ПЕРВОПОРЯДКОВАЯ ЛОГИКА НАПРАВЛЕННОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ R_Q. ЧАСТЬ I: АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Н. И. Стешенко

Первопорядковая логика направленности изменения есть предикатное расширение логики Л. Роговского[1]. Г. Панти, характеризуя в обзорной работе предикатные расширения различных многозначных логик, отмечал: «Если оставить в стороне технические проблемы, то на самом деле отсутствует убедительная философская и лингвистическая интерпретация. В большинстве случаев авторы попросту пропускают обсуждения этих интерпретаций и прямо переходят к техническому содержанию анализируемых логик»[2]. Что касается философского содержания первопорядковой логики направленности, то оно остается таким же, как и в логике Роговского, но гегелевский переход описывается более сильным по своим выразительным возможностям языком. Под лингвистической интерпретацией, всего скорее, применительно к нашему случаю, имеются в виду примеры выражений естественного языка, являющихся аналогом основных понятий логики направленности изменения. С этой точки зрения несложно указать в естественном языке примеры операторов логики направленности изменения: «Возникает так, что предмет x имеет свойство P», «Уже все предметы x начали краснеть», «Еще не все студенты сдали контрольные работы» и т. д. Таким образом, можно утверждать, что критические замечания Г. Панти в адрес предикатных расширений многозначных логик в нашем случае не имеют силы.

§ 1. *Синтаксис первопорядковой логики направленности изменений*

В языке первопорядковой логики направленности и изменения используются следующие категории символов:

(1) Одноместные и двухместные операторы пропозициональной логики Роговского: > («если, ...то»), В («возникает так, что...»), ~ («неверно, что...»), Т («есть так, что...»), И («исчезает так, что...»), У («уже есть так, что...»), **Е** («еще есть так, что...»).

(2) Счетное множество переменных **V**: $x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots$

(3) Счетное множество индивидных констант **С**: $a, в, c, a_1, в_1, c_1, \ldots$

---

[1] *Rogowski L. S.* Logika kierunkowa a heglowska teza o sprecznosci zmiany. Toruń, 1969.

[2] *Panti G.* Multi-valued Logics // Archive of Mathematics Logic. Vol. 1. 1995, 19 Apr. P. 19.

(4) Счетное множество предикатных символов **R**: P^n_1, P^n_2, ..., где верхний индекс указывает число аргументных мест предикатов. Если n = 0, то предикат является пропозициональной переменной: p, g, r, ... Тем самым имеется возможность использовать подстановочные случаи тавтологий пропозициональной логики Роговского.

(5) Кванторы: ↔, ∃. (6). Левые и правые скобки.

Определение 1 (*терма*):

(1) Любая переменная является термом.

(2) Любая константа является термом.

(3) Ничто иное не есть терм.

Определение 2 (*формулы*):

(1) Атомарная формула логики предикатов есть выражение вида $P(t_1,..,t_n)$, где $t_1,...,t_n$ есть термины, а P есть n-арный предикатный символ, $n \geq 1$.

(2) Любая атомарная формула логики предикатов является формулой.

(3) Если А — формула, то •А — формула, где • ∈ {~, В, Т, И, У, Е}.

(4) Если А и С — формулы, то А > С формула.

(5) Если А — формула и х переменная, принадлежащая А, то выражения ↔хА, ∃хА — формулы.

(6). Ничто иное не есть формула.

Определения *свободного и связанного вхождения переменной в формулу* стандартное.

Определение 3 (*подстановки*):

Подстановкой называется отображение δ: **V** → **Ter** из множества **V** переменных в множество **Ter** термов.

Пусть δ подстановка. Через δ_x обозначим подстановку, которая отличатся от подстановки δ тем, что не замещает переменной «х» никаким термином, т.е. для любой переменной «у» имеем:

$$\delta_x(y) = \begin{cases} \delta_x(y), \text{ если } y \neq x. \\ x, \text{ если } y = x. \end{cases}$$

Распространим понятие подстановки на формулу:

(1). $\delta(P(t_1,...,t_n)) = P(\delta(t_1),...,\delta(t_n))$, где $P(t_1,...,t_n)$ атомарная формула.

(2). $\delta(\bullet A) = \bullet\delta(A)$, где • ∈ {~, В, Т, И, У, Е}.

(3). $\delta(A > B) = \delta(A) > \delta(B)$.
(4). $\delta(\leftrightarrow A(x)) = \leftrightarrow x(\delta_x A(x))$.
(5). $\delta(\exists A(x)) = \leftrightarrow\exists x(\delta_x A(x))$.

Определение *правильной, т.е. свободной подстановки*, и определение *подформулы* обычное и вводится индукцией по построению формулы.

§2. Семантика первопорядковой логики направленности изменения

Определение 1 (*модели*):

Модель первопорядкового языка логики направленности изменения $L(R_Q)$ есть пара $\mathbf{M} = \langle \mathbf{D}, \mathbf{I} \rangle$, где:

D — непустое множество объектов, называемое областью интерпретации;

I — есть отображение, называемое интерпретацией, которое:

(1) каждой индивидной константе $a \in \mathbf{C}$ сопоставляет элемент $a^I \in \mathbf{D}$;

(2) каждому предикатному символу $P^n \in \mathbf{R}$ сопоставляет четыре непересекающиеся подмножества D^n_3, D^n_2, D^n_0, D^n_1 множества D^n. Два последних подмножества D^n_0, D^n_2 являются соответственно дополнением подмножеств D^n_3, D^n_2. Это дополнение соответствует в языке отрицанию.

Опишем (в языке теории множеств) отношения между указанными множествами точнее, но более громоздко:

$D^n_3 \cap D^n_0 = \varnothing$, $D^n_3 \cup D^n_0 = D^n_+$, $D^n_0 = D^n_+ \setminus D^n_3$.
$D^n_2 \cap D^n_1 = \varnothing$, $D^n_2 \cup D^n_1 = D^n_{++}$, $D^n_1 = D^n_{++} \setminus D^n_2$.
$D^n_+ \cap D^n_{++} = \varnothing$, $D^n_+ \cup D^n_{++} = D^n$.

Дополнение предиката P^n обозначим через CP^n. Дальше выражение «если и только если» (метаязыковая эквиваленция) сокращаем посредством символа «$\Leftrightarrow$», а метаязыковую импликацию — «$\Rightarrow$»

(2.1) $(P^n)^I \subset D^n_3$, т. е. предикатному символу P^n ставится в соответствие n — местное отношение.

(2.2) $(P^n)^I = (BP^n)^I \subseteq D^n_2$, т. е. предикатному символу P^n ставится в соответствие n — ка объектов, находящихся в отношении возникновения.

(2.3) $(CP^n)^I \subset D^n_0 \Leftrightarrow (P^n)^I \not\subset D^n_0 \Leftrightarrow (P^n)^I \subset D^n_3$.

(2.4) $(CP^n)^I \subset D^n_1 \Leftrightarrow (P^n)^I \not\subset D^n_1 \Leftrightarrow (P^n)^I \subset D^n_2$.

Определение 2 (*приписывания значений переменным*):

Приписыванием значения переменным в модели **M** есть отображение **Б**: $\mathbf{V} \to \mathbf{D}$ из множества переменных **V** в множество объектов **D** модели **M**. Образ переменной $x \in \mathbf{V}$ при приписывании **Б** обозначается через $x^Б$, $x^Б \in \mathbf{D}$.

Определение 3 (*приписывание значения термину*):

(a) Для константного символа a, $a^{I,Б} = a^I$.

(б) Для переменной x, $x^{I,Б} = x^Б$.

Теперь все готово, чтобы дать семантические характеристики формулы.

Определение 4. Пусть **Б** есть приписывание значений переменным в модели $\mathbf{M} = \langle \mathbf{D}, \mathbf{I} \rangle$.

Для каждой предикатной формулы Ф языка $L(R_Q)$ определим истинностное значение (3, 2, 1, 0) формул следующим образом.

(1) Атомарная формула:

(1.1) $[P(t_1,...,t_n)]^{I,Б} = 3 \Leftrightarrow \langle t_1^{I,Б},...,t_n^{I,Б} \rangle \in P^I \subset D^n_3$.

(1.2) $[P(t_1,...,t_n)]^{I,Б} = 0 \Leftrightarrow \langle t_1^{I,Б},...,t_n^{I,Б} \rangle \notin P^I \subset D^n_3 \Leftrightarrow \langle t_1^{I,Б},...,t_n^{I,Б} \rangle \in CP^I \subseteq D^n_0$.

(1.3) $[P(t_1,...,t_n)]^{I,Б} = 2 \Leftrightarrow \langle t_1^{I,Б},...,t_n^{I,Б} \rangle \in (BP)^I \subset D^n_2$.

(1.4) $[P(t_1,...,t_n)]^{I,Б} = 1 \Leftrightarrow \langle t_1^{I,Б},...,t_n^{I,Б} \rangle \notin (BP)^I \subseteq D^n_2 \Leftrightarrow \langle t_1^{I,Б},...,t_n^{I,Б} \rangle \in C(BP)^I \subset D^n_0$.

(2.1) $[BA]^{I,Б} = 3 \Leftrightarrow [A]^{I,Б} = 2$; (2.2). $[BA]^{I,Б} = 2 \Leftrightarrow [A]^{I,Б} = 0$.

(2.3) $[BA]^{I,Б} = 1 \Leftrightarrow [A]^{I,Б} = 3$; (2.4). $[BA]^{I,Б} = 0 \Leftrightarrow [A]^{I,Б} = 1$.

(3) $[\sim A]^{I,Б} = i \Leftrightarrow [A]^{I,Б} = 3 - i$, где $i \in \Gamma_4 = \{3, 2, 1, 0\}$; (4). $[ИA]^{I,Б} = [\sim BA]^{I,Б}$.

(5.1) $[TA]^{I,Б} = 3 \Leftrightarrow [A]^{I,Б} = 3$.

(5.2) $[TA]^{I,Б} = 0 \Leftrightarrow [A]^{I,Б} = 2$ или $[A]^{I,Б} = 1$ или $[A]^{I,Б} = 0$.

(6.1) $[EA]^{I,Б} = 3 \Leftrightarrow [A]^{I,Б} = 3$ или $[A]^{I,Б} = 1$.

(6.2) $[EA]^{I,Б} = 0 \Leftrightarrow [A]^{I,Б} = 2$ или $[A]^{I,Б} = 0$.

(7.1) $[УA]^{I,Б} = 3 \Leftrightarrow [A]^{I,Б} = 3$ или $[A]^{I,Б} = 2$.

(7.2) $[УA]^{I,Б} = 0 \Leftrightarrow [A]^{I,Б} = 2$ или $[A]^{I,Б} = 0$.

(8) $[A > B]^{I,Б} = [A]^{I,Б} > [B]^{I,Б}$.

(8.1) $[A]^{I,Б} > [B]^{I,Б} = 3 \Leftrightarrow [A]^{I,Б}$? 3 или $[B]^{I,Б} = 3 \Leftrightarrow ([A]^{I,Б} = 3 \Rightarrow [B]^{I,Б} = 3)$.

(8.2) $[A]^{I,Б} > [B]^{I,Б} = 2 \Leftrightarrow ([A]^{I,Б} = 1$ и $[B]^{I,Б} \neq 3)$ или $([B]^{I,Б} = 2$ и $[A]^{I,Б} \neq 0)$.

(8.3) $[A]^{I,Б} > [B]^{I,Б} = 1 \Leftrightarrow ([A]^{I,Б} = 3$ и $[B]^{I,Б} = 2)$ или $([A]^{I,Б} = 2$ и $[[B]^{I,Б} = 1$ или $[B]^{I,Б} = 0])$.

(8.4) $[A]^{I,Б} > [B]^{I,Б} = 0 \Leftrightarrow [A]^{I,Б} = 3$ и $[B]^{I,Б} = 0$.

Для придания истинностных значений кванторным формулам преобразуем стандартное понятие модели в Эрбранову модель. Последняя есть техническое упрощение стандартной модели, весьма удобное для семантической работы с кванторными формулами.

Определение 5 (*эрбрановой модели*)[3]:

Модель $\mathbf{M} = \langle \mathbf{D}, \mathbf{I} \rangle$ языка $L(R_Q)$ называется эрбрановской, если выполняются два условия:

(1) **D** состоит из констант языка $L(R_Q)$.

---

[3] *Fitting M.* First-Order Logic and Automated Theorem Proving. New York; London, 1990. P. 107.

(2) Для каждой константы a принимается $a^I = a$, т.е. интерпретацией константы является сама константа.

В Эрбрановой модели приписывание значения переменной в **M** является также подстановкой константы на место переменной, и наоборот. Техническая сторона преобразования стандартной модели в эрбрановскую хорошо изложена в работе М.Фиттинга[4]. Это преобразование дано для двухзначной логики. Оно автоматически переносится на четырехзначный случай, так как понятия приписывания значений переменной и понятие подстановки термина на место переменной для двухзначной и четырехзначной логики совпадают.

Тогда определение (1.1) модифицируется следующим образом:

(1.1) $[P(t_1,...,t_n)]^{I,Б} = 3 \Leftrightarrow [P(t_1/a_1,...,t_n/a_n)]^I = 3 \Leftrightarrow \langle a_1,...,a_n\rangle \in \mathbf{P}^I \subseteq \mathbf{D}^n_3$.

Остальные определения истинности формулы в модели модифицируются сходным образом.

Дальше в правой (определяющей) части определений истинностных значений для кванторных формул метавыражения «для любого(некоторого) термина, принадлежащего ...» заменяются кванторами. Но они, конечно, не принадлежат к объектному языку $L(R_Q)$, эта замена приводится в целях лучшего обозрения определений.

[9.1] $[\leftrightarrow xA]^{I,Б} = 3 \Leftrightarrow (\leftrightarrow a \in \mathbf{D}^n_3)\ A(x/a) = 3$, где $1\leq n \leq j$
(n –есть число аргументов А).

[9.2] $[\leftrightarrow xA]^{I,Б} = 2 \Leftrightarrow (\exists a \in \mathbf{D}^n_2)\ A(x/a) = 2$ и $[(\leftrightarrow в \in \mathbf{D}^n_2)\ A(x/в) = 2$ или $\leftrightarrow в \in \mathbf{D}^n_3)\ A(x/в) = 3]$, $1< n < j$.

[9.3] $[\leftrightarrow xA]^{I,Б} = 1 \Leftrightarrow (\exists a \in \mathbf{D}^n_1)\ A(x/a) = 1$ и $[(\leftrightarrow в \in \mathbf{D}^n_1)\ A(x/в) = 1$ или $(\leftrightarrow в \in \mathbf{D}^n_2)\ A(x/в) = 2$, или $(\leftrightarrow в \in \mathbf{D}^n_3)\ A(x/в) = 3]$, $1< n < j$.

[9.4] $[\leftrightarrow xA]^{I,Б} = 0 \Leftrightarrow (\exists a \in \mathbf{D}^n_0)\ A(x/a) = 0$, где $1< n < j$.

[10.1] $[\exists xA]^{I,Б} = 3 \Leftrightarrow (\exists a \in \mathbf{D}^n_3)A(x/a) = 3$, где $1< n < j$.

[10.2] $[\exists xA]^{I,Б} = 2 \Leftrightarrow (\exists a \in \mathbf{D}^n_2)A(x/a) = 2$ и $[(\leftrightarrow в \in \mathbf{D}^n_0)\ A(x/в) = 0$ или $(\leftrightarrow в \in \mathbf{D}^n_1)A(x/в) = 1$, или $(\leftrightarrow в \in \mathbf{D}^n_2)\ A(x/в) = 2]$, $1\leq n \leq j$.

[10.3] $[\exists xA]^{I,Б} = 1 \Leftrightarrow (\exists a \in \mathbf{D}^n_1)A(x/a) = 1$ и $[(\leftrightarrow в \in \mathbf{D}^n_0)\ A(x/в) = 0$ или $(\leftrightarrow в \in \mathbf{D}^n_1)\ A(x/в) = 1]$, $1< n < j$.

[10.4] $[\exists xA]^{I,Б} = 0 \Leftrightarrow (\leftrightarrow a \in \mathbf{D}^n_0)A(x/a) = 0$, где $1< n < j$.

Определение 6 (*выполнимой, истинной, общезначимой формулы*):

6.1. Формула А называется *выполнимой* в модели $\mathbf{M} = \langle \mathbf{D}, \mathbf{I}\rangle$, если имеется приписывание **Б** значений переменной формулы А, в котором $[A]^{I,Б} = 3$.

6.2. Формула А называется *истинной* в модели $\mathbf{M} = \langle \mathbf{D}, \mathbf{I}\rangle$, если $[A]^{I,Б} = 3$ для всех приписываний **Б** в **M**.

6.3. Формула А называется *ложной* в модели $\mathbf{M} = \langle \mathbf{D}, \mathbf{I}\rangle$, е! $[A]^{I,Б} = 0$ для всех приписываний **Б** в **M**.

[4] Ibid. P. 107–108.

6.4. Формула **А** называется *общезначимой*, е! А истинна во всех моделях языка **L**(R_Q).

Замечание. Данные определения выполнимой, истинной, общезначимой формулы подходят и для Эрбрановой модели, если не забывать, что приписывание значения переменной в эрбрановой **M** отождествляется с подстановкой констант на место переменных.

§ 3. *Аксиомы и правила доказательства*

В качестве исходных доказуемых формул, т.е. аксиом, этой логики принимаются аксиомы логики Роговского (в доказательствах будем использовать также выводимые из них тавтологии).

Для удобства ссылок в доказательствах укажем эти пропозициональные аксиомы:

[A0.1] **Т(р > g) > (Т(g> r) > (р > r)**; [A0.2] **Т(р > g) > (р > Тg)**.
[A0.3] **(р > g) > (Тр > ~Т~g)**; [A0.4] **Т((р > g) > р) > р**.
[A0.5] **Т((р > g) > ~g) > ~g**; [A0.6] **Т(р > g) > (~g > ~р)**.
[A0.7] **Т(~g > ~р) > (р > g)**; [A0.8] **(Ур > Уg) > У(р > g)**.
[A0.9] **У(р > g) > (Ур > Уg)**; [A0.10] **р > (~р > (Вр > (Ир > g)))**.

Аксиомами первопорядковой логики направленности изменения являются следующие формулы [A1]-[A6]:

[A1] **Т≈хА > А(t)**, терм **t** свободен для **х** в **А**.
[A2] **↔хА > ~Т~А(t)**, терм **t** свободен для **х** в **А**.
[A3] **Т≈х(С > А(х)) > (С > ↔хА)**, **х** не входит свободно в **С**.
[A4] **Т≈хВА > В≈хА**.
[A5.1] **↔хУА > У≈хА**; [A5.2]. **У≈хА > ↔хУА**; [A6]. **↔хЕА > Е≈хА**.

Принимается определение: [Df1]. **∃хА(х) ≡ ~≈~хА(х)**.
Терм **t** в [A1] и в [A2] может совпадать с **х**.

Правила вывода. Делятся на основные и производные. Знак «+» перед формулой означает, что формула доказуема.

Основные правила вывода:

[П1] Если+**ТА > В** и +**А**, то+**В** («правило отделения»).

[П2] Правило подстановки (требования к подстановке обычные).

[П3] Если +**А(...С...)** и **С** $\equiv_{df}$ **Д**, то +**А(...Д...)** («правило дефинициальной замены»), где **С** и **Д** подформулы формулы **А**.

[П4] Если +**А(х)**, то +**≈хА** («правило обобщения»).

В доказательствах это правило будем обозначать через (Об.).

Производные правила вывода:

[П5] Если+**А > С**, то + **ТА > С** («усиление антецедента»).

В доказательствах будем обозначать это правило через (Ус. ант.).

[П6] Если+**А** > **С**, то +**А** > **ТС** («усиление консеквента»).

В доказательствах будем обозначать это правило через (Ус. кон.).

[П7] Если +А, то +ТА, т. е. если формула доказуема, то усиление этой формулы оператором «Т» доказуемо. В доказательствах будем обозначать это правило через (Ус.).

[П8] Если+**С** > **А(х)**, то +**С** > ↔**хА** («правило Бернайса»).

[П9] Если+**А(х)** > **С**, то +∃**хА** > **С** («правило Бернайса»).

В правилах [П8] и [П9] переменная **х** не входит свободно в **С**. В доказательствах оба правила будем обозначать через (Бер.). Из контекста всегда ясно, какое из этих двух правил применяется.

[П10] Если + **С** > **Д** и +**Д** > **С** и +**А**(...**С**...), то +**А**⁺(...**Д**...), где **А**⁺ получено из **А** заменой подформулы **С** на **Д** («правило эквивалентной замены»).

[П11] Переименование связанных переменных. Оно стандартное. В доказательствах и выводах используется автоматически, т. е. без явных ссылок на это правило. Его точная формулировка и обоснование приведены ниже. Отметим, что производные правила не расширяют класс доказуемых формул.

Комментарий. В аксиоме [А4] встречается формулы вида В≈хА, в которой оператор «В» находится перед квантором. Но то, что содержательно выражает, например, формула В≈хАх, «возникает так, что все х имеют свойство А». Никакой особой онтологии за формулой В≈хА (а также формулой вида В∃хА) не скрывается. Отметим, что оператор «В» — истинностно-функциональный оператор, и если мы приписываем формуле В≈хА, например, истинностное значение «3», то ↔хА имеет значение «2», и наоборот.

Определение 1 (*доказательства, доказуемой формулы*):

Определения стандартные.

Мы так же будем строить выводы формул из посылок в случае, если доказательство какой-то формулы очень длинное.

Определение 2 (*вывода и выводимой формулы*):

Вывод есть конечная последовательность формул, в которой каждая из них является либо посылкой, либо аксиомой, либо теоремой этой системы, либо получается из предыдущих формул по одному из правил вывода этой формальной системы. *Выводимой формулой* называется последняя формула вывода.

Теорема дедукции. Если имеется вывод **Г**, $\mathbf{A}_э$ + **А**, в котором ни одна переменная относительно посылки $\mathbf{A}_е$ не варьируется (т. е. остается фиксированной), то имеется и вывод **Г** + $\mathbf{A}_е$ > **А**.

Предполагаются стандартное определение *зависимого вхождения формулы* в вывод от посылки[5] и обычное, принятое понимание фиксированной

[5] См., напр.: *Смирнов В. А.* Формальный вывод и логическое исчисление. М., 1972. С. 27–28.

переменной[6]. Пропозициональная часть теоремы дедукции логики направленности доказана[7]. Доказательство теоремы дедукции для собственно первопорядковой логики изменения направленности ничем не отличается от доказательства этой теоремы в классической теории квантификации. Разбираются два случая: (а) вывод формулы A(x) зависит от посылки A_e; (б) вывод формула A(x) не зависит от посылки A_e[8]. Доказательство квантифицируемой части теоремы опускаем.

Укажем обоснование производных правил.

Обоснование [П5] и *обоснование* [П6]:

1. A → C — посылка правила [П5].	1. A → C — посылка правила [П6].
2. T(A→C) → (TA→C) — тавт.	2. T(A→C) → (A→TC) — A02.
3. TA→C — 1, 2, П1.	3. A→ TC — 1, 2, П1.

Обоснование [П7]:

1. A — посылка правила [П7].
2. TA → TA –тавт.
3. TA — 1, 2, П1.

Обоснование [П8]:

1. + C > A(x) посылка правила [П8], x не входит свободно в C.
2. ↔x(C > A(x)) -1, (Об.).
3. T~x(C > A(x)) > (C > ↔xA) — (A4).
4. (C > ↔xA) (П1), 2,3.

Обоснование второго правила Бернайса [П9] аналогично обоснованию первого, т. е. [П8], но надо предварительно доказать формулу:

+ T≈x(A(x) >C) > (∃xA(x) >C):

1. T≈x(A(x) > C) > (A(x) > C) — A1.
2. T≈x(A(x) > C) > T(A(x) > C) — 1 (Ус. кон.).
3. T(A(x) > C) > (~C > ~A(x)) — П2 в (A06).
4. T≈x(A(x) > C) > (~C > ~A(x)) — 2,3, транз. на основании A0.1.
5. T≈x(A(x) > C) > ↔x(~C > ~A(x)) — 4 (Бер.).
6. T≈x(A(x) > C) > T≈x(~C > ~A(x)) — 5 (Ус. кон.).
7. T≈x(~C> ~A(x)) > (~C > ↔x~A(x)) — (A3).
8. T≈x(A(x) > C) > (~C > ↔x~A(x)) — 6, 7, транз.
9. T≈x(A(x) > C) > T(~C > ↔x~A(x)) — 8 (Ус. кон.).
10. T(~C > ↔x~A(x)) > (~~x~A(x) > C) — под. в тав.: T(~g>p)>(~p>g).
11. T~x(A(x) > C) > (~~x~A(x) > C) — 9, 10, транз.
12. T≈x(A(x) > C) > (∃xA(x) > C) — 15 (замена квантора по П3 и [Df.1]).

---

[6] *Клини С.* Математическая логика. М., 1973. С. 133–134.

[7] Прямая теорема дедукции для логики направленности Роговского // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. СПб., 2004. С. 535–538.

[8] См.: *Смирнов В. А.* Формальный вывод и логическое исчисление. С. 34–35.

Соглашение. Дальше детальное использование (т.е. выписывание всех подстановок и применения правила П1) пропозициональных аксиом (А0.1), (А0.6) и (А0.7), а также тавтологий вида Т(~p > g) > (~g >p) и Т(p>~g) > (~g > p) опускается. Их сокращенное использование будет отмечаться как *(контрпоз.).* Мы также опускаем подробное использование пропозициональных тавтологий вида Т~~p > p и Тp > ~~p и их сокращенное использование будем отмечать (*сн.~~*). По контексту ясно, применяется ли (*сн.~~*) к антецеденту или к консеквенту импликативной формулы. Кроме того, в доказательствах формул часто используется подстановка в тавтологию: Т(p>(g>r)) > (g>(p>r)). Некоторые шаги доказательства, использующие эту тавтологию, будут опускаться. Факт использования этой тавтологии будет отмечаться как (*пер. пос.*), т. е. как перестановка посылок.

Обоснования [П10]:

Это правило есть следствие теоремы замены эквивалентных. Прежде чем приступить к доказательству теоремы, укажем на специфику эквивалентности в логике направленности изменений.

В ней имеются слабо эквивалентные формулы ($\phi_1 \approx \phi_2 =_{df} (\phi_1 > \phi_2) \wedge (\phi_2 > \phi_1)$) и сильно эквивалентные формулы ($\phi_1 \leftrightarrow \phi =_{df} (\bullet\phi_1 > \bullet\phi_2) \wedge (\bullet\phi_2 > \bullet\phi_1)$, где $\bullet \in$ {Т, У, Е}). В слабой эквивалентности $\phi_1 \approx \phi_2$ таблицы истинности для ϕ_1 и ϕ_2 совпадают не только на классических значениях истинности {0, 3}, но и на средних значениях истинности {1, 2}. Формулы ϕ_1 и ϕ_2_*сильно эквивалентные*, если при всевозможных распределениях значений истинности из множества $Г_4$ = {0, 1, 2, 3} они принимают значения истинности на подмножестве {0, 3} множества $Г_4$, т. е. таблицы истинности для ϕ_1 и ϕ_2 совпадают только на классических значениях истинности {0, 3}. Слабо эквивалентные формулы не являются доказуемыми в этой логике, так как они не являются общезначимыми.

В объектном языке логики направленности изменения не используются знаки эквиваленции (ни слабой, ни сильной) и конъюнкции. Если А и $А^+$ сильно эквивалентные формулы, то $А \leftrightarrow А^+$ будут обозначать существование двух доказуемых формул + $А \rightarrow А^+$ и + $А^+ \rightarrow А$.

Важно отметить, что операторы «В» и «И» не сохраняют свойство доказуемости сильно эквивалентных формул в следующем смысле: если имеем + $А \rightarrow А^+$ и + $А^+ \rightarrow А$, то формулы $ВА \rightarrow ВА^+$ и $ВА^+ \rightarrow ВА$ (аналогично $ИА \rightarrow ИА^+$ и $ИА^+ \rightarrow ИА$) не являются доказуемыми. Этот факт понятен с семантической точки зрения. Операторы «В» и «И» превращают классические значения истинности «3» и «0» в средние значения истинности «1» и «2», но значение импликации на средних значениях истинности (для антецедента и консеквента) также является средним.

Остальные операторы ~, Т, У, Е сохраняют свойство доказуемости сильно эквивалентных формул. Деление операторов исследуемой логики на те, которые сохраняют свойство доказуемости эквивалентных формул, и те, которые не сохраняют свойства доказуемости, должно учитываться в формулировке теоремы о замене эквивалентных. В случае операторов «В» и «И» заключение *теоремы о замене эквивалентных будет иметь силу при определенных* дополнительных условиях. Так как оператор «И» определим (ИА$=_{df}$ В~А $-_{df}$~ВА), то в формулировке теоремы ограничимся условием на оператор «В».

Теорема о замене эквивалентных. Пусть **С** и **Д** — произвольные формулы, имеющие одни и те же свободные переменные $x_1, ..., x_m$ (дальше этот список переменных будем обозначать через x_i, $1 \leq x_i < m$ *). Пусть формула* $\leftrightarrow x_i$(**С**$\leftrightarrow$**Д**) *доказуема. Пусть* **С** *есть подформула формулы* **А** *и* **А**$^+$ *получена из* **А** *в результате замены некоторого вхождения* **С** *в* **А** *на* **Д**. *Пусть* y_j $(1 \leq j \leq n)$ *есть список всех свободных переменных* **А**.

Тогда формула $\leftrightarrow y_i$(**А**$\leftrightarrow$**А**$^+$), i<j *доказуема для всех операторов, кроме оператора «В», она доказуема и для оператора* «**В**» *при условии, если формулы вида* $\leftrightarrow y_i$**В**(**А**$\leftrightarrow$**А**$^+$) *является доказанной. При этом эквивалентность* $\leftrightarrow y_i$(**А**$\leftrightarrow$**А**$^+$) *существует в двух формах:*(экв. 1) — $\leftrightarrow y_i$($A_1 \leftrightarrow A_1^+$), и (экв. 2) — $\leftrightarrow y_i$($TA_1 \leftrightarrow TA_1^+$), (экв.2) выводима из (экв.1), но не наоборот.

Доказательство. Мы не рассматриваем случая, когда **С** вообще не заменяется на Д[9]. Не будем забывать, что $\leftrightarrow y_i$(А $\leftrightarrow$ А$^+$) обозначает пару доказуемых формул $+\approx y_i$(А$\rightarrow$ А$^+$) и $+\approx y_i$(А$^+$$\rightarrow$А). Сходным образом формула $\leftrightarrow x_i$(С$\leftrightarrow$Д) также обозначает пару доказуемых формул.

Доказательство проведено индукцией по построению формулы **А**.

Базис индукции. **А** есть элементарная формула. Тогда в результате замены получаем, что **А** есть **С**, и **А**$^+$ есть **Д**. Все свободные переменные формулы **А** есть x_i, $1 \leq x_i < m$, тогда формула $\leftrightarrow y_i$(**А**$\leftrightarrow$**А**$^+$) совпадает с $\leftrightarrow x_i$(**С**$\leftrightarrow$**Д**); последняя по условию теоремы является доказуемой формулой, т. е. $+\approx x_i$(С$\rightarrow$Д) и $+\approx x_i$(Д$\rightarrow$С)).

Шаг индукции. Пусть утверждение теоремы верно для произвольных формул A_1 и A_2, причем в каждую из них входит не более чем n логических связок и кванторов. Пусть **А** построена из n+1 логических связок и кванторов. Тогда **А** имеет следующие виды: (а) — **А** есть $A_1 > A_2$; (b) — **А** есть $\bullet A_1$, где $\bullet \in$ {~, **Т**, **У**, **Е**, **В**}; (с) — **А** есть $\leftrightarrow$**у**A_1(**у**).

Для всех трех случаев предполагаем, что условие теоремы выполнимо, т. е. формулы С и Д таковы, что формула $\leftrightarrow x_i$(С$\leftrightarrow$Д) доказана, т. е. имеется $+\approx x_i$(С > Д) и $+\approx x_i$(Д > С). К тому же в силу индуктивного предположения принимаются в качестве доказанных следующие формулы:

---

[9] Некоторые авторы в доказательстве этой теоремы допускают нулевую замену (С на Д), т.е. отсутствие замены. См., напр.: *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. М., 1984. С. 81–82; *Черч А.* Введение в математическую логику. М., 1960. С. 179–181. Исключение случая нулевой замены из доказательства теоремы не влияет на суть ее доказательства.

1.1. $+\approx y_i (A_1 > A_1^+)$; 1.2. $+\approx y_i (A_1^+ > A_1)$, т.е. $+ \leftrightarrow y_i(A_1 \leftrightarrow A_1^+)$.

2.1. $+\approx y_i (A_2 > A_2^+)$; 2.2. $+\approx y_i (A_2^+ > A_2)$, т.е. $+\approx y_i (A_2 \leftrightarrow A_2^+)$.

Дальше для простоты доказательства вместо списка переменных y_j ($1\leq j \leq n$) будет использована одна переменная «y».

Рассмотрим *случай* (a). Надо показать, что следующие формулы доказуемы:

3. $+ \leftrightarrow y(T(A_1 > A_2) > (A_1^+ > A_2^+))$; 4. $+\approx y(T(A_1^+ > A_2^+) > (A_1 > A_2))$.

Докажем (3):

1. $\approx y (A_1^+ > A_1)$ — индукт. допущение (1.2).
2. $\leftrightarrow y (A_2 > A_2^+)$ — индукт. допущение (2.1).
3. $T(A_1^+(y) \to A_1(y)) \to [T(A_1(y) \to A_2(y)) \to (T(A_2(y) \to A_2^+(y)) \to (A_1^+(y) \to \to A_2^+(y)))]$ — П2 в тавт.: $T(p\to g) \to [T(g\to r) \to (T(r\to s)\to(g\to s))]$.
4. $T\approx y(A_1^+ > A_1) \to (A_1^+(y) > A_1(y))$ — (A1).
5. $T\approx y(A_1^+ > A_1)\to[T(A_1(y) \to A_2(y))\to (T(A_2(y) \to A_2^+(y))\to(A_1^+(y)\to A_2^+(y)))]$ — 4, 3, транз. по A01.
6. $T\sim y(A_1^+ > A_1)\to T[T(A_1(y)\to A_2(y))\to(T(A_2(y) \to A_2^+(y))\to(A_1^+(y)\to A_2^+(y)))]$ — 5 (Ус. кон.).
7. $T[T(A_1(y)\to A_2(y))\to(T(A_2(y) \to A_2^+(y))\to(A_1^+(y)\to A_2^+(y)))]\to (T(A_2(y) \to A_2^+(y)) \to ((T(A_1(y)\to A_2(y)) \to (A_1^+(y)\to A_2^+(y))))$ — П2 в тавт.: $T(p\to(g\to r)) \to (g\to (p\to r))$.
8. $T\sim y(A_1^+ > A_1) \to (T(A_2(y) \to A_2^+(y)) \to ((T(A_1(y)\to A_2(y))\to(A_1^+(y) \to A_2^+(y)))$ — 6, 7, транз.
9. $T(A_2(y) \to A_2^+(y)) \to ((T(A_1(y)\to A_2(y)) \to (A_1^+(y) \to A_2^+(y)))$ — 1, 8, П1.
10. $T\approx y (A_2 > A_2^+) \to (A_2 (y)> A_2^+(y))$ — (A1).
11. $T\approx y (A_2 > A_2^+) \to T(A_2 (y)> A_2^+(y))$ — (Ус. кон.).
12. $T\approx y (A_2 > A_2^+) \to ((T(A_1(y)\to A_2(y)) \to (A_1^+(y) \to A_2^+(y)))$ — 11, 9, транз.
13. $T\approx y (A_2 > A_2^+) \to \leftrightarrow y((T(A_1(y)\to A_2(y)) \to (A_1^+(y) \to A_2^+(y)))$ — 12 (Бер.).
14. $\leftrightarrow y((T(A_1(y)\to A_2(y)) \to (A_1^+(y) \to A_2^+(y)))$ — 2, 13, П1.

Сходным образом доказывается формула 4. Стало быть, это означает, что имеется $+ \leftrightarrow y(T(A_1 > A_2) \leftrightarrow T(A_1^+ > A_2^+))$.

Замечание. Разобранный случай **A** есть $A_1 > A_2$ есть (экв. 2). Этот случай недоказуем в форме (экв. 1). Это дедуктивно объясняется тем, что при доказательстве указанных формул используются аксиомы и формулы, в антецедентах которых присутствует оператор «T» и от него невозможно избавиться при помощи транзитивности, т. е. при помощи [A0.1]. Такая же ситуация будет иметь место, когда будем разбирать случай **A** есть $\leftrightarrow yA_1$.

Разберем *случай (b)*, который имеет подслучаи.

(b_1). **A** есть $\sim A_1$.

Надо доказать $+ \leftrightarrow y(\sim A_1\to\sim A_1^+)$ и $+ \leftrightarrow y(\sim A_1^+\to\sim A_1)$, т.е. $+ \leftrightarrow y(\sim A_1\leftrightarrow\sim A_1^+)$.

1. $\leftrightarrow y_I (A_1 > A_1^+)$ — индук. доп. (1.1).
2. $T \approx y(A_1 > A_1^+) \to (A_1(y) > A_1^+(y))$ — (A1).
3. $T \sim y(A_1 > A_1^+) \to T(A_1(y) > A_1^+(y))$ — 2 (Ус. кон.).
4. $T(A_1(y) > A_1^+(y)) \to (\sim A_1^+(y) \to \sim A_1(y))$ — П2 в А06.
5. $T \approx y(A_1 > A_1^+) \to (\sim A_1^+(y) \to \sim A_1(y))$ — 3, 4,транз. по А01.
6. $T \sim y(A_1 > A_1^+) \to \leftrightarrow y(\sim A_1^+(y) \to \sim A_1(y))$ — 5 (Бер.).
7. $\leftrightarrow y(\sim A_1^+(y) \to \sim A_1(y))$ — 1, 6, П1.

Сходным образом доказывается формула $\leftrightarrow y(\sim A_1(y) \to \sim A_1^+(y))$. Значит, формула $+ \leftrightarrow y(\sim A_1(y) \leftrightarrow \sim A_1^+(y))$.

(b_2). **А есть TA_1.** Надо доказать $\leftrightarrow y(TA_1(y) \leftrightarrow TA_1^+(y))$.

1. $\leftrightarrow y_I (A_1 > A_1^+)$ — индук. доп. (1.1).
2. $T \approx y(A_1 > A_1^+) \to (A_1(y) > A_1^+(y))$ — (A1).
3. $T \approx y(A_1 > A_1^+) \to T(A_1(y) > A_1^+(y))$ — 2 (Ус. кон.).
4. $T(A_1(y) > A_1^+(y)) \to (TA_1(y) > TA_1^+(y))$ — П2 в тав.:$T(p \to g) \to (Tp \to Tg)$.
5. $T \sim y(A_1 > A_1^+) \to (TA_1(y) > TA_1^+(y))$ — 3, 4, транз. по А01.
6. $T \approx y(A_1 > A_1^+) \to \leftrightarrow y(TA_1(y) > TA_1^+(y))$ — 5 (Бер.).
7. $\leftrightarrow y(TA_1(y) > TA_1^+(y))$ — 1, 6, П1.

Сходным образом доказывается формула $\leftrightarrow y(TA_1^+(y) \to TA_1(y))$. Значит, имеем $+ \sim y(TA_1(y) \leftrightarrow TA_1^+(y))$.

(b_3). **А есть $УA_1$.** Надо доказать $+ \leftrightarrow y(УA_1 \leftrightarrow УA_1^+)$.

1. $\leftrightarrow y_I (A_1 > A_1^+)$ — индук. доп. (1.1).
2. $T \approx y(A_1 > A_1^+) \to (A_1(x) > A_1^+(x))$ — (A1).
3. $T \approx y(A_1 > A_1^+) \to T(A_1(x) > A_1^+(x))$ — 2 (Ус. кон.).
4. $T(A_1(x) > A_1^+(x)) \to У(A_1(x) > A_1^+(x))$ — П2 в тавт.: $Tp \to Уp$.
5. $T \approx y(A_1 > A_1^+) \to У(A_1(x) > A_1^+(x))$ — 3, 4, транз. по А01.
6. $У(A_1(x) > A_1^+(x)) \to (УA_1(x) > УA_1^+(x))$ — А09.
7. $T \approx y(A_1 > A_1^+) \to (УA_1(x) > УA_1^+(x))$ — 5, 6, транз. по А01.
8. $T \sim y(A_1 > A_1^+) \to \leftrightarrow y(УA_1(y) > УA_1^+(y))$ — 7 (Бер.).
9. $\leftrightarrow y(УA_1(y) > УA_1^+(y))$ — 1, 8, П1.

Сходным образом доказывается формула $\leftrightarrow y(УA_1^+ > УA_1)$, т. е. имеем $+ \leftrightarrow y\ (УA_1 \leftrightarrow УA_1^+)$.

(b_4). **А есть EA_1.** Надо доказать $+ \leftrightarrow y(EA_1 \leftrightarrow EA_1^+)$.

Доказательство аналогично предыдущему. Используются тавтологии $Tp \to Ep$ и $E(p \to g) \to (Ep \to Eg)$.

(b_5). **А есть BA_1.** Надо доказать $+ \leftrightarrow y(BA_1 \leftrightarrow BA_1^+)$.

1. $\leftrightarrow yB(A_1 \to A_1^+)$ — условие теоремы для оператора «В».
2. $T \sim yB(A_1 \to A_1^+) \to B(A_1(y) \to A_1^+(y))$ — А1.
3. $T \approx yB(A_1 \to A_1^+) \to TB(A_1(y) \to A_1^+(y))$ — 2 (Ус. кон.).
4. $TB(A_1(y) \to A_1^+(y)) \to (BA_1(y) \to BA_1^+(y))$ –П2 в тав.:

$TB(p\to g)\to(Bp\to Bg)$.

5. $T\approx yB(A_1\to A_1^+)\to(BA_1(y)\to BA_1^+(y))$ — 3, 4, транз. по А01.
6. $T\approx yB(A_1\to A_1^+)\to\leftrightarrow y(BA_1(y)\to BA_1^+(y))$ — 5 (Бер.).
7. $\leftrightarrow y(BA_1(y)\to BA_1^+(y))$ — 1, 6, П1.

Сходным образом доказывается формула $\leftrightarrow y(BA_1^+(y)\to BA_1(y))$. Значит, мы имеем + $\leftrightarrow y(BA_1\leftrightarrow BA_1^+)$.

(с). **А** есть $\leftrightarrow y\mathbf{A}_1$. Надо доказать + $\leftrightarrow yA_1\to\approx yA_1^+$ и + $\leftrightarrow yA_1^+\to\approx yA_1$, т. е. + $\leftrightarrow yA_1\leftrightarrow\approx yA_1^+$.

Предварительно докажем следующую формулу:

(*). $T\approx y(A_1(y) > A_1^+(y))\to(T\approx yA_1(y) > \leftrightarrow yA_1^+(y))$.

1. $T\sim y(C(y) > Д(y)) > (C(y) > Д(y))$ — (А1).
2. $C(y) > [(T\sim y(C(y) > Д(y))) > Д(y)]$ — 1, (пер. пос.).
3. $T\approx yC(y) > C(y)$ — (А1).
4. $T\approx yC(y) > [(T\approx y(C(y) > Д(y))) > Д(y)]$ — 3,2 (транз.).
5. $T\approx yC(y) > [\sim Д(y) > \sim(T\sim y(C(y) > Д(y)))]$ — 4 (контр.) и (транз.).
6. $\sim Д(y) > [T\sim yC(y) > \sim(T\sim y(C(y) > Д(y)))]$ — 5 (пер. пос.).
7. $\sim[T\approx yC(y) > \sim(T\sim y(C(x) > Д(y)))] > Д(y)$ — 6 (контр.) и (сн.~~).
8. $\sim[T\sim yC(y) > \sim(T\approx y(C(x) > Д(y)))] > \leftrightarrow yД(y)$ — 7 (Бер.).
9. $\sim\approx yД(y) > [T\sim yC(y) > \sim(T\approx y(C(y) > Д(y)))]$ — 8 (контр.) и (сн.~~).
10. $T\sim y(C(y) > Д(y)) > (T\approx yC(y) > \leftrightarrow yД(y))$ — 9 (пер. пос.), (контр.) и (транз.).

1. $\leftrightarrow y.\ (A_1 > A_1^+)$ — индук. доп. (1.1).
2. $T\approx y(A_1 > A_1^+)\to(A_1(y) > A_1^+(y))$ — (А1).
3. $T\sim y(A_1 > A_1^+)\to\leftrightarrow y(A_1(y) > A_1^+(y))$ — 2 (Бер.).
4. $T\approx y(A_1 > A_1^+)\to T\approx y(A_1(y) > A_1^+(y))$ — 3 (Ус. кон.).
5. $T\approx y(A_1(y) > A_1^+(y))$ — 1, 3, П1.

(6). $T\sim y(A_1(y) > A_1^+(y))\to(T\approx yA_1(y) > \leftrightarrow yA_1^+(y))$ — (*).
(7). $TT\approx y(A_1(y) > A_1^+(y))\to(T\sim yA_1(y) > \leftrightarrow yA_1^+(y))$ — 6 (Ус. ант.).
(8). $(T\approx yA_1(y) > \leftrightarrow yA_1^+(y))$ — 5, 7, П1.

Аналогично доказывается формула $(T\approx yA_1^+\to\approx yA_1)$, т. е. имеем $+T\approx yA_1\leftrightarrow T\approx yA_1^+$.

Доказательство теоремы завершено.

Замечание. Все разобранные случаи, кроме случаев **А** есть $\mathbf{A}_1 > \mathbf{A}_2$ и **А** есть $\leftrightarrow y\mathbf{A}_1$, доказаны в форме (экв.1). Эти случаи также доказуемы и в форме (экв.2).

Следствие 1 (теоремы о замене эквивалентных). Пусть **С**, **Д**, **А**, и $\mathbf{A}^+$ удовлетворяют условиям теоремы. Тогда, если $+\approx\chi_i(\mathbf{C}\to\mathbf{Д})$ и $+\approx\chi_i(\mathbf{Д}\to\mathbf{C})$ и +**А**, то + $\mathbf{A}^+$.

Тем самым правило [**П10**] обоснованно.

Обоснование [П11]:

Используется стандартное понятие *подобных* формул А(х) и А(у)[10], где «х» и «у» — различные переменные. Формулы А(х) и А(у) *называются подобными*, если переменная у свободна для переменной х в формуле А(х) (т. е. если в результате подстановки у вместо х, у не окажется связанной квантором переменной в формул А(у)), и наоборот, если переменная х свободна для переменной у в формуле А(у).

Утверждение. Если формулы А(х) и А(у) подобны, то + T≈xA(x) > ↔yA(y) и + T~yA(y) > ↔xA(x) (+T∃xA(x) > ∃yA(y) и + T∃yA(y) > ∃xA(x)).

Доказательство:

1. T~xA(x) > A(y) — (A1).
2. T≈xA(x) > ↔yA(y) — 1, (Бер.).
3. T~yA(y) > A(x) — (A1).
4. T~yA(y) > ↔xA(x) — 3 (Бер.).

Доказательства +T∃xA(x) > ∃yA(y) и + T∃yA(y) > ∃xA(x) опускаются.

Следствие 2 (переименование связанных переменных). Если ↔xA(x) (соответственно ∃xA(x)) есть подформула формулы **A**, A(y) подобна A(x) и $\mathbf{A}^+$ есть результат замены хотя бы одного вхождения ↔xA(x) в **A** на~yA(y), то + **A**→ $\mathbf{A}^+$ и + $\mathbf{A}^+$→ **A**.

Доказательство на основании «Следствия 1» и «Утверждения».

§4. Некоторые доказуемые формулы

a) *Формулы введения квантора существования и отношения между кванторами:*

1. TA(y) > ∃xA.	2. A(y) > ~T~∃xA.	
3. T≈x~A > ~∃xA.	4. T≈xA > ~∃x~A.	
5. T~∃x~A >↔xA.	6. T~≈xA > ∃x~A.	
7. T~∃xA > ↔x~A.	8. T∃x~A > ~≈xA.	9. T≈xA > ∃xA.

b) *Кванторы и операторы:*

1. T≈xA ↔ ↔xTA.	2. ∃xTA ↔ T∃xA.
3. ∃xУA ↔ У∃xA.	4. E∃xA → ∃xEA.

c) *Сильное отрицание, слабое отрицание и кванторы:*

По определению, сильное отрицание есть ¬A $\equiv_{df}$~TA, где «~» — слабое отрицание.

1. ↔x¬~A ↔ ¬~≈x**A**.	2. ∃x¬~A ↔ ¬~∃xA.	
3. ¬~≈xA > ¬~∃xA.	4. ↔xA > ¬ ~≈xA.	
5. ∃xA > ¬~∃xA.	6. ~¬≈xA > ↔xA.	7. ~¬∃xA > ∃xA.

[10] См., напр.: *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. М., 1984. С. 71.

d) *Пронесение «внутрь» и вынесение «наружу» кванторов и операторов в импликативных формулах* (Ограничения на вхождения переменных в формулы обычные):

1. T≈x(C(x)>Д(x)) > (T~xC(x)>~xД(x)).
2. T≈x(C(x)>Д(x)) > (∃xC(x)>∃xД(x)).
3. T≈xB(C(x)>Д(x)) >(T≈xBC(x)>≈xBД(x)).
4. T≈xB(C(x) > Д(x)) > (∃xBC(x) > ∃xBД(x)).
5. T≈xE(C(x)>Д(x)) > (T≈xEC(x)>≈xEД(x)).
6. T~xE(C(x)>Д(x)) > (∃xEC(x)>∃xEД(x)).
7. T≈xУ(C(x) > Д(x)) > (T≈xУC(x) > ↔xУД(x)).
8. T≈xУ(C(x)>Д(x)) > (∃xУC(x)>∃xУД(x)).
9. T≈x(A(x)>C) > (∃xA(x)>C).
10. T≈x(BA(x)>C) > (∃xBA(x)>C).
11. T~x(EA(x)>C) > (∃xEA(x)>C).
12. T≈x(УA(x)>C) > (∃xУA(x)>C).
13. T(∃xA(x) > C) > ↔x(A(x) > C).
14. T(∃xBA(x)>C) > ↔x(BA(x)>C).
15. T(∃xEA(x) > C) > ↔x(EA(x) > C).
16. T(∃xУA(x) > C) > ↔x(УA(x) > C).
17. T∃x(A(x) > C) > (T≈xA(x) > C).
18. T∃x(BA(x) > C) > (T≈xBA(x) > C).
19. T∃x(EA(x) > C) > (T≈xEA(x) > C).
20. T∃x(УA(x) > C) > (T≈xУA(x) > C).
21. (T≈xA(x) > C) > ∃x(A(x) > C).
22. (T≈xBA(x) > C) > ∃x(BA(x) > C).
23. (T~xEA(x) > C) > ∃x(EA(x) > C).
24. (T≈xУA(x) > C) > ∃x(УA(x) > C).

e) *Перестановка кванторов и «пронесение» операторов через кванторы.*

1. +T∃x∃yA(x,y) → ∃y∃xA(x,y).
2. +T≈x~yA(x,y) → ↔y≈xA(x,y).
3. +T∃x≈yA(x,y) → ↔y∃xA(x,y).
4. + TB∃x∃yA(x,y) → ∃x∃yBA(x,y).
5. T≈x~yBA(x,y) → B≈x~yA(x,y).
6. +У≈x≈yA(x,y) → ↔x≈yУA(x,y).
7. +≈x≈yAУ(x,y) → У≈x≈yA(x,y).
8. +У∃x∃yA(x,y) → ∃x∃yУA(x,y).
9. +∃x∃yУA(x,y) → У∃x∃yA(x,y).
10. +E∃x∃yA(x,y) → ∃x∃yAE(x,y).