Н. И. Стешенко

Первопорядковая логика направленности изменения. Часть II: теорема полноты

Аннотация: В выпуске 7 «Логико-философских штудий» была опубликована первая часть статьи «Первопорядковая логика направленности изменения: аксиоматическое исчисление», где изложены семантика и синтаксис логики направленности изменения. Во второй части статьи доказываются теорема корректности и теорема семантической полноты первопорядковой логики направленности изменения.

Ключевые слова: первопорядковая логика направленности изменения, исчисление предикативов, теорема корректности, теорема семантической полноты, непротиворечивость.

Abstract: The 1st part of article «First-order logic of direction of the change: axiomatic calculus» was published in «Logical-philosophical studies 7». Semantic and syntax of the logic of direction of the change are stated in the 1st part. In the 2nd part soundness theorem and theorem of the semantical completeness are proved.

Keywords: completeness theorem, soundness theorem, predicate calculus, first-order logic of direction of the change, consistency.

В первой части статьи («Логико-философские штудии», вып. 7) детально излагаются семантика и синтаксис первопорядковой логики направленности изменения, дается аксиоматизация этой логики. Предполагается знакомство, по меньшей мере, с основными семантическими и синтаксическими понятиями первопорядковой логики направленности изменения.

Теорема полноты. Каждая формула A логики R_Q доказуема, если и только если A общезначима: $\forall A\ (\vdash A \Leftrightarrow \models A)$.

Очевидно, что для доказательства теоремы полноты надо доказать две следующие теоремы:

Теорема 1. $\forall A\ (\vdash A \Rightarrow \models A)$.

Теорема 2. $\forall A\ (\models A \Rightarrow \vdash A)$.

Знаки $\forall$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ означают квантор общности, импликацию и эквиваленцию метаязыка логики R_Q, символы $\vdash$ и $\models$ по-прежнему обозначают соответственно метапредикаты «быть доказуемой формулой» и «быть общезначимой формулой».

Теорема 1. $\forall A\ (\vdash A \Rightarrow \models A)$.

Доказательство. Аксиомы логики R_Q принимаются в качестве исходных доказуемых формул. Достаточно показать, что все аксиомы общезначимы, а правила вывода переносят свойство «быть общезначимой формулой» с посылок на заключения применения этих правил. Используем метакванторы по моделям М и приписываниям значений переменным Б.

Продемонстрируем проверку общезначимости аксиом на одной аксиоме, остальные проверяются сходным образом.

Проверим общезначимость аксиомы $\models \forall x E A \to E \forall x A$.

Извлечем из части I справочный материал, на который будем ссылаться при доказательстве общезначимости этой аксиомы:

1. (8.1). $[A]^{I,Б} \to [B]^{I,Б} = 3 \Leftrightarrow ([A]^{I,Б} = 3 \Rightarrow [B]^{I,Б} = 3)$.
2. (6.2). $[EA]^{I,Б} = 0 \Leftrightarrow [A]^{I,Б} = 2$ или $[A]^{I,Б} = 0$.
3. (9.4). $[\forall x A]^{I,Б} = 0 \Leftrightarrow (\exists a \in D^n_0)\ A(x/a) = 0$.
4. (9.2). $[\forall x A]^{I,Б} = 2 \Leftrightarrow (\exists a \in D^n_2)\ A(x/a) = 2$ и $[(\forall в \in D^n_2)\ A(x/в) = 2$ или $\forall в \in D^n_3)\ A(x/в) = 3]$.
5. (9.1). $[\forall x A]^{I,Б} = 3 \Leftrightarrow (\forall a \in D^n_3)\ A(x/a) = 3$.
6. (6.1). $[EA]^{I,Б} = 3 \Leftrightarrow [A]^{I,Б} = 3$ или $[A]^{I,Б} = 1$.

0. $\forall М \forall Б [\forall x E A \to E \forall x A]^{I,Б} = 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\forall М \forall Б [\forall x E A]^{I,Б} = 3 \Rightarrow \forall М \forall Б [E \forall x A]^{I,Б} = 3)$ – 1.(8.1).
1. $\forall М \forall Б [\forall x E A]^{I,Б} = 3$ — пос.
2. $\exists М \exists Б [E \forall x A]^{I,Б} \neq 3$ — доп.

3.1. $[E \forall x A]^{I,Б} = 2$; или 3.2. $[E \forall x A]^{I,Б} = 1$; или 3.3. $[E \forall x A]^{I,Б} = 0$ — из 2.

3.1 и 3.2 противоречивы, так как в силу пропозициональной логики любая формула ЕД не может принимать истинностные значения «2» и «1» при любом возможном распределении истинностных значений подформулы Д.

4.1. $[\forall x A]^{I,Б} = 0$; или 4.2 $[\forall x A]^{I,Б} = 2$ — из 3.3 по 2.(6.2).

5. $[\forall x A]^{I,Б} = 0 \Leftrightarrow \exists a_i \in D_0\ (A(x/a_i) = 0)$ — из 4.1 по 3.(9.4).

6. $[\forall x A]^{I,Б} = 2 \Leftrightarrow \exists a_к \in D_2 (A(x/a_к) = 2)$ и $[\forall b_i \in D \{A(x/b_i) = 2$; или $A(x/b_i) = 3\}]$. — из 4.2 по 4.(9.2).

Дальше надо разобрать две альтернативы, а именно (1, 5) и (1,6). Согласно 1 (т. е посылке), $[\forall x E A]^{I,Б} = 3$ в каждой модели М и при каждом приписывании Б.

7. $[\forall x E A]^{I,Б} = 3 \Leftrightarrow \forall c_i \in D_3 (EA(x/c_i) = 3)$ — из 1 по 5.(9.1).

7.1 $\forall c_i \in D_3 (A(x/c_i) = 3)$; или 7.2 $\forall c_i \in D_1 (A(x/c_i) = 1)$ — из 7 по 6.(6.1).

Отметим, что константа c_i при произвольном i равна прежде введенным константам, т. е. $c_i = a_i$, $c_i = b_i$, $c_i = a_к$.

8. $A(x/c_i) = 3$, где $c_i = a_i$, и $A(x/a_i) = 0$ противоречат 7.1 и 5; т. е. формула на одной и той же константе принимает различные истинностные значения.

9.1. $A(x/c_i) = 3$, где $c_i = a_к$, $c_i = b_i$, и $(A(x/a_к) = 2$ и $A(x/b_i) = 2)$ противоречат 7.1 и 6.

9.2. $A(x/c_i) = 3$, где $c_i = a_к$, $c_i = b_i$, и $(A(x/a_к) = 2$ и $A(x/b_i) = 3)$ противоречат 7.1 и 6.

10. $A(x/c_i) = 1$, где $c_i = a_i$, и $A(x/a_i) = 0$ противоречат 7.2 и 5.

11.1. $A(x/c_i) = 1$, где $c_i = a_к$, $c_i = b_i$, и $(A(x/a_к) = 2$ и $A(x/b_i) = 2)$ противоречат 7.2 и 6.

11.2. $A(x/c_i) = 1$, где $c_i = a_к$, $c_i = b_i$, и $(A(x/a_к) = 2$ и $A(x/b_i) = 3)$ противоречат 7.2 и 6.

Таким образом, допущение 2 во всех возможных случаях ведет к противоречию. Значит, верно $\forall М \forall Б[Е\forall xA]^{I,Б}=3$.

Покажем, что правила вывода сохраняют общезначимость. Продемонстрируем это на двух правилах.

Пусть посылки правила П1 общезначимы, т. е. $\models A$ и $\vdash TA \to C$.

Надо показать, что $\models C$. Если $\models A$, то и $\models TA$ (на основании 5.1 части I: $[TA]^{I,Б} = 3 \Leftrightarrow [A]^{I,Б} = 3$), но тогда $\models C$ в силу семантических свойств импликации.

Пусть посылка правила П4 (правило обобщения) общезначима, т. е. $\models A(x)$. Это значит, что при любом приписывании Б значений переменной x в любой модели М формула A(x/a) принимает значение 3, т. е.

$$\forall Б, \forall М, \forall a \in D_3\ A(x/a) = 3,$$

но это и означает по определению общезначимой формулы и определению формулы истинной в модели, что $\models \forall xA$.

Таким образом, имеем: (a) — аксиомы логики R_Q общезначимы; (b) — правила вывода логики R_Q сохраняют свойство общезначимости.

Доказательство теоремы завершим индукцией по длине доказательства на основании (a) и (b).

Базис индукции. Пусть $\vdash A$ и доказательство имеют длину 1. Это значит, что A является аксиомой, и потому $\models A$ в силу (a).

Индукционный шаг. Допустим, что утверждение «$\vdash A \Rightarrow\ \models A$» обосновано для любой формулы A, для которой существует доказательство длины $m < n$. Пусть $\vdash A$ и $A_1, \ldots, A_{n+1}$, т. е. длина доказательства формулы A равна $n + 1$ (другими словами, A есть A_{n+1}). Тогда имеются два случая: (1) A_{n+1} есть аксиома; (2) A_{n+1} получена из A_m, $m < n$ если правило однопосылочное, и A_{n+1} получена из A_m, A_k, к, $m < n$, если правило двухпосылочное. В случае (1) имеем $\models A$ в силу (a); в случае (2) также получим $\models A$, но на основании (b).

Следствие 1. Аксиоматическая система логики R_Q непротиворечива.

Логика R_Q является *логикой с отрицанием*, т. е. в языке этой логики для каждой правильно построенной формулы A имеется правильно построенная формула, перед которой имеется отрицание, т. е. ~A. Назовем аксиоматическую систему логики R_Q *непротиворечивой*, если не имеется такой формулы A, что доказуема A и доказуема ~A.

Доказательство. Обычно непротиворечивость квантифицируемой первопорядковой логики доказывается методом сведения к непротиворечивости пропозиционального фрагмента этой логики[1]. Этот метод применим и к доказательству непротиворечивости аксиоматической системе логики R_Q.

[1] См., напр.: *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. М., 1984. С. 67–68. Особенно хорошо это доказательство изложено в книге: *Новиков П. С.* Элементы математической логики. М., 1973. С. 202–209.

Основная идея этого доказательства состоит в следующем. Все предикаты определены как области интерпретации, состоящей из одного элемента. Кванторные формулы вида $\forall xA(x)$ и $\exists xA(x)$ на такой области интерпретации эквивалентны высказыванию A(a), где «a» — константа, обозначающая элемент области интерпретации. A(a) заменяется символом высказывания пропозиционального языка этой логики, т. е. 0-местным предикатом. Если формула A имеет более одного аргумента, т. е. имеется $A(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ с кванторной приставкой или без нее, то $A(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ также заменяется символом высказывания. Если в предикатной формуле встречается собственный оператор логики направленности изменения, например оператор «У», тогда формулы вида $\forall x$УA(x), У$\forall x$A(x), $\exists x$УA(x), У$\exists x$A(x) становятся формулой вида УA(a). Тогда все аксиомы логики R_Q будут доказуемыми формулами, все правила вывода преобразуются в правила пропозициональной логики или доказуемые формулы, но пропозициональный фрагмент логики R_Q непротиворечив. Детали доказательства опускаются.

Теорема 2. $\forall A\ (\models A \Rightarrow\ \vdash A)$.

Доказательство. Вторая теорема является следствием двух лемм. Прежде чем сформулируем эти леммы, введем несколько полезных предварительных утверждений и предложений, нужных для доказательства теоремы 2.

Утверждения о свойствах выводимости (логики R_Q).

Напомним, что *выводом из* некоторого *множества формул(допущений)* называется конечная последовательность формул, в которой каждая из них является либо допущением, либо аксиомой, либо теоремой этой системы, либо получается из предыдущих формул этой последовательности по одному из правил вывода. Тот факт, что некоторая формула A выводима из множества формул, обозначим через $\Delta \vdash A$. Естественно, что мы постоянно имеем дело с языком логики R_Q, но это молчаливо подразумевается, т.е. специально не указывается.

Утверждение 1. Пусть Δ, Δ_1 — произвольные множества замкнутых формул, где $\Delta_1 \subset \Delta$. Тогда, если $\Delta_1 \vdash A$, то $\Delta \vdash A$.

Утверждение 2. Пусть Δ— возможно бесконечное множество формул и $\Delta \vdash A$. Тогда существует такое конечное множество Δ_1, что $\Delta_1 \subseteq \Delta$ и $\Delta_1 \vdash A$.

Утверждение 3. Пусть каждая формула C_i, $C_i \in \Delta_1$ выводима из Δ и пусть $\Delta_1 \vdash A$. Тогда $\Delta \vdash A$.

Доказательства этих трех утверждений такие же, как в двухзначном случае.

Сформулируем понятие противоречивого множества формул Δ. Множество Δ называется *противоречивым*, если существует формула A, такая, что $\Delta \vdash A$ и $\Delta \vdash \sim A$. В противном случае множество Δ называется *непротиворечивым*. Отметим, что формула A может быть формулой с оператором, т. е. A есть либо ТС, либо ВС, либо ИС, либо ЕС, либо УС. Тот факт, что множество Δ противоречиво, обозначим через $\Delta \vdash \bot$. Добавление к множеству Δ произвольной формулы A обозначается посредством $\Delta \cup \{A\}$, но мы будем пользоваться, как правило, сокращенной записью Δ, A

Предложение 1. (a). Если $\Delta \vdash \bot$ и C любая формула, то $\Delta \vdash C$; (b). Если $\Delta, {\sim}A \vdash \bot$, то $\Delta \vdash A$.

Доказательство (a). По условию имеем $\Delta \vdash {\sim}A$ и $\Delta \vdash A$ для некоторой формулы A. В логике R_Q доказуема формула вида $T{\sim}A \rightarrow (A \rightarrow C)$. По условию $\Delta \vdash {\sim}A$ и П1 получим $\Delta \vdash A \rightarrow C$; по правилу (Ус. ант.) имеем $\Delta \vdash TA \rightarrow C$, используя условие $\Delta \vdash A$ и П1 получим $\Delta \vdash C$.

Доказательство (b). По условию дано $\Delta, {\sim}A \vdash C$ и $\Delta, {\sim}A \vdash {\sim}C$. По доказуемой в логике R_Q формуле $T({\sim}A \rightarrow C) \rightarrow (T({\sim}A \rightarrow {\sim}C) \rightarrow A)$ и теореме дедукции, применяя П1, получим $\Delta \vdash A$.

Заметим, что пункт (b) также доказуем в виде: если $\Delta, A \vdash \bot$, то $\Delta \vdash {\sim}A$. Но для доказательства надо будет использовать тавтологию $T(A \rightarrow C) \rightarrow (T(A \rightarrow {\sim}C) \rightarrow {\sim}A)$. Этот вариант пункта (b) будет также использован.

Для доказательства теоремы $\forall A\ (\models A \Rightarrow\ \vdash A)$ нам надо доказать еще два предложения и несколько лемм.

Предложение 2 (*о расширении множества*). Пусть Δ есть множество формул, содержащее все теоремы логики R_Q, и пусть замкнутая формула ~A не выводима из Δ. Добавим к Δ в качестве аксиомы формулу A. Тогда множество Δ, A есть *непротиворечивое не*-($\Delta \vdash {\sim}A$).

Доказательство. Пусть Δ, A непротиворечиво, надо доказать, что не-($\Delta \vdash {\sim}A$). Допустим обратное: $\Delta \vdash {\sim}A$. Тогда на основании *утверждения 1* получим $\Delta, A \vdash {\sim}A$, так как Δ есть подмножество множества Δ, A. Ясно также, что из исходного условия получим $\Delta, A \vdash A$ (т. е. каждая аксиома выводима из самой себя и очевидна ее рефлексивность). Но тогда множество Δ, A противоречиво, что отрицает наше исходное условие.

Пусть не- ($\Delta \vdash {\sim}A$), надо показать, что Δ, A непротиворечиво. Допустим обратное, т. е. Δ, A противоречиво. Отсюда на основании *предложения 1*, в частности, получим $\Delta, A \vdash {\sim}A$, а по теореме дедукции имеем $\Delta \vdash A \rightarrow {\sim}A$. Но в логике R_Q доказуема формула $T(A \rightarrow {\sim}A) \rightarrow {\sim}A$. Значит, $\Delta \vdash {\sim}A$, что несовместимо с исходным условием.

Замечание. Если в доказательстве *предложения 2* формулу A везде заменить на ~A и обратно, то получим доказательство: Δ *~A* есть *непротиворечивое не- ($\Delta \vdash A$)*. Таким образом, это предложение позволяет нам без противоречия расширять множество Δ.

Заметим также, что *предложение* 2 справедливо, если бы в расширении множества в качестве аксиомы использовалась формула со свободной переменной. Но тогда вместо свободной переменной надо подставлять новые константы, так как в конце концов надо показать, что любое непротиворечивое множество замкнутых формул имеет модель.

Назовем множество формул Δ *полным*, если для любой замкнутой формулы A исчисления R_Q) $\Delta \vdash \sim A$ либо $\Delta \vdash A$.

Назовем множество формул Δ *максимально полным*, если оно непротиворечиво и присоединение к нему недоказуемой в нем формулы делает его противоречивым.

Предложение 3. Множество всех выражений исчисления R_Q счетно.

Доказательство здесь такое же, как и в классической квантифицируемой теории[2].

Лемма 1 (Линденбаума). Существует непротиворечивое полное расширение исчисления(теории) R_Q.

Обозначим R_Q через R_0

Доказательство. Пусть $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n, \ldots$ — пересчет всех формул языка R_Q. Определим последовательность исчислений (теорий) $R_0, R_1, \ldots, R_n, \ldots$ по следующему условию.

(a): $R_{n+1} = R_n$, если $R_n \vdash \sim \Phi_{n+1}$,

(b): $R_{n+1} = R_n \cup \{\Phi_{n+1}\}$, если не-($R_n \vdash \sim \Phi_{n+1}$).

Докажем индукцией по m, что каждый член построенной последовательности непротиворечив.

$m = 0$. R_0 есть непротиворечивое по условию.

Пусть $m = n+1$ и все исчисления $R_0, R_1, \ldots, R_n$ являются непротиворечивыми (индуктивное предположение). Если $R_n \vdash \sim \Phi_{n+1}$, то $R_{n+1} = R_n$ по условию (a), но по индуктивному предположению R_n непротиворечиво. Значит, R_{n+1} также непротиворечиво. Если не-($R_n \vdash \sim \Phi_{n+1}$), то $R_{n+1} = R_n \cup \{\Phi_{n+1}\}$ по (b). Тогда по *предложение 2 (о расширении множества)* R_{n+1} непротиворечиво.

Поскольку все R_m по условию построения упорядочены отношением включения $R_0 \subseteq R_1 \subseteq \ldots \subseteq R_n \subseteq \ldots$, образуем $R_* = \cup R_i$, $0 < i < \infty$. Покажем, что если каждое R_m непротиворечиво (это уже выше доказано), то R^* непротиворечиво. Допустим противоположное, т. е. R_* является противоречивым. Тогда ввиду конечности процедуры вывода (*утверждение 2 о выводимости*) существует формула Φ, и множества $\Delta_1, \Delta_2 \subset R_*$ такие, что $\Delta_1 \vdash \Phi$, $\Delta_2 \vdash \sim\Phi$. По построению R_m существует такой номер j, что $\Delta_1 \subset R_j$, $\Delta_2 \subset R_j$. Значит, $R_j \vdash \Phi$ и $R_j \vdash \sim\Phi$, но это противоречит вышедоказанному утверждению, что каждое R_m непротиворечиво. Значит, R_* непротиворечиво.

Докажем, что исчисление R_* является полным. Пусть Φ в пересчете имеет номер $n+1$, т. е. $\Phi = \Phi_{n+1}$. По построению исчисления R_{n+1} имеет место $R_{n+1} \vdash \Phi_{n+1}$ или $R_{n+1} \vdash \sim\Phi_{n+1}$. Значит, $R_* \vdash \Phi_{n+1}$ или $R_* \vdash \sim\Phi_{n+1}$.

---

[2] См., напр.: *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. М., 1984. С. 72–73.

Лемма 2*. Любое непротиворечивое расширение R_0 имеет модель со счетной областью.*

Теорему докажем методом Л. Генкина. Пусть исчисление R_i^+, $0 < i < \infty$ содержит замкнутую формулу вида $\exists xA(x)$. Исчисление R_i^+ назовем *теорией Генкина*, если для любой замкнутой формулы вида $\exists xA(x)$ существует такая константа «а», что $R_i^+ \vdash \exists xA(x) \to A(a)$. Или, в другой формулировке, справедливо такое утверждение: если $R_i^+ \vdash \exists xA(x)$, то $R_i^+ \vdash A(a)$ для некоторой константы «а» из расширенного языка R_Q. Семантический смысл формулы $\exists xA(x) \to A(a)$ состоит в следующем: если формула $\exists xA(x)$ истинна в **M**, то константа «а» из области интерпретации должна подтвердить это. Отсюда понятно, что в языке теории должен быть достаточный запас констант, так как область интерпретации состоит из констант языка анализируемой теории.

В случае логики R_Q формулировка теории Генкина несколько усложняется: кроме замкнутых формул вида $\exists xA(x)$ имеются замкнутые формулы вида $\exists x$ВA(x), $\exists x$ИA(x), $\exists x$УA(x), $\exists x$ЕA(x) и др.

Доказательство. Добавим к языку исчисления R_0 счетное множество новых индивидных констант $\{a_1, a_2, \dots\}$. Обозначим исчисление, расширенное константами, через R_0^+. Оно содержит все аксиомы и правила вывода исчисления R_0, но дополнительно содержит частные случаи аксиом, т. е. аксиомы, в которых вместо переменных подставлены константы. Докажем, что R_0^+ непротиворечиво. По условию леммы R_0 непротиворечиво. Допустим, что R_0^+ противоречиво, т. е. имеется формула Ф и ~Ф, которые доказуемы. Устраним в доказательстве, дающем противоречие, все константы и заменим их переменными, которые не встречались в этом доказательстве; придем к заключению, что R_0 противоречиво, что неверно. Значит, R_0^+ непротиворечиво.

Таким образом, будем считать, что R_0^+ имеет не более чем счетное множество предложений.

Добавим к R_0^+ счетное множество новых индивидных констант $\{b_1, b_2, \dots\}$. Заметим, что множество $\{b_1, b_2, \dots\}$ можно выбрать из множества $\{a_1, a_2, \dots\}$.

Пусть $\{Ф_n(x_n) | n \in \omega\}$ — список всех формул, с единственной свободной переменной исчисления R_0^+, где ω есть мощность множества натуральных чисел, и для каждого n формула $Ф_n(x_n)$ есть либо $A_n(x_n)$, либо Т$A_n(x_n)$, либо В$A_n(x_n)$, либо И$A_n(x_n)$, либо У$A_n(x_n)$, либо Е$A_n(x_n)$. Построим исчисление R_n^+ следующим образом: $R_n^+ = R_0^+ \cup \{\exists xФ_i(x_i) \to Ф_i(b_{i+1}) | (0 < i < n), n \in \omega\}$, где b_{i+1} не входит в R_{n-1}^+; и каждая формула $\exists xФ_i(x_i) \to Ф_i(b_{i+1})$ присоединяется в качестве аксиомы к каждому последующему исчислению R_n^+ начиная с исчисления R_0^+.

Докажем, что такое расширение R_0^+ непротиворечиво. Доказательство непротиворечивости всех расширений R_0^+ не зависит от того, какой вид имеет формула $Ф_n(x_n)$ [$A_n(x_n)$, $ТA_n(x_n)$ $ВA_n(x_n)$, $ИA_n(x_n)$, $УA_n(x_n)$, $ЕA_n(x_n)$], но для определения истинности в модели вид формулы, конечно, существенен.

Базис индукции. Допустим, что R_1^+ противоречиво, т. е. $R_1^+ \vdash \bot$, тогда на основе *предложения 1(пункт b)* имеем $R_0^+ \vdash \sim(\exists x Ф_0(x_0) \to Ф_0(b_1))$. Используя подстановку в тавтологии $Т\sim(A \to C) \to \sim C$ и $Т\sim(A \to C) \to A$, получим:

$$(1).\ R_0^+ \vdash \sim Ф_0(b_1);$$
$$(2).\ R_0^+ \vdash \exists x Ф_0(x_0).$$

Так как константа b_1 не входит в R_0^+, то заменим ее любой переменной — пусть «у», которая не участвует в выводе. По правилу обобщения получим $R_0^+ \vdash \forall y \sim Ф_0(y)$, на основании переименования связанной переменной имеем (3): $R_0^+ \vdash \forall x \sim Ф_0(x_0)$. На основании (2) и доказуемой формулы

$$\vdash Т\exists x Ф_0(x_0) \to \sim\forall x \sim Ф_0(x_0)$$

получим (4): $R_0^+ \vdash \sim\forall x \sim Ф_0(x_0)$. (3) и (4) несовместимы с утверждением, что R_0^+ непротиворечиво. Значит, R_1^+ непротиворечиво. Дальше легко указать индуктивное предположение и провести шаг индукции. Доказательство опускается ввиду его стандартного характера. Значит, все исчисления R_n^+ непротиворечивы, $1 < n < \infty$. Образуем объединение R_n^+ и обозначим его через R^*, т. е. $R^* = \cup R_n$, $0 \leq n \leq \infty$. По *лемме 1* это непротиворечивое расширение также будет полным.

Таким образом, мы имеем два факта: (1) — расширение исходного исчисления является непротиворечивым и полным и (2) мы имеем достаточно констант, чтобы проверить, что формула истинна в модели, если она действительно истинна, и у нас достаточно формул, чтобы выразить различные отношения между элементами области интерпретации, т. е. константами.

Область интерпретации **D** исчисления R_0^+ и его расширений состоит из счетного множества констант языка. Интерпретацией константы является сама константа. Интерпретацией предикатов исчисления R_0^+(а значит, и предикатов R_Q) являются множества, элементами которых являются константы или упорядоченные наборы констант.

Семантика первопорядковой логики направленности изменения была рассмотрена в части I. Дальше истинностное значение произвольной формулы А в модели **M** будем обозначать через $[A]^i_M$, где $i \in \{3, 2, 1, 0\}$. Знаки «$\Rightarrow$», «$\Leftrightarrow$» будут использоваться в качестве метаимпликации и метаэквиваленции.

Так как все теоремы исчисления R_0^+ являются теоремами исчисления R^*, то надо доказать, что любая замкнутая формула Ф исчисления R_0^+ истинна в модели **МФ** доказуема в R^*, т. е. надо доказать: $[Ф]^3_M \Leftrightarrow R^* \vdash Ф$.

Фактически будет построена модель (из констант) всех расширений теории R_0^+, т. е. для исчисления R^*. Но так как R^* есть полное непротиворечивое расширение $R_0^{\,i}$, то тем самым будет построена модель и для R_0^+.

Доказательство ведется индукцией по построению формулы Ф. Требование «быть замкнутой формулой» распространяется и на подформулы формулы Ф. В ходе доказательства это требование постоянно имеется в виду, но специально не оговаривается.

Определим для атомарной формулы исчисления R_0^+(а значит, и исчисления R_0) отношение между ее истинностными значениями в модели R_0^+ и доказуемостью следующим образом :

(1). $[P(a_1,\ldots a_n)]^3_M \Leftrightarrow R^* \vdash P(a_1,\ldots a_n)$.
(2). $[P(a_1,\ldots a_n)]^2_M \Leftrightarrow R^* \vdash ВP(a_1,\ldots a_n)$.
(3). $[P(a_1,\ldots a_n)]^1_M \Leftrightarrow$ не-$(R^* \vdash ВP(a_1,\ldots a_n)) \Leftrightarrow R^* \vdash ИP(a_1,\ldots a_n)$.
(4). $[P(a_1,\ldots a_n)]^0_M \Leftrightarrow$ не-$(R^* \vdash P(a_1,\ldots a_n)) \Leftrightarrow R^* \vdash {\sim}P(a_1,\ldots a_n)$.

Примем пункты (1) – (4) в качестве *базиса* индукции.

На основании (1) – (4) можно видеть, что если одна из формул множества {A, ВА, ИА,~A} доказуема, то остальные формулы из этого множества недоказуемы.

Допустим, что любая замкнутая формула A теории R_0^+ с меньшим числом связок, операторов и кванторов, чем у формулы Ф, истинна, в модели она доказуема R^*.

Рассмотрим три случая: (a) Ф есть одна из формул {~A, ТА, ВА, ИА, УА, ЕА}; (b) Ф есть $A \rightarrow C$; (c) Ф есть $\{\forall xA, \exists xA\}$.

Случай (a) имеет подслучаи.

(a1). Ф есть ~A. Надо доказать, что $[{\sim}A]^3_M \Leftrightarrow R^* \vdash {\sim}A$. Сначала проведем доказательство слева направо: $[{\sim}A]^3_M \Rightarrow R^* \vdash {\sim}A$. Пусть формула ~A истинна в модели, т.е. $[{\sim}A]^3_M$, тогда $[A]^0_M$. Но по индуктивному предположению имеем $R^* \vdash {\sim}A$, что и требовалось.

Отметим, что мы опустили «аргумент полноты» ввиду его регулярной повторяемости: «...тогда $[A]^0_M$». Но по индуктивному предположению (получим не-$(R^* \vdash A)$, но так как R^* полна, то имеем $R^* \vdash {\sim}A$. По контексту ясно, в каких случаях предполагается ссылка на полноту исчисления R^*. См. условие (3) и (4) отношения между истинностными значениями атомарной формулы в модели и ее доказуемостью. Дальше мы будем использовать просто выражение «по индуктивному предположению...», не вдаваясь при этом в то, что ясно из контекста доказательства.

Докажем, что $R^* \vdash {\sim}A \Rightarrow [{\sim}A]^3_M$. Пусть $R^* \vdash {\sim}A$ и неверно, что $[{\sim}A]^3_M$, т. е. $R^* \vdash {\sim}A$ и ($[{\sim}A]^2_M$, либо $[{\sim}A]^1_M$, либо $[{\sim}A]^0_M$). Проведем разбор трех случаев.

Пусть $R^* \vdash {\sim}A$ и $[{\sim}A]^2_M$, тогда $[A]^1_M$. Из $[A]^1_M$ по индуктивному предположению имеем $R^* \vdash ИA$. В исчислении R^* доказуема формула $\vdash Т{\sim}A \rightarrow (ТИA \rightarrow A)$. Дважды применяя правило отделения (П1), получим $R^* \vdash A$. Но с учетом $R^* \vdash {\sim}A$ приходим к заключению, что исчисление R^* противоречиво, что неверно (по лемме 1).

Пусть $R^* \vdash \sim A$ и $[\sim A]^1_M$, тогда $[A]^2_M$. Из $[A]^2_M$ по индуктивному предположению имеем $R^* \vdash BA$. В исчислении R^* доказуема формула $\vdash T{\sim}A \rightarrow (TBA \rightarrow A)$. Дважды применяя правило отделения (П1), получим $R^* \vdash A$. Но, как и прежде, с учетом $R^* \vdash \sim A$ приходим к заключению, что исчисление R^* противоречиво, что неверно.

Наконец, пусть $R^* \vdash \sim A$ и $[\sim A]^0_M$, тогда $[A]^3_M$. Из $[A]^3_M$ по индуктивному предположению утверждаем, что $R^* \vdash A$. Но R^* не является противоречивым. Разбор случаев показал, что все они ведут к противоречию. Значит, $R^* \vdash \sim A \Rightarrow [\sim A]^3_M$.

(**а2**). Ф есть TA. Надо доказать, что $[TA]^3_M \Leftrightarrow R^* \vdash TA$.

Сначала докажем, что $[TA]^3_M \Rightarrow R^* \vdash TA$. Пусть $[TA]^3_M$, тогда $[A]^3_M$. Из $[A]^3_M$ по индуктивному предположению имеем $R^* \vdash A$. По правилу усиления (Ус.) получим $R^* \vdash TA$, что и требовалось.

Докажем, что $R^* \vdash TA \Rightarrow [TA]^3_M$. Пусть $R^* \vdash TA$, на основании доказуемой в R^* формулы $\vdash TA \rightarrow A$ и правила (Ус. ант.) $\vdash T(TA) \rightarrow A$ по (П1) получим $R^* \vdash A$. Из $R^* \vdash A$ по индуктивному предположению имеем $[A]^3_M$. Но если $[A]^3_M$, то и $[TA]^3_M$.

(**а3**). Ф есть BA. Надо доказать, что $[BA]^3_M \Leftrightarrow R^* \vdash BA$.

Докажем, что $[BA]^3_M \Rightarrow R^* \vdash BA$. Пусть $[BA]^3_M$, тогда $[A]^2_M$. Из $[A]^2_M$ по индуктивному предположению получим $R^* \vdash BA$.

Докажем, что $R^* \vdash BA \Rightarrow [BA]^3_M$. Пусть $R^* \vdash BA$, и неверно, что $[BA]^3_M$, т. е. $R^* \vdash BA$ и ($[BA]^2_M$, либо $[BA]^1_M$, либо $[BA]^0_M$). Разберем три случая.

Пусть $R^* \vdash BA$ и $[BA]^2_M$, тогда $[A]^0_M$. Из $[A]^0_M$ по индуктивному предположению имеем $R^* \vdash \sim A$. В исчислении R^* имеется $\vdash T{\sim}A \rightarrow (TBA \rightarrow ИA)$. Дважды применяя (П1), получим $R^* \vdash ИA$, но ИA есть $\sim BA$, т. е. R^* противоречиво, что несовместимо с утверждением *леммы 1*.

Пусть $R^* \vdash BA$ и $[BA]^1_M$, тогда $[A]^3_M$. Из $[A]^3_M$ по индуктивному предположению имеем $R^* \vdash A$. В исчислении R^* доказуема $\vdash TA \rightarrow (TBA \rightarrow ИA)$. Дважды применяя (П1), получим $R^* \vdash ИA$, но ИA есть $\sim BA$, т. е. R^* противоречиво, что неверно (по *лемме 1*).

Пусть $R^* \vdash BA$ и $[BA]^0_M$, тогда $[A]^1_M$. Из $[A]^1_M$ по индуктивному предположению имеем $R^* \vdash УA$, но исчисление R^* не является противоречивым по *лемме* 1.

Таким образом, все случаи ведут к противоречию, значит, $[BA]^3_M$, т. е. $R^* \vdash BA \Rightarrow [BA]^3_M$.

(**а4**). Ф есть ИA. Надо доказать, что $[ИA]^3_M \Leftrightarrow R^* \vdash ИA$. Доказательство опускаем, так как оно сходно с доказательством случая (а3).

(**а5**). Ф есть УA. Надо доказать, что $[УA]^3_M \Leftrightarrow R^* \vdash УA$.

Докажем сначала, что $[УA]^3_M \Rightarrow R^* \vdash УA$. Допустим $[УA]^3_M$, тогда $[A]^3_M$ или $[A]^2_M$. Отсюда по индуктивному допущению имеем $R^* \vdash A$ или $R^* \vdash BA$.

Пусть $R^* \vdash A$. В исчислении R^* имеется $\vdash TA \to УA$, тогда по (П1) получим $R^* \vdash УA$.

Пусть $R^* \vdash BA$. Исчислению R^* принадлежит $\vdash TBA \to УA$, тогда по (П1) получим $R^* \vdash УA$. И в том и другом случае получили $\vdash УA$. Значит, $[УA]^3_М \Rightarrow R^* \vdash УA$.

Докажем, что $R^* \vdash УA \Rightarrow [УA]^3_М$. Допустим, что $R^* \vdash УA$ и не-$[УA]^3_М$, т. е. $R^* \vdash УA$ и ($[УA]^2_М$, либо $[УA]^1_М$, либо $[УA]^0_М$). Но $[УA]^2_М$ и $[УA]^1_М$ невозможно, так как УA не может принимать истинностных значений «2» и «1» (в силу семантических свойств оператора «У») при любых оценках A. Тогда остается один случай $R^* \vdash УA$ и $[УA]^0_М$. Если $[УA]^0_М$, то $[A]^0_М$ или $[A]^1_М$, тогда по индуктивному предположению имеем $R^* \vdash \sim A$ или $R^* \vdash ИA$.

Пусть $R^* \vdash \sim A$. В исчислении R^* доказуема $\vdash T\sim A \to \sim УA$, тогда по (П1) получим $R^* \vdash \sim УA$.

Пусть $R^* \vdash ИA$. В исчислении R^* доказуема $\vdash TИA \to \sim УA$, тогда по (П1) получим $R^* \vdash \sim УA$. Таким образом, в обоих случаях приходим к заключению, что $R^* \vdash \sim УA$, но по *лемме 1* R^* не является противоречивым. Значит, $R^* \vdash УA \Rightarrow [УA]^3_М$.

(а6). Ф есть EA. Надо доказать, что $[EA]^3_М \Leftrightarrow R^* \vdash EA$. Доказательство опускаем, оно аналогично доказательству случая (а5). Рассмотрение подслучаев случая (а) завершено.

(b). Ф есть $A \to C$. Надо доказать, что $[A \to C]^3_М \Leftrightarrow R^* \vdash A \to C$.

Докажем слева направо: $[A \to C]^3_М \Rightarrow R^* \vdash A \to C$.

Если $[A \to C]^3_М$, то $[A]^0_М$ или $[C]^3_М$, тогда по индуктивному предположению имеем $R^* \vdash \sim A$ или $R^* \vdash C$.

Пусть $R^* \vdash \sim A$. В исчислении R^* доказуема $\vdash T\sim A \to (A \to C)$, тогда по (П1) получим $\vdash A \to C$.

Пусть $R^* \vdash C$. В исчислении R^* доказуема $\vdash TC \to (A \to C)$, тогда по (П1) получим $\vdash A \to C$. Значит, $[A \to C]^3_М \Rightarrow R^* \vdash A \to C$.

Докажем справа налево: $R^* \vdash A \to C \Rightarrow [A \to C]^3_М$.

Допустим, что $R^* \vdash A \to C$ и не-$[A \to C]^3_М$, т.е. $R^* \vdash A \to C$ и ($[A \to C]^2_М$, либо $[A \to C]^1_М$, либо $[A \to C]^0_М$).

(1). Рассмотрим случай $R^* \vdash A \to C$ и $[A \to C]^2_М$.

Если $[A \to C]^2_М$, то (($[A]^3_М$ и $[C]^2_М$) или ($[A]^2_М$ и $[C]^2_М$), или ($[A]^1_М$ и $[C]^2_М$), или ($[A]^1_М$ и $[C]^1_М$), или ($[A]^1_М$ и $[C]^0_М$)). Рассмотрим пять подслучаев.

(1.1). $R^* \vdash A \to C$ и ($[A]^3_М$ и $[C]^2_М$). Из $[A]^3_М$ и $[C]^2_М$ по индуктивному предположению соответственно имеем $R^* \vdash A$ и $R^* \vdash BC$. В теории R^* имеется доказуемая формула $\vdash TA \to (TBC \to B(A \to C))$. Дважды применяя (П1), получим $R^* \vdash B(A \to C)$.

Подставив в тавтологию $TA \to (TBA \to \sim A)$ этого исчисления вместо формулы A формулу $A \to C$, получим $T(A \to C) \to (TB(A \to C) \to \sim(A \to C))$. Но *в исчислении имеется также* $R^* \vdash A \to C$ *и* $R^* \vdash B(A \to C)$*, и, дважды применив* (П1), получим $R^* \vdash \sim(A \to C)$, но это несовместимо с утверждением о непротиворечивости R^*.

(1.2). $R^* \vdash A \to C$ и ($[A]^2_М$ и$[C]^2_М$). Из $[A]^2_М$ и $[C]^2_М$ по индуктивному предположению соответственно имеем $R^* \vdash ВА$ и $R^* \vdash ВС$. В теории R^* имеется доказуемая формула $\vdash ТВА \to (ТВС \to В(A\to C))$. Дважды применяя (П1), получим $R^* \vdash В(A \to C)$. Дальше полностью копируются рассуждения случая (1.1), начиная со слов «Подставив в тавтологию...».

(1.3). $R^* \vdash A \to C$ и ($[A]^1_М$ и$[C]^2_М$). Из $[A]^1_М$ и $[C]^2_М$ по индуктивному предположению имеем соответственно $R^* \vdash ИА$ и $R^* \vdash ВС$. В теории R^* имеется доказуемая формула $\vdash ТИА \to (ТВС \to В(A\to C))$. Дважды применяя (П1), получим $R^* \vdash В(A \to C)$. Дальше полностью копируются рассуждения случая (1.1), начиная со слов «Подставив в тавтологию...».

(1.4). $R^* \vdash A \to C$ и ($[A]^1_М$ и$[C]^1_М$). Из $[A]^1_М$ и $[C]^1_М$ по индуктивному предположению имеем соответственно $R^* \vdash ИА$ и $R^* \vdash ИС$. В теории R^* имеется доказуемая формула $\vdash ТИА \to (ТИС \to В(A\to C))$. Дважды применяя (П1), получим $R^* \vdash В(A \to C)$. Дальше полностью копируются рассуждения случая (1.1), начиная со слов «Подставив в тавтологию...».

(1.5). $R^* \vdash A \to C$ и ($[A]^1_М$ и$[C]^0_М$). Из $[A]^1_М$ и $[C]^0_М$ по индуктивному предположению имеем соответственно $R^* \vdash ИА$ и $R^* \vdash \sim C$. В теории R^* имеется доказуемая формула $\vdash ТИА \to (Т\sim C \to В(A\to C))$. Дважды применяя (П1), получим $R^* \vdash В(A \to C)$. Дальше полностью копируются рассуждения случая (1.1), начиная со слов «Подставив в тавтологию...».

Таким образом, случай (1) во всех своих подслучаях ведет к противоречию. Значит, неверно, что $R^* \vdash A\to C$ и $[A\to C]^2_М$.

(2). Рассмотрим случай $R^* \vdash A\to C$ и $[A\to C]^1_М$.

Если $[A\to C]^1_М$, то (($[A]^2_М$ и$[C]^0_М$) или ($[A]^2_М$ и$[C]^1_М$), или ($[A]^3_М$ и$[C]^1_М$). Надо проанализировать три подслучая.

(2.1). $R^* \vdash A\to C$ и ($[A]^2_М$ и$[C]^0_М$). Из $[A]^2_М$ и $[C]^0_М$ по индуктивному предположению имеем соответственно $R^* \vdash ВА$ и $R^* \vdash \sim C$. В исчислении R^* имеется доказуемая формула $\vdash ТВА \to (Т\sim C \to И(A\to C))$. Дважды применяя (П1), получим $R^* \vdash И(A \to C)$.

Подстановкой в тавтологию $ТА \to (ТИА \to \sim A)$ формулы $A\to C$ получим $Т(A\to C) \to (ТИ(A\to C) \to \sim(A\to C))$. Дважды используя (П1), получим $R^* \vdash \sim(A\to C)$, но это означает, что R^* противоречиво, что неверно по *лемме 1*.

(2.2). $R^* \vdash A\to C$ и ($[A]^2_М$ и$[C]^1_М$). Из $[A]^2_М$ и $[C]^1_М$ по индуктивному предположению имеем соответственно $R^* \vdash ВА$ и $R^* \vdash ИС$. В исчислении R^* имеется доказуемая формула $\vdash ТВА \to (ТИС \to И(A\to C))$. Дважды применяя (П1), получим $R^* \vdash И(A \to C)$. Дальше копируются рассуждения подслучая (2.1), начиная с предложения «Подстановкой в тавтологию $ТА \to (ТИА \to \sim A)$...».

(2.3). $R^* \vdash A \to C$ и ($[A]^3_M$ и $[C]^1_M$). Из $[A]^3_M$ и $[C]^1_M$ по индуктивному предположению имеем соответственно $R^* \vdash A$ и $R^* \vdash$ ИС. В исчислении R^* имеется доказуемая формула $\vdash TA \to$ (ТИС $\to$ И($A \to C$)). Дважды применяя (П1), получим $R^* \vdash$ И($A \to C$). Дальше копируются рассуждения подслучая (2.1), начиная с предложения «Подстановкой в тавтологию $TA \to$ (ТИА $\to \sim A$)...).

Таким образом, случай (2) во всех своих подслучаях ведет к противоречию. Значит, неверно, что $R^* \vdash A \to C$ и $[A \to C]^1_M$.

(3). Рассмотрим случай $R^* \vdash A \to C$ и $[A \to C]^0_M$. Если $[A \to C]^0_M$, то ($[A]^3_M$ и $[C]^0_M$). Из $[A]^3_M$ и $[C]^0_M$ по индуктивному предположению имеем соответственно $R^* \vdash A$ и $R^* \vdash \sim C$. В исчислении R^* имеется доказуемая формула $\vdash TA \to (T{\sim}C \to \sim(A \to C))$. Дважды применяя (П1), получим $R^* \vdash \sim(A \to C)$. Но исчисление R^* на самом деле непротиворечиво.

Суммируем: во всех случаях (1)–(3) мы приходили к противоречию. Значит, предположение $R^* \vdash A \to C$ и не-$[A \to C]^3_M$, приведшее к противоречиям, неверно, т. е. мы доказали, что $R^* \vdash A \to C \Rightarrow [A \to C]^3_M$.

Осталось рассмотреть случай (c).

(c1). $[\forall xA]^3_M \Leftrightarrow R^* \vdash \forall xA$.

Докажем слева направо $[\forall xA]^3_M \Rightarrow R^* \vdash \forall xA$. Доказательство проведем рассуждением от противного: $[\forall xA]^3_M$ и не-($R^* \vdash \forall xA$). Если не-($R^* \vdash \forall xA$), то ввиду полноты R^* имеем $R^* \vdash \sim\forall xA$. В исчислении R^* доказуема формула $\vdash T{\sim}\forall xA \to \exists x{\sim}A$ (так как R^* включает R_Q), тогда по (П1) получим $R^* \vdash \exists x{\sim}A$. Поскольку R^* есть теория Генкина, то для некоторой константы b имеем $R^* \vdash \sim A(b)$. Но из определения $[\forall xA]^3_M$ получим $[A(b)]^3_M$, тогда по индуктивному предположению получим $R^* \vdash A(b)$, но R^* не является противоречивой, т.е. допущение $[\forall xA]^3_M$ и не-($R^* \vdash \forall xA$) отвергается. Значит, $[\forall xA]^3_M \Rightarrow R^* \vdash \forall xA$.

Докажем справа налево: $R^* \vdash \forall xA \Rightarrow [\forall xA]^3_M$. Допустим $R^* \vdash \forall xA$. Но R^* содержит для любой ранее введенной константы «b», доказуемую формулу $T\forall xA \to A(b)$, полученную из аксиомы $T\forall xA \to A(y)$. Тогда по (П1) получим $R^* \vdash A(b)$. По индуктивному предположению получим $[A(b)]^3_M$, но $[A(b)]^3_M$ имеет место для всех ранее введенных констант b. Но это значит, что $[\forall xA]^3_M$.

(c2). $[\exists xA]^3_M \Leftrightarrow R^* \vdash \exists xA$.

Докажем слева направо: $[\exists xA]^3_M \Rightarrow R^* \vdash \exists xA$. Допустим $[\exists xA]^3_M$, тогда $[A(b)]^3_M$ для некоторой «b», по определению истинности, в **M** для квантора существования; из $[A(b)]^3_M$ по предположению индукции имеем $R^* \vdash A(b)$. R^* содержит $\vdash TA(b) \to \exists xA(x)$ для некоторой константы «b». По (П1) получим требуемое $R^* \vdash \exists xA$.

Докажем справа налево: $R^* \vdash \exists xA \Rightarrow [\exists xA]^3_M$. Допустим $R^* \vdash \exists xA$. Так как R^* является теорией Генкина, то получим $R^* \vdash A(b)$ для некоторой константы «b». Из $R^* \vdash A(b)$ по предположению индукции получаем $[A(b)]^3_M$. Значит, $[\exists xA]^3_M$ на основании определения истинности — в **M** для квантора существования.

Все три случая (a)–(c) разобраны. Была построена модель **M** для теории R^*. Но так как R^* есть полное непротиворечивое расширение R_0^+, то тем самым была построена модель и для R_0^+. Вместе с тем R_0^+ была получена из R_Q путем подстановок констант в аксиомы, правила вывода и доказательств формул в R_Q. Тем самым построенная модель является также моделью теории R_Q. Таким образом, мы возвратились к R_Q, имея для теории R_Q модель.

Следствие. $\forall A\ (\models A \Rightarrow\ \vdash A)$ в теории R_Q. Будем исходить из двух фактов: (a) — семантического, т. е. формула A со свободной переменной общезначима, общезначимо ее замыкание; (b) — синтаксического, т. е. формула A со свободной переменной доказуема, доказуемо ее замыкание. Это позволяет нам ограничиться рассмотрением замкнутых формул.

Допустим, что $\models A$ и (не $\vdash A$). Тогда на основании *предложения 2* (*о расширении множества*) непротиворечиво расширим R_Q новой аксиомой ~A. На основании леммы 2 эта расширенная теория имеет модель **M**. Так как ~A аксиома, то она общезначима согласно теореме 1. Тогда оказывается, что формула A и ее отрицание ~A истинны в модели, что невозможно. Значит, $\forall A\ (\models A \Rightarrow\ \vdash A)$.

Доказательство теоремы о полноте завершено.