

В. А. Карпунин

**ПОНЯТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТОЧНОСТИ:
соотношение логической строгости и интуитивной ясности**

Выделение в качестве относительно самостоятельных понятий логической строгости, с одной стороны, и интуитивно-конструктивной ясности — с другой, — результат своеобразного «расщепления» понятия математической точности, расщепления, обнаружившегося в наиболее явственной

© В. А. Карпунин, 2000

форме в ходе дискуссий между представителями интуиционизма и формализма. Иначе говоря, принятие или отвержение тех или иных критериев точности в математике — логической строгости, с одной стороны, и интуитивно-конструктивной ясности — с другой, в определенной степени связано с принятием или отвержением формалистских или интуиционистских исходных принципов. В начальный период бурных дискуссий между представителями интуиционизма и формализма казалось, что дизъюнкция упомянутых критериев математической точности является исключающей, что *либо* под здание существующей математики нужно подводить логицистски-формалистский критерий строгости, *либо* это здание нужно радикально перестроить (а может быть, даже снести это здание и на его месте возвести новое строение) на основе интуиционистского критерия ясности интуитивно-конструктивных процедур. «На вопрос, где существует математическая точность, даются различные ответы с двух сторон; интуиционист говорит: в человеческом интеллекте, формалист говорит: на бумаге», — писал в то время Л. Брауэр (1). Однако развитие исследований в основаниях математики показало, что между логической строгостью и интуитивно-конструктивной ясностью математических построений осуществляется скорее отношение взаимодополнительности, чем отношение взаимоисключения, во-первых, потому, что «точность на бумаге» (аксиоматизируемость — формализуемость) должна дополняться интуитивной ясностью в метатеории (финитностью или конструктивностью в том или ином их понимании), а во-вторых, потому, что точность «в человеческом интеллекте» (или достигаемая на основе некоторого уточнения понятия алгоритма), приводящая к сложным интуиционистским (конструктивным) теориям, может сопровождаться аксиоматизацией этих теорий с последующей их формализацией.

Можно сказать, что, соединяясь, указанные виды (аспекты) точности оказывают значительное влияние на работу математиков.

Стимулом эволюции представлений о логической строгости математических теорий среди прочего является желание достичь максимально возможного взаимопонимания между учеными по поводу методов обоснования и разработки этих теорий. «Окончательное» разрешение проблемы логической строгости было бы равносильно «окончательному» разрешению для математики традиционной философской проблемы интересусубъективности, что вряд ли возможно. «Различные мнения о понятии строгости колебались в истории; если не закрывать глаза, то можно обнаружить это колебание мнений и поныне. Столетие назад понятиями о бесконечно малых оперировали весьма наглядно, и все шло прекрасно благодаря наглядности. Потом стали критичнее и думали, что нельзя обойтись без эпсилонистики. Теперь намечились обратные тенденции; через десять или двадцать лет будет сделано “великое открытие”: то, что делалось сто лет

назад, вполне строго, если это понимать правильно. Вычисления с дифференциалами снова вошли в моду» (2). Нельзя рассматривать возрастание строгости математических теорий как «строго кумулятивный» процесс. Нельзя также считать, что прогресс в математике обязательно сопровождается возрастанием ее строгости. Последняя есть лишь одна из сторон математического знания и притом далеко не всегда относится к числу важнейших его характеристик.

Согласно критериям строгости, принимаемым современной чистой математикой, некоторая теория может быть логически обоснована одним из двух способов: 1) ее основные термины определяются в терминах более фундаментальной теории, а ее теоремы, соответственно, выводятся из теорем этой более фундаментальной теории; 2) ее основные термины берутся как неопределяемые, а ее теоремы выводятся из некоторой совокупности аксиом, содержащих эти термины (формальная и формализованная аксиоматика). Ясно, что развитие представлений о логической строгости тесно связано с эволюцией аксиоматического метода, в ходе которой происходил переход от содержательных аксиоматик к формальным и формализованным аксиоматическим теориям. Пожалуй, наиболее важным эволюционирующим элементом в представлениях о логической строгости является понятие дедуктивного доказательства.

Дедуктивное доказательство считается в полной мере выполняющим свою задачу, если истинность доказываемого тезиса с необходимостью вытекает из истинности аргументов. В этом случае тезис считается достоверно обоснованным. Именно такие доказательства считаются строгими. Изменение представлений о строгости доказательств происходило в результате устранения из них разнообразных интуитивных моментов. Чем в большей степени устранены из некоторого доказательства интуитивные факторы, не имеющие «чисто логической» природы, тем выше уровень его строгости.

В наше время эталоном строгого математического доказательства считается вывод в формализованной теории. Доказательства такого рода в максимальной степени избавлены от содержательно-интуитивных моментов. В связи с проблемой строгости формализованных доказательств на первый план выдвигаются синтаксические характеристики математических рассуждений, что связано прежде всего с необходимостью избежать перенесения в формализованный язык свойств естественного языка, препятствующих уточнению логической структуры рассуждений. Пожалуй, главным достоинством формализованного доказательства, обусловленным его эффективным характером, является легкая объективная проверяемость. Однако из «эталонности» формализованного доказательства вовсе не следует, что существует единственный абсолютный (всеобщий) критерий строгости (надежности) дедуктивного доказательства. «Распро-

страненная мысль о связи формализации и надежности... не последовательна. Когда мы действительно хотим убедиться, что математический результат верен, мы не формализуем его доказательство, т. е. не сравниваем шаги с формальными правилами, а пытаемся сделать его доступным для понимания. Мы полагаемся на математические, а не на логические основания» (3).

Достижение идеала формализованного доказательства необходимо для решения многих, но далеко не всех возможных (и действительных) математических задач. Без формализации, например, не обойтись в математике, но она не требуется для разрешения многих проблем не только прикладной, но и чистой (теоретической) математики. В развивающемся математическом знании сосуществуют и взаимодополняют друг друга различные мерки строгости — от выработанных древними греками до сформировавшихся в рамках школы Гильберта.

Чтобы перейти с одного уровня строгости на другой, более высокий уровень, нужно усомниться в тех принципах строгости, которые до определенного времени принимались без критики в качестве руководства к действию. «Революции строгости» в математике, как правило, были связаны с обнаружением парадоксов в ее фундаментальных теориях. Если более ранние революции строгости в математике были связаны в основном с уточнением принципиальных понятий содержательных математических теорий и не ставили перед собой задачу уточнения логических средств математики, то парадоксы теории множеств, спровоцировавшие последнюю в истории революцию строгости, подорвали веру в саму логическую интуицию, являвшуюся основным критерием приемлемости математических доказательств до конца XX в., привлекли пристальное внимание ряда выдающихся математиков к логической структуре науки и в конечном счете привели к уточнению этой структуры.

В доказательствах, проводимых на основе логической интуиции, не подвергнутой предварительному критическому осмыслению, логические законы, правила, способы образования (определения) понятий и т. п. зачастую используются неявным, неосознанным образом. Отсутствие четкого определения доказательства в этом случае препятствует объективному отличению строгих доказательств от нестрогих, допустимых дедуктивных средств от недопустимых. Фрагментарный (энтимематический) характер подобной аргументации может приводить к тому, что в доказательства неявно включаются аргументы, эквивалентные доказываемому положению, или даже ложные положения. А поскольку известно, что «из лжи выводимо все, что угодно», вера в подобные математические доказательства оказывается основательно подорванной. Экспериментальные (эмпирические) науки не столь болезненно реагируют на обнаружение нестрогости их аргументации, поскольку эта нестрогость сравнительно

легко может быть скорректирована опытными практическими процедурами, находящимися в распоряжении этих наук. Для математики, особенно теоретической (чистой) математики, подобная корректировка невозможна, чем и обусловлена значимость для нее логических процедур, логической интуиции. Как мы уже говорили, антиномии теории множеств выявили ненадежность этой интуиции и подорвали веру в нее. Наиболее последовательный и полный анализ логической интуиции, лежащей в основе средств рассуждения классической математики, предпринятый с целью подведения надежного фундамента под исторически сложившееся здание математики, как известно, был осуществлен в рамках программ логицизма и формализма. Результатом этого анализа явился идеал формализованного доказательства.

Интуиционисты также не остались в стороне от осмысления логической интуиции. Однако это осмысление было предпринято ими с целями, противоположными тем, которые ставили перед собой представители программ Гильберта и логицизма. Если последние желали оправдать исторически сформировавшуюся логическую интуицию, то Брауэр и его последователи хотели продемонстрировать, что эта интуиция ненадежна, и ненадежность является ее сущностной, а не поверхностной характеристикой, и что поэтому наиболее сильные средства классической логики типа закона исключенного третьего, представляющие в явном виде «фундаментально ненадежные» элементы логической интуиции и являющиеся, если можно так выразиться, той «ложкой дегтя», которая портит всю «бочку меда» допустимых средств рассуждения — не только математического рассуждения, но и рассуждения любого рода — должны быть беспощадно выброшены из арсенала человеческой культуры. Брауэр писал: «Интуиционизм, с одной стороны, утончает логику, а с другой стороны — развенчивает логику как источник истины» (4). Что касается «развенчивания» логики, то здесь имеется в виду, во-первых, сказанное нами выше, а во-вторых, — мнение интуиционистов, согласно которому логика представляет собой не инструмент научного исследования, не фундамент его, а «побочный продукт», «надстройку» над ним. А под «уточнением» логики, видимо, понимается разработка интуиционистской логической теории, другими словами, приближение логики — как надстройки над интуиционистской математикой — к конструктивной основе математического мышления. Хотя цели, которые ставили перед собой Гильберт и интуиционисты в поисках надежных (допустимых) логических средств, были во многом противоположны (5), результаты поисков, как известно, оказались сходны: финитные средства Гильберта в значительной степени совпадали со средствами интуиционистской логики.

Понятие формализованного доказательства, выработанное в результате анализа логической интуиции и представляющее собой современный

эталон математической строгости, не стоит переоценивать, поскольку его применение ограничено рамками полностью формализованных теорий, рамками, в пределы которых развивающееся математическое знание в принципе не может быть заключено, о чем, в частности, свидетельствуют результаты Геделя, Тарского и др. Эти результаты, разумеется, не сводят на нет значение формализованных доказательств, а лишь уточняют сферу их применимости. Ясно поэтому, что понятие необходимой (и достаточной) степени строгости доказательства различается в зависимости от типа задач, которые стоят перед тем или иным математиком. Можно сказать, что состояние наличной на сегодня математики в отношении строгости ее методов «в свертке» отражает ее историческое развитие. Именно с этим обстоятельством связано различие требований, предъявляемых к строгости методов оформления решений задач различных типов: один вид строгости — полная формализация объектной теории — для математического доказательства непротиворечивости, другой — для задач, решаемых математиками с целью обеспечения «надежности мостов» (Ван Хао). Одной из важнейших методологических задач, стоящих перед математиком в ходе его работы, является нахождение оптимального пути между Сциллой бесполезной строгости и Харибдой неразборчивости в уровне строгости используемых средств.

Если значение логической строгости в *оформлении результата* поиска математической истины трудно переоценить (6), то ее роль в процессе самого этого *поиска*, т.е. в процессе развития содержания математического знания, очень часто является весьма скромной. Не следует переоценивать значение для открытия математических истин не только формализации (как «высшего эталона строгости»), но и логической строгости «низших» уровней. В частности, доказательство как стройная цепь логически взаимосвязанных суждений, завершением которой является доказываемый тезис, — это скорее результат, итог работы математика, а не инструмент поиска новых истин. Истина с помощью доказательства часто лишь оформляется, а не открывается. Критерий формальной (логической) строгости не применим к процессу открытия нового в математике и, в частности, к выбору некоторой формальной системы с целью формализации той или иной теории.

Г. Крайзель, отмечая, что роль формализации при анализе понятий всегда должна быть вспомогательной, выделяет между строго формальными и интуитивно-расплывчатыми методами промежуточную область принципов содержательного анализа интуитивных понятий, предпринимаемого с целью более или менее четкого описания их свойств. Для обозначения этой области он использует термин «неформально строгое» (7). Вопрос о неформально строгом — это, в частности, вопрос о корректности аксиоматической характеристики некоторого понятия, которую мож-

но рассматривать как итог неформально строгого анализа интуитивно-содержательных представлений.

Ранее мы говорили, что логическая строгость часто представляет собой лишь орудие оформления результата, полученного с помощью нестрогих, интуитивных, правдоподобных соображений. Это так. Но не нужно думать, что подобное «оформление» всегда является простым и малотворческим делом. Напротив, случается, что содержательно-интуитивные соображения позволяют сформулировать очевидную, «лежащую на поверхности» теорему, для доказательства которой требуется разработка строгих и иногда очень сложных методов. В подобных случаях на оформление результата расходуется гораздо больше интеллектуальной энергии, чем на его формулировку. В качестве примера можно привести одну из важных теорем топологии Евклидовой плоскости, которая утверждает, что простая замкнутая кривая делит плоскость на две области — внутреннюю и внешнюю по отношению к этой кривой (теорема Жордана). Трудность доказательства этой теоремы связана с тем, что «простая замкнутая кривая» является образцом понятия, столь же сложного в его полной общности, сколь просты и прозрачны примеры, породившие его. Попытки уточнения этого понятия, предпринимавшиеся в ходе поиска доказательства, ввели математиков в высокоабстрактную сферу неочевидного. При чем творческое значение содержательных соображений в данном случае сводится лишь к тому, что если бы не было «провокации» со стороны интуитивно очевидных фактов, то вхождение в данную область абстрактно-неочевидного могло бы не состояться вообще.

Сходным образом неочевидную высокоабстрактную теорему можно открыть лишь в ходе попыток доказательства другой, более очевидной теоремы. Мы не можем стремиться доказывать неочевидное. Точнее говоря, начальным импульсом нашей работы не может быть стремление доказать неочевидное: нельзя «ни с того, ни с сего» сформулировать неочевидное предположение (кандидата в теорему), а затем начать его доказывать. Исходным толчком для работы математика могут быть, скажем, такие задачи: доказать что-то «очевидное» (подобное теореме Жордана); разрешить проблему, которую ставит перед математикой та или иная наука; разрешить некую стандартную (часто разрешавшуюся в аналогичных теориях) математическую или метаматематическую проблему, например, найти для данной теории разрешающую процедуру. В ходе решения подобных проблем перед математиком в качестве «побочной» (вспомогательной) задачи, появление которой провоцируется чисто логическими соображениями, приходящими в голову в ходе решения исходной проблемы, может встать задача сформулировать и доказать некоторое неочевидное предложение (теорему), которое будет носить более общий и фундаментальный характер, чем теорема, являющаяся исходной целью. И это не удивитель-

но, поскольку решение более конкретной задачи часто логически зависит от разрешения более фундаментальной проблемы. Ясно, что «оформление результатов» в математике — уточнение определений, поиск доказательств уже сформулированных предположений и т. п. — может носить в высшей степени творческий характер и приводить к открытию нового. Таким образом, если, с одной стороны, роль строгости в математике не нужно переоценивать, то, с другой стороны, ее нельзя недооценивать.

В логике под дедуктивным доказательством понимается, во-первых, процесс обоснования истинности некоторого суждения посредством установления отношения логического следования между ним и суждениями, истинность которых уже установлена, и, во-вторых, итог этого процесса — последовательность суждений, связанных отношением логического следования. Помимо логического, существует также психолого-прагматическое понимание доказательства, при котором его цель видят прежде всего в том, чтобы убедить других людей в справедливости некоторого тезиса. Разумеется, многие содержательные доказательства удовлетворяют обоим пониманиям. В значительной степени сходную, но более «заостренную», классификацию пониманий доказательства предлагает Д. Пойа, выделяющий два крайних подхода к доказательству: 1) доказательство — это такая процедура, каждый «шаг» которой должен содержательно-интуитивно осмысляться (это понимание возводится им к Декарту); 2) доказательство представляет собой чисто формальную «игру» с символами (такого понимания математического доказательства, по его мнению, придерживался Гильберт) (8). Сам Пойа склоняется к психолого-прагматическому пониманию доказательства, что, видимо, обусловлено дидактической направленностью его известных исследований, посвященных эвристике в математике.

Прежде чем доказывать что-либо, нужно сформулировать более или менее правдоподобное предположение, заслуживающее доказательства. Подобные предположения получаются «в основном тем же способом, каким обычные люди или ученые, работающие в какой-нибудь нематематической области, получают свои. Мы собрали относящиеся к вопросу наблюдения, исследовали и сравнили их, подметили отрывочные закономерности, колебались, спотыкались, и в конце концов нам удалось *соединить разрозненные детали в явно многозначительное целое*» (9). Иначе говоря, «кандидатов в математические закономерности можно найти посредством наблюдения над конфигурациями символов (знаков на бумаге, «туманных пятен» перед умственным взором и т. п.), представляющими собой экономный и легко обозримый способ «материализации», группировки и преобразования математических абстракций, с которыми мы имеем дело. Но после того как закон (точнее, «кандидат» в законы. — В. К.) найден, вы должны спросить себя: Почему это так? Как это можно объяснить?»

(10). Встает вопрос о строгом доказательстве. Не исключено, что в ходе его поиска «кандидат в теорему» может претерпеть столь существенное изменение, что мы в конце концов докажем совсем не то, что намеревались доказать.

Поиск строго логического доказательства осуществляется с помощью правдоподобных (эвристических) рассуждений, в качестве фундаментальной схемы которых Пойа указывает: $(*)A \supset B, B \vdash A$ более правдоподобно (11). От эвристических правдоподобных рассуждений, способствующих поиску доказательства, к собственно доказательству, как совершенно справедливо считает Пойа, имеется непрерывный переход. В качестве модели формального смысла этого перехода можно представить постепенную трансформацию схемы вида $(*)$ в схему доказательного рассуждения: $(**)A = B, B \vdash A$. «Представим себе, что... (в первой посылке схемы $(*)$). — B . К.) B без A становится все менее и менее правдоподобным, в пределе, когда B без A становится невозможным, из истинности B следует истинность A ... Таким образом, в пределе A и B взаимно имплицируют друг друга» (12). А схема $(*)$ превращается в схему $(**)$.

Указывая, что «индуктивная фаза предшествует доказательной фазе» (13), Пойа среди прочего подчеркивает связь между обычной (эмпирической) индукцией и методом математической индукции, который, как известно, играет большую роль в математике. Эта связь, по его мнению, выражается в следующем: 1) обычная индукция может наводить на доказательство методом математической индукции; 2) математическая индукция имеет значение и для индуктивных (в обычном смысле слова) наук. Против первого пункта — «математическая индукция часто возникает как заключительный шаг или последняя фаза индуктивного исследования, и в этой последней фазе часто используются наводящие соображения, возникшие в предыдущих фазах» (14), — возражать не приходится. Второй же пункт, как нам кажется, требует определенной корректировки. Но прежде чем осуществить ее, позволим себе привести сравнительно длинную цитату, которая исчерпывающим образом разъясняет позицию Пойа по этому пункту: «Исследуя предположение, мы рассматриваем различные случаи, к которым это предположение должно быть применимо. Мы хотим увидеть, является ли соотношение, утверждаемое предположением, *устойчивым*, т.е. независимым от изменения случаев, не нарушаемым таким изменением. Наше внимание, таким образом, естественно, обращается к *переходу* от одного случая к другому. “Что посредством центростремительной силы планеты могут удерживаться на некоторых орбитах, мы можем легко понять, если рассмотрим движение брошенных тел”, — сказал Ньютон, и затем он вообразил камень, который бросают со все большей и большей начальной скоростью до тех пор, пока его траектория не обойдет вокруг Земли, как траектория Луны... Итак, Ньютон ясно

себе представляет непрерывный переход от движения брошенного тела к движению планеты. Он рассматривает переход между двумя случаями, к которым закон всемирного тяготения, доказательство которого он предпринял, должен быть одинаково применим. Любой начинающий, пользующийся математической индукцией для доказательства какой-нибудь элементарной теоремы, поступает в этом отношении подобно Ньютону: он рассматривает переход от n к $n + 1$, переход между двумя случаями, к которым доказываемая теорема должна быть одинаково применима» (15). Другими словами, по мнению Пойа, метод идеализации, использованный в данном случае Ньютоном, основан на математической индукции. Но здесь вкралось определенное недоразумение. Метод идеализации вообще и понятие «скачка к пределу», использованное Ньютоном, в частности, существенным образом основаны на использовании абстракции актуальной бесконечности — осуществимости. В лучшем случае можно считать, что метод идеализации является результатом своеобразного синтеза абстракций потенциальной и актуальной бесконечности (16). А метод математической индукции, как известно, использует лишь абстракцию потенциальной бесконечности. Так что Пойа, считая метод идеализации сводимым к методу математической индукции, допустил определенную некорректность.

Большую роль в поисках доказательств теорем содержательных математических теорий, как представляется, играют внушения очень часто лишь в малой степени осознаваемых методологических «предрассудков» и «предубеждений» математика. Это обстоятельство, как нам кажется, является одной из важнейших причин феномена, описанного Лакатосом: «Проверка обычного (содержательного. — В. К.) доказательства часто представляет очень деликатное предприятие, и, чтобы напасть на “ошибку”, требуется столько же интуиции и счастья, сколько и для того, чтобы натолкнуться на доказательство; открытие “ошибок” в неформальных доказательствах иногда может потребовать десятилетий, если не столетий» (17). Квалификация определенного типа аргументации словом «ошибка» — не зря это слово поставлено Лакатосом в кавычки! — по истечении «столетий», после того, как было предложено некоторое доказательство, часто является результатом смены интуитивных «предубеждений», формирующих критерии приемлемости тех или иных методов доказательства, которыми математик руководствуется в своей работе.

В своей замечательной книге, посвященной доказательствам и опровержениям в математике, Лакатос среди прочего убедительно показывает, что для понимания принципов развития содержательной математической теории большое значение имеет уяснение как различия между доказательством и анализом доказательства, так и соответствующего различия строгости доказательства и строгости анализа доказательства

(18). Анализ доказательства устанавливает, *что именно* доказывает доказательство. Часто именно анализ доказательства, представляющий собой метатеоретическую (в широком смысле слова) процедуру, приводит к обнаружению его опровержения. Начиная с XIX в., отмечает Лакатос, революции строгости в математике отзывались как на строгости доказательств, так и на строгости их анализа: «При каждой “революции строгости” анализ доказательств проникал все глубже в доказательства вплоть до “обосновательного слоя” хорошо знакомого основного знания, где верно правило кристально ясная интуиция, строгость доказательства, а критика изгонялась. Таким образом, *различные уровни строгости отличаются только местом, где они проводят линию между строгостью анализа доказательства и строгостью доказательства, т. е. местом, где должен остановиться критицизм и должно начаться подтверждение*» (19). Ярко образное описание на конкретных примерах из истории доказательств простой стереометрической теоремы о соотношении сторон, вершин и граней многогранника, взаимосвязи теоретического (доказательства) и метатеоретического (анализ доказательства) аспектов развития содержания математического знания, выявление той роли, которую эта взаимосвязь играет в истории математики начиная с XIX в., убедительный показ существенности метатеоретического аспекта для открытия нового в математике представляются нам большими достижениями Лакатоса в области философии математики и логики.

Проблемами строгости доказательства, связанными с рассмотрением структуры возможных типов доказательства, занимается, как известно, логика. Вопросы, связанные с иерархизацией возможных типов доказательств, представляют для нас определенный интерес.

Логикой устанавливается следующая иерархия, отражающая нарастающие степеней косвенности доказательств: 1) **прямое доказательство** — степень косвенности может считаться равной нулю; 2) **слабое доказательство** позволяет доказывать лишь импликации, консеквент которых начинается со знака отрицания и не позволяет доказывать, например, выражения вида (*) $A \supset (\sim A \supset B)$ и т. п.; 3) **конструктивное косвенное доказательство** — с помощью этого доказательства выражения вида (*) уже доказуемы, но не доказуемы, скажем, выражения вида $AV \sim A$, $\sim \sim A \supset A$ и т. п.; 4) **сильное косвенное доказательство** представляет собой верхний уровень иерархии и позволяет доказывать выражения, «материализующие» структуру любого закона классической логики (20). Если вспомнить, что точность в математике «расщепилась» на логическую строгость и интуитивно-конструктивную очевидность, то длинную иерархию можно считать, с одной стороны, выражением степеней ослабления очевидности, а с другой — выражением степеней усиления «чисто логических» элементов в доказательствах. Эта иерархия отража-

ет возрастание абстрактности методов познания. Высший представитель ее — сильное косвенное доказательство, являющееся, как известно, логической основой введения столь сильных абстракций, как абстракция актуальной бесконечности, — знаменует собой, можно сказать, взлет человеческой мысли в сферу «чистой абстракции», поскольку основывается только на принципе непротиворечивости, точнее говоря, самым «сильным» образом использует этот принцип — не «выводится» из него, но, предполагая его в качестве своего фундамента, возводит на нем самую грандиозную надстройку по сравнению с другими типами доказательств. Доказательство утверждения A средствами сильного косвенного доказательства, как известно, равносильно выведению противоречия из допущения $\sim A$. По существу любой тип косвенного доказательства основан на принципе, или, лучше сказать, представляет собой более или менее сильное воплощение принципа: положение, противоположное положению, приводящему к противоречию, само не противоречиво и, следовательно, допустимо с логической точки зрения (доказуемо).

Как известно, классическая математика широко использует косвенное доказательство при установлении справедливости так называемых чистых теорем существования. Против аргументации подобного рода, как мы знаем, резко возражали интуиционисты, принципы которых допускают лишь косвенные доказательства отрицательных высказываний (слабое косвенное доказательство). Однако в кругах, близких интуиционистам, встречаются еще более «ригористические» настроения. Так, например, Г. Грисс, соглашающийся с основными идеями Брауэра о природе математики, считает, что *любому* математическому понятию должно соответствовать некоторое актуально выполнимое построение. Если же построение невозможно, то понятие должно быть отброшено как неясное. С этой точки зрения, например, не допустимо доказательство теоремы о несуществовании круглого квадрата посредством предположения существования такого квадрата (и последующего выведения противоречия), приемлемое с точки зрения Брауэра, так как это предположение не имеет ясного смысла, поскольку оно никогда не может быть реализовано. Исходя из такого рода соображений, Грисс вообще отвергает использование в математике понятия отрицания, а вместе с ним и слабого косвенного доказательства (21). Стоит отметить, раз уж об этом зашла речь, что позиция Грисса представляется более последовательной, чем позиция Брауэра. Любое косвенное доказательство, в том числе и слабое, эквивалентно апелляции к непротиворечивости доказываемого положения, основанием для провозглашения которой является фиксация противоречивости противоположного ему положения. Если стоять на последовательно интуиционистской точке зрения, т. е. сводить математические операции к созерцаниям в «чистой» интуиции, то как можно представить себе (в интуитивном созер-

цании) противоречие? Его можно лишь «записать», «высказать» и т. п., т. е. выразить в языке. Но язык, согласно Брауэру, это нечто такое, что совсем не обязательно для продуктивной математической деятельности. Даже если он и отражает ее, то, по мнению Брауэра, неточно. Во всяком случае сначала должны быть математические факты, а потом они могут быть облечены в языковую оболочку, которая по необходимости будет для них тесна. Но какие факты, приемлемые с интуиционистской точки зрения, облачаются в оболочку пары противоречащих друг другу высказываний? Короче говоря, нам кажется, что если интуиционизм принимает в какой бы то ни было форме косвенное доказательство, то он обнаруживает непоследовательность.

Однако, как бы там ни было, пусть интуиционисты во многом не правы и не последовательны, одна из важнейших заслуг этого направления в математике — выявление сомнительности (малой информативности) самых сильных логических средств классической математики (косвенного доказательства и родственных ему принципов) (22). В дополнение к интуиционистской критике подобных средств классической логики, разумеется, лишь отчасти солидаризируясь с нею, можно указать на следующие обстоятельства, заставляющие сомневаться в принципе косвенного доказательства: 1) по существу это доказательство апеллирует лишь к непротиворечивости описания некоторого положения дел, на основании фиксации которой можно сделать лишь заключение о логической возможности этого положения, а из косвенного доказательства — явно или неявно — делается вывод о существовании рассматриваемого положения дел (из более «слабого» — возможности существования — делается вывод о более «сильном» — существовании) (23); 2) сомнителен используемый этим доказательством принцип, согласно которому положение, противоположное приводящему к противоречию, само не противоречиво (24). Другими словами, пусть $\sim A$ ведет к противоречиям, но на основании чего (кроме того, что $\sim A$ ведет к противоречиям) мы отсюда делаем вывод, что A не ведет к ним?

Разумеется, критические замечания в адрес косвенного доказательства не умаляют большой эвристической ценности этого метода: косвенная аргументация может рассматриваться как обнадеживающий промежуточный результат на пути поисков более эффективного обоснования некоторого положения.

¹ Brouwer L. Intuitionism and Formalism // Philosophy of Mathematics. New Jersey, 1964. P. 67.

² Фройденталь Г. Математика как педагогическая задача. В 2 ч. Ч. 1. М., 1982. С. 90.

³ Крайзель Г. Исследования по теории доказательств. М., 1981. С. 67.

⁴Brourwe L. Consciousness, Philosophy and Mathematics // Philosophy of Mathematics. New Jersey, 1964. P. 84.

⁵Гильберт искал *надежную основу* математических рассуждений, а интуиционисты — *надстроечную* логическую теорию, допустимую в качестве более или менее правильного, но во многом приблизительного, причем эта приблизительность, по мнению интуиционистов, имеет неискоренимо-принципиальный характер — отображения «ходов» конструктивной математической мысли.

⁶Логическая строгость особенно важна при оформлении доказательств теорем, говорящих о «невозможности» чего-либо (например, о неразрешимости в радикалах уравнений пятой степени, о невозможности трисекции угла при помощи циркуля и линейки и т. п.).

⁷Kreisel G. Informal Rigour and Completeness Proofs // Problems in the Philosophy of Mathematics. Amsterdam, 1967, P. 84.

⁸См.: Поля Д. Математическое открытие. М., 1970. С. 318.

⁹Поля Д. Математика и правдоподобные рассуждения. М., 1975. С. 89.

¹⁰Поля Д. Математическое открытие. С. 96.

¹¹Поля Д. Математика и правдоподобные рассуждения. С. 231.

¹²Там же. С. 270.

¹³Там же. С. 105.

¹⁴Там же. С. 131.

¹⁵Там же. С. 131–132.

¹⁶В определенном смысле абстракция актуальной бесконечности, предполагающая «завершение» процессов (осуществление «последнего шага» в них), которые с точки зрения абстракции потенциальной бесконечности принципиально не завершимы (после очередного шага всегда возможен следующий шаг), включают в себя абстракцию потенциальной бесконечности, а именно в том смысле, что первая абстракция «сильнее» последняя.

¹⁷Лакатос И. Доказательства и опровержения. М., 1967. С. 9.

¹⁸Там же. С. 79.

¹⁹Там же. С. 80.

²⁰Об иерархии логических систем, отражающих нарастание степеней косвенности доказательств от допустимых интуиционистами вплоть до самых сильных, приемлемых классической математикой, см. Серебрянников О. Ф. Эвристические принципы и логические исчисления. М., 1970. С. 164–224. Иногда «настоящим» косвенным доказательством считается лишь сильное косвенное доказательство, а слабое и конструктивное косвенное доказательство считаются «ненастоящими» доказательствами от противного (см.: Фройденталь Г. Математика как педагогическая задача. Ч. 2. М., 1983. С. 165–169). Р. Курант и Г. Роббинс называют сильное косвенное доказательство «существенно косвенным» (Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика: элементарный очерк идей и методов. М.; Л., 1947. С. 136). В дальнейшем, за исключением специально оговоренных случаев, упоминая косвенное доказательство, мы будем иметь в виду сильное косвенное доказательство, более того — совокупность всех аналогичных средств классической логики («закон снятия двойного отрицания», «закон исключительного третьего» и т. п.).

²¹См.: Гейтинг А. Интуиционизм. М., 1965. С. 149.

²²Интересный пример, показывающий, насколько больше можно узнать из прямого доказательства теоремы в формальном исчислении равенства, чем из косвенного доказательства ее, см.: Справочная книга по математической логике: В 4 ч. / Под ред. Дж. Варвайса. Ч. IV. Теория доказательств и конструктивная математика. М., 1983. С. 84–99.

²³Иначе говоря, установление непротиворечивости некоторой концепции само по себе говорит лишь об абстрактной, а не реальной возможности существования неко-

торого положения дел. Тем более на основе установления непротиворечивости нельзя говорить о действительном существовании описываемого этой концепцией положения дел, если только не принимать в качестве реально существующего мир платоновских объектов. В этой связи можно заметить, что отождествление существования в математике с непротиворечивостью содержит в себе вполне реальную возможность платонистской интерпретации математических абстракций, «подталкивает» к подобной интерпретации их.

²⁴Семантическим эквивалентом этого принципа является столь сильная абстракция классической логики, как «принцип двужначности» (всякое высказывание либо истинно, либо ложно).