может, настроения и много другого, присущего оценивающему субъекту.

12. Предлагаемые основы вероятностной логики нуждаются во всестороннем осмыслении, в частности — философском. Приведенные выше следствия и теоремы — математическое изложение рассматриваемых в реальном мире отношений, причинно-следственных зависимостей, вероятностных (истинностных) субъективных оценок наблюдаемого в действительном мире. Формальный аппарат, рассмотренный в нашей статье, неоднократно применялся автором при решении практических задач.

---

[1] *Голота Я. Я.* Непрерывнозначная логика. Л., 1982. Деп. в ВИНИТИ 14.10.82, № 5154-82; РЖМ. 1983. 2. Реф. 2 А46 Деп.