Н. К. Косовский, А. В. Тишков

ТРАНЗИТИВНОСТЬ НЕРАВЕНСТВ В РАЦИОНАЛЬНОЗНАЧНОЙ УРОВНЕВОЙ ЛОГИКЕ С НУЛЕМ И БЕЗ НУЛЯ*

1. Введение

Сформулированы два секвенциальных исчисления для двух логик с потенциально бесконечным числом значений развивающих (1). Обе логики содержат сравнения, включающие неравенство логических значений и принадлежность конечному множеству, задаваемому списком. Первая логика, отражающая гуманитарное и прикладное мышление, является подлогикой второй, отражающей математическое и теоретическое естественно-научное мышление, избегающее рассмотрения парадоксов.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Гуманитарного научного фонда. Проект № 97-05-12048.

Обе логики используют одни и те формулы и правила вывода. У них отличаются только аксиомы.

Доказаны некоторые свойства этих логик, в частности, установлена допустимость правил, отражающих транзитивность неравенства.

Вопрос о логической истине пронизывает всю историю как логики, так и философии вообще. Выдающиеся ученые пытались объяснить, что же следует считать объективно истинным, а что — нет, возводя сложные конструкции верных умозаключений над прочным фундаментом несомненно истинных, как им казалось, постулатов. Но проходило время, и новые идеи подтачивали этот фундамент, который давал трещины в виде парадоксов или даже выявленных противоречий.

Так был развеян миф о нашей планете, существующей на трех китах, о Солнце, движущемся вокруг Земли; была разрушена блестящая механистическая модель мира Ньютона. И даже в такой строгой науке, как математика, многие интуитивно справедливые утверждения оказались неоднозначными или неразрешимыми. Например, вспомним постулат о единственной прямой, параллельной данной и проходящей через не лежащую на ней точку — в геометрии Лобачевского таких прямых сколь угодно много, а в римановой геометрии их нет совсем; нашлись вопросы, которые оказались алгоритмически неразрешимыми, такие как самоприменимость алгорифмов.

В начале нашего столетия была формализована предикатная ортодоксальная логика. Но и сейчас среди логиков С.-Петербурга нет единодушия, какую логику выбрать. Побывав на лекции проф. Н. А. Шанина, вы узнаете, что истина — это сигнал, получаемый в результате мысленного эксперимента над объектами данного высказывания. Этот эксперимент однозначно кодируется деревом синтаксического разбора высказывания, которое, проявив небольшую сноровку, сможет построить каждый. Я. Я. Голота считает, что мы далеко не всегда можем интерпретировать понятия двузначным образом; манипуляции с такими терминами, как «прочность», «работоспособность», «живучесть», «доходность», «выгодность» и т. п., требуют нечеткой континуумзначной логики антонимов (2).

Авторы настоящей статьи предлагают дополнить их высказывания сравнениями по линейно упорядоченной степени уверенности в достоверности утверждения. Умозаключения в такой *уровневой логике* получают уровень наименее истинного (наиболее ложного) факта, использованного в этом умозаключении. В данном случае математикам не придется избегать не совсем очевидных постулатов — достаточно придать им небольшой уровень истинности, и они вместе со следствиями будут лежать на одном уровне. Неуверенность в том, стоит ли применять конкретное утверждение для доказательства теоремы, имеющая метод в двузначной логике, заменится ясным представлением о том, какой уровень истинности получит в этом случае теорема. Вопрос сведется к тому, достаточно убедителен этот уровень для исследователя или нет.

Уровневые логики позволяют манипулировать и неопределенными понятиями, например, понятием «прочность». Утверждению «алмаз прочен» сопоставим уровень истинности 1000. утверждению «сталь прочна» — 950, а утверждению «бумага прочна», например, 10. Такой подход близок (3) и (4).

Мы введем две уровневые логики, развивающие (1). В первой из них, *практической* уровневой логике PLL (*practical level logic*), допускается существование предикатов, логическое значение которых иногда совпадает с логическим значением их отрицаний (такие предикаты используются в гуманитарных науках). Во второй, *теоретической* логике TLL (*theoretical level logic*), логическое значение любого предиката всегда отличается от логического значения его отрицания. Вторая логика предлагается для использования в математических науках или в теоретических построениях естественных наук.

Теорема 6 этой статьи доказана А. В. Тишковым.

2. Логические значения

Логические значения TLL могут быть представлены множеством рациональных чисел. Логика PLL содержит нуль как парадоксальное логическое значение, не истинное и не ложное. В TLL пропозициональная переменная и предикат не могут принимать логического значения нуля. Все логические значения больше нуля в обеих логиках являются истинными. Все логические значения меньше нуля в обеих логиках являются ложными.

Хотя число логических значений бесконечно, каждый предикат принимает логические значения только из конечного набора.

3. Логические связки и кванторы в PLL и TLL

Логические значения конъюнкции и дизъюнкции определяются обычным для многозначных логик Поста образом (см., например, 5), соответственно как минимум и максимум логических значений аргументов. Операция отрицания соответствует одноместному минусу. Материальная импликация ($x \Rightarrow y$) имеет логическое значение $\max(-|x|, |y|)$, где $[x]$, $[y]$ — логические значения x и y соответственно. Материальная импликация истинна тогда и только тогда, когда посылка ложна и заключение истинно. Традиционным образом можно определить и эквивалентность.

Формула $\exists x A$, обобщающая дизъюнкцию, имеет логическое значение $\max\limits_x A(x)$. Формула $\forall x A$ как обобщение конъюнкции имеет логическое значение, равное $\min\limits_x A(x)$. Поскольку каждый предикат принимает конечное число значений, max и min всегда определены и их значение — рациональное число.

4. Предикатные формулы

Атомарная формула PLL и TLL представляет собой константу нуль, пропозициональную константу, пропозициональную переменную или символ n-местного предиката с последующим за ним заключенным в скобки набором из n аргументов этого предиката. Аргументами предиката являются термы: индивидные переменные и термы, полученные с помощью k-местных функций над предметной областью.

Предикатные формулы PLL и TLL определяются, как обычно, из атомарных формул с использованием отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, кванторов (всеобщности и существования) и четырехместной логической связки — условного выражения $if(B \leqslant A)thenCelseDfi$.

Мы интересуемся сравнением высказываний по истинностной шкале, константа нуль позволит при этом отличить истинные высказывания от ложных (и выделить парадоксальные высказывания для PLL).

5. Логические сравнения

Элементарным актом сравнения между собой предикатных формул является утверждение «логическое значение предикатной формулы A меньше логического значения предикатной формулы B» и утверждение «логическое значение предикатной формулы A не больше логического значения предикатной формулы B». Пользуясь условиями такого типа, можно записывать равенство предикатных формул, а также принадлежность формулы конечному списку формул (равенство одной из формул этого списка).

Пусть знак сравнения одного из видов $\leqslant$, $<$, $=$, $\in$ используется как еще одна логическая связка между двумя предикатными формулами (последний знак — между предикатной формулой и конечным множеством предикатных формул). Такую формулу будем называть *логическим сравнением* PLL и TLL или кратко — *сравнением*. Логическим значением сравнения является 1, если оно выполняется, и -1 в противном случае. Равенство между предикатными формулами вычисляется как конъюнкция разнонаправленных нестрогих неравенств между ними; принадлежность предикатной формулы списку предикатных формул — как дизъюнкция равенств ее каждой формуле списка.

Сравнения не могут быть вложенными друг в друга. Тогда мы можем строить логику над сравнениями, соединяя их логическими связками и используя кванторы.

Внешняя предикатная формула TLL *(*PLL*)* определяется так же, как предикатная формула TLL (PLL), но атомарными формулами для нее служат сравнения TLL (PLL). Предикатные формулы, определенные прежде в разделе 4, будем называть *внутренними предикатными формулами.*

Определим теорию первого порядка сравнений внутренних предикатных формул практической уровневой логики и теорию первого порядка сравнений внутренних предикатных формул теоретической уровневой логики.

6. Аксиомы

Секвенциальные исчисления для PLL и TLL назовем соответственно $SPLL$ и $STLL$.

Определение. *Секвенция* $SPLL$ и $STLL$ представляет собой слово, начинающееся знаком секвенции «$\rightarrow$» и состоящее из списка внешних предикатных формул (*членов секвенции*).

Секвенция интерпретируется как дизъюнкция всех ее членов.

Для проверки того, является ли секвенция *аксиомой* $SPLL$ и $STLL$, сначала вычеркнем из секвенции все неатомарные внешние предикатные формулы, после чего среди членов секвенции остануться только сравнения. Далее вычеркнем сравнения, содержащие бинарные логические связки и кванторы, или знаки $=$, $\in$. После этого останутся сравнения только вида $(A \leqslant B)$ и $(A < B)$, где A и B — внутренние атомарные формулы. Сократим двойные отрицания.

Проверяем, имеет ли место хотя бы один из следующих случаев.

1. Среди получившихся сравнений можно выделить циклическую цепочку односторонних неравенств $A_1 \prec_1 A_2 \prec_2 \cdots \prec_n A_1$ при некотором $n \geqslant 1$, где $\prec_i$ означает либо «$\leqslant$», либо «$<$» и хотя бы одно из этих неравенств нестрогое.

2. Среди получившихся сравнений можно выделить циклическую цепочку строгих неравенств $A_1 < A_2 < \cdots < A_n < A_1$, и имеет место хотя бы один из следующих подслучаев.

Для обеих логик секвенция является аксиомой, если в таком цикле содержатся две различные пропозициональные константы.

Для TLL, при $n \geqslant 2$ и $A_i (2 \leqslant i \leqslant n)$, совпадающим с нулем или с $\neg A_1$, циклическая цепочка из строгих неравенств определяет аксиому. Для PLL в этих случаях нужно заменить во всей секвенции элементы цикла нулем. И проверку того, что исходная секвенция является аксиомой, начнем сначала.

Для обеих логик, если циклическая цепочка строгих неравенств содержит только одну ненулевую пропозициональную константу и не содержит пары A и $\neg A$ ни для какой внутренней формулы A, следует заменить во всей секвенции все элементы цикла этой константой. И проверку того, что исходная секвенция является аксиомой, начнем сначала.

Наконец, для обеих логик, если циклическая цепочка строгих неравенств не содержит ни одной константы и ни одной пары A и $\neg A$, следует заменить во всей секвенции все формулы цикла на новую пропозициональную переменную. И проверку того, что исходная секвенции является аксиомой, начнем сначала.

Примеры аксиом для обеих логик:

- $\to (A \leqslant A)$,
- $\to (A < B)(B \leqslant C)(C < A)$,
- $\to (A < 5)(5 < C)(C < 4.02)(4.02 < A)$,
- $\to (A < B)(B < \frac{1}{3})(\frac{1}{3} < A)(\frac{1}{3} \leqslant B)$.
- $\to (A < B)(B < \neg A)(\neg A < A)(0 \leqslant B)$.
- $\to (A < B)(B < C)(C < A)(B \leqslant D)(D < A)$.

Не является аксиомами $SPLL$, но являются аксиомами $STLL$ секвенции

- $\to (A < B)(B < \neg A)(\neg A < A)$,
- $\to (A < 0)(0 < A)$.

7. Правила вывода

Формулируя одни и те же для $SPLL$ и $STLL$ правила вывода, будем пользоваться прописными курсивными буквами для обозначения внутренних предикатных формул, прописными полужирными буквами — для обозначения внешних предикатных формул и буквой Γ — для обозначения пустого или конечного списка внешних предикатных формул.

• *Правило перестановки внешних предикатных формул секвенции.* Можно поменять местами любые две внешние предикатные формулы секвенции.

• *Правила для внутреннего отрицания.*

$$\frac{\to \Gamma(B < A)}{\to \Gamma(\neg A < \neg B)}(\neg < \neg),$$

$$\frac{\to \Gamma(\neg B < A)}{\to \Gamma(\neg A < B)}(\neg <),$$

$$\frac{\to \Gamma(A < \neg B)}{\to \Gamma(B < \neg A)}(< \neg),$$

и аналогичные правила с заменой $<$ на $\leqslant$. Обратим внимание на необычное для секвенциальных исчислений понижение логической длины у некоторых сравниваемых формул (*логической длиной* предикатной формулы называется количество логических связок и кванторов в этой формуле), в то время как логическая длина всего сравнения не уменьшается.

- *Правила для внешнего отрицания.*

$$\frac{\to \Gamma(B < A)}{\to \Gamma\neg(A \leqslant B)}\neg(<), \quad \frac{\to \Gamma(B \leqslant A)}{\to \Gamma\neg(A < B)}\neg(\leqslant), \quad \frac{\to \Gamma\mathbf{A}}{\to \Gamma\neg\neg\mathbf{A}}(\neg\neg).$$

- *Правила для внутренних конъюнкции и дизъюнкции.*

$$\frac{\to \Gamma(A < C)(B < C)}{\to \Gamma((A\&B) < C)}(\& <), \quad \frac{\to \Gamma(C < A) \to \Gamma(C < B)}{\to \Gamma(C < (A\&B))}(< \&),$$

$$\frac{\to \Gamma(A < C) \to \Gamma(B < C)}{\to \Gamma((A \vee B) < C)}(\vee <), \quad \frac{\to \Gamma(C < A)(C < B)}{\to \Gamma(C < (A \vee B))}(< \vee),$$

и аналогичные правила с заменой $<$ на $\leqslant$.

- *Правила для внешних конъюнкции и дизъюнкции.*

$$\frac{\to \Gamma\mathbf{A} \to \Gamma\mathbf{B}}{\to \Gamma(\mathbf{A}\&\mathbf{B})}(\&), \quad \frac{\to \Gamma\mathbf{A}\mathbf{B}}{\to \Gamma(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})}(\vee),$$

$$\frac{\to \Gamma\neg\mathbf{A}\neg\mathbf{B}}{\to \Gamma\neg(\mathbf{A}\&\mathbf{B})}(\neg\&), \quad \frac{\to \Gamma\neg\mathbf{A} \to \Gamma\neg\mathbf{B}}{\to \Gamma\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})}(\neg\vee).$$

- *Правила для условного выражения.*

$$\frac{\to \Gamma(B \leqslant A)(D \leqslant E) \to \Gamma(A < B)(C \leqslant E)}{\to \Gamma(if(B \leqslant A)thenCelseDfi \leqslant E)}(if \leqslant),$$

$$\frac{\to \Gamma(B \leqslant A)(E \leqslant D) \to \Gamma(A < B)(E \leqslant C)}{\to \Gamma(E \leqslant if(B \leqslant A)thenCelseDfi)}(\leqslant if),$$

$$\frac{\to \Gamma(B \leqslant A)(D < E) \to \Gamma(A < B)(C < E)}{\to \Gamma(if(B \leqslant A)thenCelseDfi < E)}(if <),$$

$$\frac{\to \Gamma(B \leqslant A)(E < D) \to \Gamma(A < B)(E < C)}{\to \Gamma(E < if(B \leqslant A)thenCelseDfi)}(< if).$$

- *Правила для равенства и неравенства.*

$$\frac{\to \Gamma(A \leqslant B) \to \Gamma(B \leqslant A)}{\to \Gamma(A = B)}(=), \quad \frac{\to \Gamma(B < A)(A < B)}{\to \Gamma\neg(A = B)}\neg(=).$$

- *Правила для принадлежности и непринадлежности.*

$$\frac{\to \Gamma(X_0 = X_1)(X_0 = X_2)\ldots(X_0 = X_m)}{\to \Gamma(X_0 \in \{X_1, X_2, \ldots X_m\})}(\in),$$

$$\frac{\to \Gamma(X_0 = X_1) \to \Gamma(X_0 = X_2) \cdots \to \Gamma(X_0 = X_m)}{\to \Gamma\neg(X_0 \in \{X_1, X_2, \ldots, X_m\}),} \neg(\in).$$

• *Внутренние кванторные правила.*

$$\frac{\to \Gamma([A]^x_T < B)(\forall xA < B)}{\to \Gamma(\forall xA < B)} (\forall x <), \quad \frac{\to \Gamma(B < [A]^x_T)}{\to \Gamma(B < \forall xA)} (< \forall x),$$

$$\frac{\to \Gamma([A]^x_y < B)}{\to \Gamma(\exists xA < B)} (\exists x <), \quad \frac{\to \Gamma(B < [A]^x_T)(B < \exists xA)}{\to \Gamma(B < \exists xA)} (< \exists x),$$

и аналогичные правила с заменой $<$ на $\leqslant$.

Здесь $[A]^x_T$ — результат подстановки терма T вместо переменной x и y — переменная.

• *Внешние кванторные правила.*

$$\frac{\to \Gamma[\mathbf{A}]^x_y}{\to \Gamma\forall x\mathbf{A}} (\forall), \quad \frac{\to \Gamma[\mathbf{A}]^x_T \exists x\mathbf{A}}{\to \Gamma\forall x\mathbf{A}} (\exists),$$

$$\frac{\to \Gamma\forall x\neg\mathbf{A}}{\to \Gamma\neg(\forall x\mathbf{A})} \neg(\forall), \quad \frac{\to \Gamma\forall x\neg\mathbf{A}}{\to \Gamma\neg(\exists x\mathbf{A})} \neg(\exists).$$

Кванторные правила имеют стандартные для двузначной логики ограничения: предметная переменная y и терм T свободны для подстановки в A и в $\mathbf{A}$ вместо свободного вхождения x, и, кроме этого, переменная y не входит свободно в заключения правил $(\exists x \leqslant)$, $(\exists x <)$, $(\leqslant \forall x)$, $(< \forall x)$ и $(\forall x)$.

Определение. *Выводом* в $SPLL$ и $STLL$ назовем последовательность секвенций, каждая из которых либо является аксиомой, либо получается из предыдущих путем применения правил вывода.

Определение. *Секвенция выводима* в $SPLL$ и $STLL$, если она является последней секвенцией какого-либо вывода. Внутренняя предикатная формула A называется выводимой, если выводима секвенция $\to (0 \leqslant A)$.

Переменную y в правилах $(\leqslant \forall x)$, $(< \forall x)$, $(\exists x \leqslant)$, $(\exists x <)$, $(\forall x)$ будем называть собственной переменной этих правил. В выводе такие переменные будем называть собственными.

8. Некоторые вспомогательные определения

По отношению к правилам вывода, кроме правила перестановки, и аксиомам удобно определить главное, параметрическое и боковое вхождение в секвенцию для внутренних и внешних формул.

Определение главного вхождения внешней формулы.

1. Вхождение внешней формулы в аксиому называется главным, если без него секвенция перестанет быть аксиомой.

2. Вхождение внешней формулы в заключение правила является главным, если оно не принадлежит списку Г. Главное вхождение внешней формулы всегда является последним вхождением в заключение правила.

Определение. Вхождение внешней формулы в посылку правила называется боковым, если оно не принадлежит списку Г.

Определение главного вхождения внутренней формулы.

1. По определению аксиомы главная внешняя формула аксиомы обязательно является сравнением. Вхождения обеих внутренних формул в это сравнение являются главными.

2. Вхождение внутренней формулы в заключение правила является главным, если оно — часть главной внешней формулы и не встречается в боковых внешних формулах посылок.

Определение. Вхождение внутренней формулы в посылку правила называется боковым, если оно не встречается в главной внешней формуле заключения.

Определение. Вхождение внутренней или внешней формулы в посылку правила, заключение правила или в аксиому называется параметрическим, если оно не является ни боковым, ни главным.

Для правила перестановки будем считать переставляемые формулы боковыми для посылки и главными для заключения.

Таким образом, для каждого применения правила мы можем выделить боковые, главные и параметрические вхождения формул этого применения.

Примеры:

• посылка правил ($\& <$), ($< \vee$) и $\neg(=)$ имеет два внутренних боковых вхождения (формулы A и B) и два внешних боковых вхождения (сравнения, не входящие в Г);

• правила ($\neg\&$) и ($\vee$) являются чисто внешними и имеют по два внешних боковых вхождения в посылке;

• правила ($\neg \prec \neg$) имеют по две внутренние боковые и по две внутренние главные формулы;

• правила ($\forall \prec$), ($\prec \exists$), ($\exists$) имеют по две внешние боковые формулы, стоящие на последнем и предпоследнем месте в посылке;

• обе посылки правил для условного выражения имеют по два внешних боковых вхождения и по три внутренних (формулы A, B, C или формулы A, B, D);

• посылка правила ($\in$) имеет m внешних боковых вхождения и $m+1$ внутреннее (формулы $X_0 \ldots X_m$);

• все m посылок правила $\neg(\in)$ содержат по одному внешнему боковому вхождению и по два внутренних.

Определение. Вывод назовем *древовидным*, если ни одна секвенция в нем не используется как посылка повторно ни в одном из применений правил.

Древовидный вывод легко представить себе в виде *дерева вывода.* Листья располагаются вверху и помечаются аксиомами. Ребро или пара ребер, ведущих от листьев к одному узлу, символизируют применение правила вывода — соответственно одно- или двухпосылочного. Этот узел помечается, во-первых, символом примененного правила, во-вторых, заключением правила. Аналогично выглядят остальные внутренние узлы дерева.

Древовидный вывод может иметь бóльшую длину, чем недревовидный (или *линейный*), поскольку некоторые одинаковые секвенции приходится выводить несколько раз в разных частях дерева; в линейном выводе мы можем несколько раз воспользоваться однажды выведенной секвенцией.

Однако древовидные выводы представляются более удобными для доказательств и впредь под выводом мы будем подразумевать древовидный вывод.

Введем отношение предок-потомок для вхождения формул в выводах. *Непосредственным потомком* бокового вхождения формулы в посылку правила является соответствующее главное вхождение формулы в заключение этого правила. Довольно часто непосредственный потомок может иметь более одного непосредственного предка. Например, в кванторных правилах $(\forall <)$, $(\forall \leqslant)$, $(\exists)$ главная внешняя формула и составляющие ее внутренние формулы имеют по два предка, а главная внешняя формула правила $\neg(\in)$ имеет столько же внешних непосредственных предков, сколько посылок в этом правиле.

Потомком вхождения формулы называется его непосредственный потомок, непосредственный потомок непосредственного потомка и т. д.

9. Теорема о семантическом обосновании исчислений $SPLL$ и $STLL$

Определение. *Формульным образом* секвенции является дизъюнкция всех внешних предикатных формул, составляющих секвенцию.

Теорема 1. *Формульные образы аксиом $SPLL$ и $STLL$ тождественно истинны; заключения правил $SPLL$ и $STLL$ тождественно истинны, если тождественно истинны посылки.*

Идея доказательства. Для аксиом утверждение теоремы очевидно, поскольку определение аксиомы практически совпадает с понятием тождественной истинности ее формульного образа.

Для полного доказательства требовалось бы рассмотреть каждое из правил $SPLL$ или $STLL$. Мы рассмотрим только два, остальные проверяются аналогично, при этом предикатная формула со свободными переменными считается истинной, если она истинна при подстановке любой индивидной константы вместо такой переменной.

Возьмем правило

$$\frac{\to \Gamma(A < C)(B < C)}{\to \Gamma((A\&B) < C)}(\& <).$$

Если дизъюнкция формул Γ истинна, то заключение истинно. Иначе, при истинной посылке, имеет место либо $A < C$, либо $B < C$, и, следовательно, минимум из A, B меньше C.

Возьмем правило

$$\frac{\to \Gamma(B < A)(D \leqslant E) \to \Gamma(A < B)(C \leqslant E)}{\to \Gamma(if(B \leqslant A)thenCelseDfi < E)}(if \leqslant).$$

Если дизъюнкция формул Γ истинна, то заключение истинно. Иначе, при истинных посылках, имеет место либо $B \leqslant A$, в этом случае $C \leqslant E$, либо $A < B$, в этом случае $D \leqslant E$, что нам и требуется. *Теорема доказана.*

Следствие. *Формульный образ выводимой секвенции тождественно истинен.*

Доказательство легко проводится индукцией по количеству секвенций в выводе (*длине вывода*).

База индукции соответствует длине вывода, равной единице. Значит, выводимая секвенция — аксиома, формульный образ которой истинен по теореме 1.

Индукционный переход. Формульный образ последней секвенции вывода длины k тождественно истинен, поскольку посылки последнего примененного правила истинны по индукционному предположению, а заключение истинно по теореме 1. *Следствие доказано.*

10. Вывод с чистыми переменными

Определение. Формула или секвенция называется *чистой*, если она не содержит свободных и связанных вхождений одной и той же переменной.

Определение. Вывод называется *выводом с чистыми переменными,* если каждая связанная переменная не встречается в нем свободно.

Исчисления $SPLL$ и $STLL$ предназначены для вывода чистых секвенций.

Лемма 1. *Если ни одна переменная из терма t не входит свободно в вывод T и не является собственной, где x — свободная переменная в выводимой секвенции S, то $[T]^x_t$ является выводом $[S]^x_t$.*

Доказательство проводится индукцией по длине вывода T.

База индукции. Аксиома при подстановке не перестает быть таковой.

Индукционный переход. Применив индукционное предположение к посылке (или посылкам) последнего примененного правила вывода, сделаем требуемую замену в посылке (посылках). Далее легко проверить для всех правил, кроме ($\leqslant \forall$), ($< \forall$), ($\exists \leqslant$), ($\exists <$), ($\forall$), что применяя последнее правило из T, мы получим искомый вывод $[T]^x_t$ секвенции $[S]^x_t$. Для перечисленных кванторных правил возможна ситуация, когда какая-либо свободная переменная t совпадет с собственной переменной правила и его применение нарушит ограничение, связанное с собственными переменными такого правила. В этом случае по индукционному предположению можно заменить собственную переменную на переменную, не участвовавшую в выводе, а затем уже делать подстановку терма. После этого применение правила станет возможным. *Лемма доказана.*

Теорема 2 [*о выводе с чистыми переменными*]. *Любой вывод T чистой секвенции S может быть преобразован в вывод той же секвенции S с чистыми переменными.*

Доказательство. Пусть переменная a в T не чиста, т. е. в какую-то секвенцию из T она входит свободно, а в какую-то связанно.

В S не может иметь места свободное вхождение переменной a, поскольку каждая связанная переменная в выводе $SPLL$ и $STLL$ входит связанно и в последнюю секвенцию. Тогда S будут содержать и свободное и связанное вхождения a, нарушая таким образом чистоту S.

Пользуясь тем, что нет свободных вхождений переменной a в S, можно переименовать все свободные вхождения a в T на вхождения переменной, не участвовавшей в выводе, пользуясь леммой 1.

Проделав такие переименования со всеми «нечистыми» переменными T, получаем вывод с чистыми переменными. *Теорема доказана.*

11. Допустимость некоторых дополнительных правил

Определение. Правило вывода p будем называть *допустимым в* $SPLL$ (или в $STLL$), если любой вывод в расширенной правилом p логике $SPLL$ (соответственно $STLL$) можно перестроить в вывод без применения p.

Теорема 3 [*о допустимости правила уточнения*]. *Правило* $\frac{\to \mathbf{\Gamma}}{\to \mathbf{\Gamma\Phi}}$ *допустимо.*

Доказательство. Если $\to\mathbf{\Gamma}$ — аксиома, то $\to\mathbf{\Gamma\Phi}$ — тоже аксиома, так как цепочка-цикл, определяющая аксиому, останется той же.

В общем случае, пусть T — вывод $\to\mathbf{\Gamma}$. Если в $\mathbf{\Phi}$ нет собственных переменных, то добавим к аксиомам T формулу $\mathbf{\Phi}$ и, используя те же правила, что и в T, получим вывод $\to\mathbf{\Gamma\Phi}$. Коллизии возникнут, если $\mathbf{\Phi}$ содержит собственные переменные правил. Эту ситуацию и будем рассматривать дальше.

По теореме 2 преобразуем T в вывод с чистыми переменными. Будем называть его далее T.

Поднимаясь по дереву вывода к аксиомам, начиная с секвенции, где одно из правил $(\leqslant \forall)$, $(< \forall)$, $(\exists \leqslant)$, $(\exists <)$, $(\forall x)$ было применено, переименуем собственные переменные, пользуясь леммой 1. Сделаем так со всеми случаями применения этих правил и получим вывод требуемой секвенции $\to\mathbf{\Gamma\Phi}$. *Теорема доказана.*

Теорема 4. *Все правила SPLL и STLL обратимы.*

Доказательство. Обратимость правил $(\prec \exists)$ $(\forall \prec)$, где $\prec$ означает либо $<$, либо $\leqslant$, а также правила $(\exists)$ следует из допустимости правила уточнения (теорема 3).

Правила $(\neg \prec)$ и $(\prec \neg)$ обратны сами себе.

Допустимость остальных обратных правил докажем индукцией о длине вывода посылки.

База индукции. Посылка — аксиома.

Пусть аксиомой является посылка правила

$$\frac{\to \mathbf{\Gamma}(\neg A \prec \neg B)}{\to \mathbf{\Gamma}(B \prec A)}(\neg \prec \neg)^{-}.$$

Если цепочка-цикл находится в $\mathbf{\Gamma}$, то заключение также содержит эту цепочку и поэтому является аксиомой. Если же цепочка имеет вид

$$\prec_1 A_k \prec_2 \cdots \prec_3 \neg A \prec_4 \neg B \prec_5 A_l \prec_6 \ldots,$$

то, применяя правила $(\neg \prec)$ и $(\prec \neg)$, мы получим цепочку

$$\prec_1 B_k \preceq_2 \cdots \prec_3 \neg A \prec_4 \neg B \prec_5 B_l \prec_6 \ldots,$$

где B_i есть отрицание A_i. Таким образом заключение тоже оказывается выводимым. В обоих случаях база индукции для правил типа $(\neg \prec \neg)^{-}$ проверена.

Рассмотрим оставшиеся правила удаления связок, правила $(\exists \prec)^{-}$, $(\prec \forall)^{-}$ и $(\forall)^{-}$ удаления кванторов. Они могут быть представлены в следующем виде:

$$\frac{\to \mathbf{\Gamma\Phi}}{\to \mathbf{\Gamma\Psi}},$$

где Ψ — это список формул, а формула $\mathbf{\Phi}$ содержит квантор или связку, которая должна быть удалена. Если посылка этого правила — аксиома, то, по определению аксиомы, секвенция $\to\mathbf{\Gamma}$ — тоже аксиома, а значит, и секвенция $\to\mathbf{\Gamma}\Psi$ также является аксиомой.

Индукционный переход. Для каждого обратного правила проводим следующее рассуждение. Если на последнем шаге было применено соответствующее прямое правило, то оно применялось к секвенции, выводимость которой требуется установить. Если на последнем шаге вывода было применено какое-либо другое правило, то допустимость обратного правила следует из индукционного предположения. *Теорема доказана.*

Теорема 5. *Правило сокращения повторений* $\frac{\rightarrow \mathbf{\Gamma A A}}{\rightarrow \mathbf{\Gamma A}}$ *допустимо. Доказательство* проведем методом возвратной математической индукции по логической длине формулы **A** правила.

База индукции. Логическая длина **A** равна нулю, т. е. **A** является сравнением, внутренние формулы которого атомарны. Из этого следует, что **A** не могла быть боковой формулой ни у одного из применений правил, кроме правила перестановки. Значит, аксиомы вывода секвенции $\rightarrow\mathbf{\Gamma A A}$ содержат по два вхождения **A**. Поскольку эти секвенции-аксиомы не перестанут быть аксиомами от удаления одного из вхождений **A**, мы удалим такое вхождение и, воспользовавшись теми же правилами, выведем секвенцию $\rightarrow\mathbf{\Gamma A}$.

Индукционный переход. Пусть логическая длина **A** больше нуля. Если **A** является сравнением вида $(B \prec \neg)$ или $(\neg B \prec C)$, и предки обоих вхождений в **A** совпадают с **A**, то рассуждаем так же, как в базе индукции. Иначе, возьмем такую логическую связку или квантор в **A**, что к секвенции $\rightarrow\mathbf{\Gamma A A}$ можно применить правило, обратное к правилу для этой связки. Пользуясь предыдущей теоремой, применим это обратное правило к обоим вхождениям **A** и получим секвенции, в которых есть повторения, но повторяющиеся формулы удовлетворяют индукционному предположению. Сократив в них повторения и применив прямое правило для выделенной нами связки, получаем требуемую секвенцию $\rightarrow\mathbf{\Gamma A}$. *Теорема доказана.*

12. Выводимость секвенции $\rightarrow\mathbf{A}\neg\mathbf{A}$

Лемма 2. *Секвенция* $\rightarrow\mathbf{A}\neg\mathbf{A}$ *выводима.*

Доказательство проведем методом математической индукции по внешней логической длине **A**.

База индукции по внешней логической длине. Внешняя логическая длина **A** равна нулю, т. е. **A** представляет собой сравнение.

Случай A. Сравнение имеет вид $(B \prec C)$, где $\prec$ обозначает либо «$\leqslant$», либо «$<$» (знак «$\preceq$» будем использовать как обратный «$\prec$»: если $(A \prec B)$ обозначает $(A \leqslant B)$, то $(B \preceq A)$ обозначает $(B < A)$; если $(A \prec B)$ обозначает $(A < B)$, то $(A \preceq B)$ обозначает $(A \leqslant B)$). Доказательство проведем методом возвратной математической индукции по внутренней логической длине $(B \prec C)$ без отрицаний, т. е. по суммарному количеству внутренних бинарных логических связок и кванторов B и C.

База индукции по внутренней логической длине без отрицаний. Пусть внутренняя логическая длина сравнения **A** равна нулю, т. е. B и C — внутренние атомарные формулы. Тогда наша секвенция $\rightarrow (B \prec C)\neg(B \prec C)$

выводима из аксиомы $\to(B \prec C)\ (C \preceq B)$ за один шаг вывода по правилу $(\neg \prec)$.

Индукционный переход по внутренней логической длине без отрицаний. Пусть внутренняя логическая длина сравнения $(B \prec C)$ равна $l > 0$ и любая секвенция $\to(E \prec F)\neg(E \prec F)$, у которой внутренняя логическая длина без отрицаний меньше, чем l, выводима.

Не менее чем одна из формул B, C не атомарна. Для определенности будем считать, что не атомарна C. Рассмотрим все возможные случаи для самого внешнего логического знака (бинарной логической связки или квантора) C.

Случай 1. C — это $C_1\&C_2$. Рассмотрим фигуру

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\to (B \prec C_1)(C_1 \preceq B)(C_2 \preceq B)\\ \to (B \prec C_2)(C_1 \preceq B)(C_2 \preceq B)\end{array}}{\to (B \prec C_1\&C_2)(C_1 \preceq B)(C_2 \preceq B)}(\prec \&)}{\to (B \prec C_1\&C_2)(C_1\&C_2 \preceq B)}(\& \prec)}{\to (B \prec C_1\&C_2)\neg(C_1\&C_2 \prec B)}\neg(\prec)$$

Пользуясь теоремой 4 об обратимости правил $SPLL$ и $STLL$, получаем, что секвенции $\to\ (B \prec C_1)(C_1 \preceq B)$ и $\to\ (B \prec C_2)(C_2 \preceq B)$ выводимы из $\to\ (B \prec C_1)\neg(B \prec C_1)$ и $\to\ (B \prec C_2)\neg(B \prec C_2)$ соответственно за один шаг по правилу $\neg(\prec)^-$. Ключевые сравнения последних двух секвенций имеют внутреннюю логическую длину без отрицаний не менее чем на единицу, меньшую чем $(B \prec C)$, значит, эти две секвенции выводимы по индукционному предположению. Из допустимости уточнения 3 и правила перестановки следует выводимость секвенций $\to\ (B \prec C_1)(C_1 \preceq B)(C_2 \preceq B)$ и $\to (B \prec C_2)(C_1 \preceq B)(C_2 \preceq B)$, а значит, корректность фигуры, приведенной выше.

Случай 2. C — это $C_1 \vee C_2$. Рассматривается аналогично случаю 1.

Случай 3. C — это $\forall x C_1$. Тогда рассмотрим фигуру

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\to (B \prec C_1)([C_1]^x_y \preceq B)}{\to (B \prec [C_1]^x_y)(\forall x C_1 \preceq B)}(\forall \prec)}{\to (B \prec \forall x C_1)(\forall x C_1 \preceq B)}(\prec \forall)}{\to (B \prec \forall x C_1)\neg(B \prec \forall x C_1)}\neg(\prec),$$

переменная y не входит свободно в B.

Внутренняя логическая длина $(B \prec C_1)$ без учета отрицаний на единицу меньше, чем $(B \prec \forall x C_1)$, поэтому секвенция $\to\ (B \prec C_1)\neg(B \preceq C_1)$ выводима по индукционному предположению. Тогда снова воспользуемся обратимостью правила $\neg(\prec)$ и получим, что секвенция $\to\ (B \prec C_1)(C_1 \preceq B)$ выводима, значит, приведенная выше фигура корректна, а секвенция $\to\ (B \prec \forall x C_1)\neg(B \preceq \forall x C_1)$ выводима.

Случай 4. C — это $\exists C_1$. Рассматривается аналогично случаю 3.

Случай 5. C — это условное выражение $if(C_1 \leqslant C_2)thenC_3elseC_4fi$. Этот случай рассматривается аналогично предыдущим, но в силу громоздкости записи ограничимся идеей доказательства. Четыре секвенции $\to(C_1 \leqslant C_2)(C_4 \prec B)(C_1 \leqslant C_2)(B \preceq C_4)$, $\to(C_1 \leqslant C_2)(C_4 \prec B)(C_1 < C_2)(B \preceq C_3)$, $\to(C_1 < C_2)(C_3 \prec B)(C_1 \leqslant C_2)(B \preceq C_4)$, $\to(C_1 < C_2)(C_3 \prec B)(C_1 < C_2)(B \preceq C_3)$, как и ранее, выводятся с использованием индукционного предположения. Путем применения правил $(\prec if)$ и $(if \preceq)$ выводится секвенция $\to(B \prec if(C_1 \leqslant C_2)thenC_3elseC_4fi)(if(C_1 \leqslant C_2)thenC_3\ elseC_4fi \preceq B)$. К ней применим $\neg(\prec)$, и получим требуемую секвенцию $\to (B \prec if(C_1 \leqslant C_2)thenC_3elseC_4fi)\neg(B \prec if(C_1 < C_2)thenC_3elseC_4fi)$.

Индукционный переход по внутренней логической длине для случая А доказан.

Случай Б. Сравнение имеет вид $(B = C)$. Выводимость исходной секвенции $\to (B = C)\neg(B = C)$ следует из выводимости двух секвенций: $\to(B \leqslant C)(B < C)(C < B)$ и $\to(C \leqslant B)(B < C)(C < B)$. Они выводимы, поскольку допустимо правило утончения и секвенции $\to(B \leqslant C)(C < B)$ и $\to(C \leqslant B)(B < C)$ выводимы. Случай А доказывает выводимость $\to(C \leqslant B)\neg(C \leqslant B)$ и $\to(B \leqslant C)\neg(B \leqslant C)$, а допустимость правила $\neg(\leqslant)^-$ позволяет вывести требуемые $\to(B \leqslant C)(C < B)$ и $\to (C \leqslant B)(B < C)$.

Случай В. Сравнение имеет вид $(B \in C_1, C_2, \ldots, C_n)$. Выводимость исходной секвенции $\to(B \in C_1, C_2, \ldots, C_n)\neg(B \in C_1, C_2, \ldots, C_n)$ следует из выводимости секвенций

$$\to (B = C_1)(B = C_2)\ldots(B = C_n)\neg(B = C_1),$$

$$\to (B = C_1)(B = C_2)\ldots(B = C_n)\neg(B = C_2),$$

$$\ldots$$

$$\to (B = C_1)(B = C_2)\ldots(B = C_n)\neg(B = C_n).$$

Эти секвенции выводимы, что следует из случая Б и допустимости уточнения. Требуемая секвенция получается из них путем применения правила введения принадлежности и отрицания принадлежности.

Индукционный переход по внешней логической длине. Нам потребуется рассмотреть четыре случая для самой внешней логической связки **A**.

Случай 1. A — это **B∨C**. Выводимость исходной секвенции $\to$**B∨C¬(B∨C)** следует из выводимости двух секвенций $\to$**BC¬B** и $\to$**BC¬C**. Обе эти секвенции выводимы по индукционному предположению и справедливости утончения.

Случай 2. A — это **B&C**. Рассматривается аналогично случаю 1.

Случай 3. **A** — это $\forall x$**B**. По индукционному предположению выводима секвенция $\to$**B** (**y**)$\neg$**B** (**y**), где y — новая переменная, поставленная на место x в **A**. Тогда, по допустимости правила уточнения, выводима и секвенция.

$\to$**B** (**y**)$\neg$**B** (**y**)$\exists x\neg$**B**. Вывод исходной секвенции выглядит следующим образом:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\to \mathbf{B}(\mathbf{y})\neg\mathbf{B}(\mathbf{y})\exists x\neg\mathbf{B}}{\to \mathbf{B}(\mathbf{y})\exists x\neg\mathbf{B}}(\exists)}{\to \forall x\mathbf{B}\exists x\neg\mathbf{B}}(\forall).}{\to \mathbf{B}\neg\forall x\mathbf{B}}\neg(\forall)$$

Случай 4. **A** — это $\exists x$**B**. Рассматриваются аналогично случаю 3. *Лемма доказана.*

13. Транзитивность неравенств в исчислениях $SPLL$ и $STLL$

Перейдем к доказательству транзитивности знаков $\leqslant$, $<$. Правила транзитивности близки к правилу *сечения*. Доказательство проведем по схеме, использованной С. К. Клини (6).

Введем четыре правила транзитивности:

$$\frac{\begin{array}{c}\to \Gamma(A \leqslant B)\\ \to \Delta(B \leqslant C)\end{array}}{\to \Gamma\Delta(A \leqslant C)}(\text{тр} \leq\leq),$$

$$\frac{\begin{array}{c}\to \Gamma(A \leqslant B)\\ \to \Delta(B < C)\end{array}}{\to \Gamma\Delta(A < C)}(\text{тр} \leq<),$$

$$\frac{\begin{array}{c}\to \Gamma(A < B)\\ \to \Delta(B \leqslant C)\end{array}}{\to \Gamma\Delta(A < C)}(\text{тр} <\leq),$$

$$\frac{\begin{array}{c}\to \Gamma(A < B)\\ \to \Delta(B < C)\end{array}}{\to \Gamma\Delta(A < C)}(\text{тр} <<).$$

Теорема 6. *Правила транзитивности допустимы в $SPLL$ и $STLL$.*

Доказательство. Требуется доказать, что по поводу D с правилами транзитивности некоторой секвенции можно построить вывод D' этой же секвенции без правил транзитивности.

Доказательство проведем индукцией по числу применений правил транзитивности в D. Покажем возможность устранения последнего применения правила транзитивности; проделав такое устранение m раз, получим искомый вывод D' — вывод конечной секвенции, не содержащий применений правил транзитивности.

Теорема 2 о чистом выводе позволяет с самого начала считать, что D является выводом с чистыми переменными.

Сведем теорему к одной главной лемме.

Лемма 3. *Пусть имеется доказательство D с чистыми переменными, последним применением правил которого является применение одного из правил транзитивности. Тогда существует вывод D' конечной секвенции этого доказательства, не содержащий применений ни одного из правил транзитивности. При этом все свободные, связанные или собственные переменные применений правил $(\to \forall)$, $(\exists \to)$ и $(\forall)$ в D' входят таким же образом и в D.*

Доказательство. Степенью транзитивности назовем количество пропозициональных связок и кванторов в формулу B из применений правила транзитивности. *Левым рангом* транзитивности назовем количество секвенций, содержащих B в сравнениях, являющихся предками $(A \leqslant B)$, и расположенных в конце ветви, оканчивающейся левой посылкой. *Правым рангом* транзитивности назовем количество секвенций, содержащих B в сравнениях, являющихся предками $(B \leqslant C)$, и расположенных в конце ветви, оканчивающейся правой посылкой. Сумма левого и правого рангов транзитивности называется *рангом* транзитивности.

Доказательство леммы проводится методом возвратной математической индукции по степени транзитивности. Как в базе индукции, так и в индукционном переходе используется возвратная математическая индукция по рангу транзитивности.

Рассмотрим все возможные случаи; сопоставляя полученные результаты, можно будет доказать базисы и индукционные шаги этих индукций.

Случай 1а. В правилах (тр $\leqslant\leqslant$), (тр $\leqslant<$) и (тр $<<$) A совпадает с B. Заключение такого правила можно получить, если применить несколько раз правило уточнения к правой посылке, которое допустимо по теореме 3.

Левая посылка правила (тр $<<$) содержит сравнение $(B < B)$. Тогда, используя следствие из теоремы, выводим секвенцию $(\to\Gamma)$. Применив к ней несколько раз правило утончения, получим заключение.

Случай 1б. B совпадает с C. Он рассматривается аналогично. Здесь сначала нужно рассмотреть правила (тр $\leqslant\leqslant$), (тр $<\leqslant$) и (тр $<<$), а затем правило (тр $\leqslant<$).

Случай 2. Исключим из рассмотрения ситуацию, когда левая посылка получена применением ($\neg$ $\prec$) или (и) правая — применением правила ($\prec$ $\neg$). Для левой посылки, A есть $\neg H$, фигуру

$$\cfrac{\cfrac{\to \Gamma(\neg B \prec H)}{\to \Gamma(\neg H \prec B)}(\neg \prec) \qquad \to \Delta(B \prec C)}{\to \Gamma\Delta(\neg H \prec C)}(\text{тр})$$

заменим на

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\to \Delta(\neg B \prec C)}{\to \Delta(\neg C \prec \neg B)}(\neg \prec \neg) \qquad \to \Gamma(\neg B \prec H)}{\to \Delta\Gamma(\neg C \prec H)}(\text{тр})}{\to \Gamma\Delta(\neg H \prec C)}$$

(здесь и далее двойная черта обозначает несколько применений правила перестановки членов секвенции). Если левая посылка получена непрерывной серией правил ($\neg \prec$) и ($\prec \neg$), то такое преобразование придется повторить несколько раз.

Аналогично рассматривается ситуация для правой посылки.

Для каждого из следующих случаев к числу определяющих его условий причисляется также условие, что не имеет места ни случай 1а, ни случай 1б.

Случай Б1. Ранг равен 2. Обе посылки являются заключениями неструктурных правил, или аксиомами, или одна из посылок является аксиомой, а другая — заключением неструктурного правила.

Случай Б1.1. Обе посылки — аксиомы. Считаем очевидным, что и заключение любого из транзитивностей является аксиомой. Действительно, если боковая внешняя формула левой посылки есть $(A < B)$, то выводима $\to\Gamma$, если боковая внешняя формула правой посылки есть $(B < C)$, то выводима $\to\Delta$, поэтому и заключение выводимо. Если же оба упомянутые сравнения были нестрогими и ни $\to\Gamma$, ни $\to\Delta$ не выводимы, то транзитивность объединит две замкнутые цепочки аксиом-посылок в один цикл аксиомы-заключения.

Случай Б1.2. Одна из посылок — аксиома, другая — нет. Поскольку ранг равен двум, B должна быть главной формулой в посылке, не являющейся аксиомой. Поскольку случай 2 исключен, логическая длина B больше 1. Поэтому боковая формула посылки-аксиомы не является главной формулой аксиомы, а заключение будет аксиомой с той же замкнутой цепочкой.

Случай Б1.3. Обе посылки — не аксиомы. В силу того, что ранг равен только двум, главной формулой обеих посылок является B, кроме этого, поскольку B — внутренняя формула, посылки получены применением чисто внутреннего правила. Следовательно, B содержит логический символ и степень транзитивности $\leqslant 1$. Такая ситуация соответствует индукционному шагу по степени, и мы можем пользоваться индукционным предположением по степени. Что касается правил, используемых при получении посылок, то они обязательно должны быть правилом введения самого внешнего символа формулы B. Итак, для Б1.3 имеем следующие шесть случаев.

Случай 3. Левая посылка получена применением правила $(\prec \vee)$, правая — применением правила $(\vee \prec)$ и B есть $G \vee H$. Тогда нашу фигуру

$$\dfrac{\dfrac{\to \Gamma(A \prec G)(A \prec H)}{\to \Gamma(A \prec G \vee H)}(\prec \vee) \qquad \dfrac{\to \Delta(G \prec C) \to \Delta(H \prec C)}{\to \Delta(G \vee H \prec C)}(\vee \prec)}{\to \Gamma\Delta(A \prec C)}(\text{тр})$$

мы изменяем следующим образом:

$$\dfrac{\dfrac{\to \Gamma(A \prec G)(A \prec H) \to \Delta(H \prec C)}{\to \Gamma\Delta(A \prec G)(A \prec C)}(\text{тр}) \qquad \to \Delta(G \prec C)}{\to \Gamma\Delta(A \prec C)\Delta(A \prec C)}.$$

Верхняя транзитивность имеет меньшую степень, чем первоначальная, так что, в силу гипотезы индукции по степени, она может быть устранена. После этого аналогичным образом устраняем нижнюю транзитивность. Допустимость сокращения повторений позволяет закончить индукционный переход для этого случая.

Случай 4. Левая посылка получена применением правила $(\prec \&)$, правая — применением правила $(\& \prec)$ и B есть $G \& H$. Рассматривается аналогично случаю 3.

Случай 5. Левая посылка получена применением правила $(\prec \neg)$, правая — применением правила $(\neg \prec)$, B есть $\neg G$. Тогда вместе с нашей фигурой

$$\dfrac{\dfrac{\to \Gamma(G \prec \neg A)}{\to \Gamma(A \prec \neg G)}(\prec \neg) \qquad \dfrac{\to \Delta(\neg C \prec G)}{\to \Delta(\neg G \prec C)}(\neg \prec)}{\to \Gamma\Delta(A \prec C)}(\text{тр})$$

рассмотрим

$$\dfrac{\to \Gamma(G \prec \neg A) \to \Delta(\neg C \prec G)}{\to \Gamma\Delta(\neg C \prec \neg A)}(\text{тр}).$$

Пользуясь предположением индукции по степени транзитивности, мы сможем устранить транзитивность в последней фигуре. Поскольку выше полученного заключения транзитивностей нет, воспользуемся теоремой 4 о допустимости правила, обратного к $(\neg \prec \neg)$, и получим требуемый вывод секвенции $\to\Gamma\Delta\,(\neg A \prec \neg B)$ без транзитивностей.

Случай 6. Обе посылки получены применением правила $(\neg \prec \neg)$, B есть $\neg G$, A есть $\neg H$ и C есть $\neg F$. Заменим

$$\cfrac{\cfrac{\to \Gamma(G \prec \neg H)}{\to \Gamma(\neg H \prec \neg G)}(\neg \prec \neg) \quad \cfrac{\to \Delta(F \prec G)}{\to \Delta(\neg G \prec \neg F)}(\neg \prec \neg)}{\to \Gamma\Delta(\neg H \prec \neg F)}(\text{тр})$$

на

$$\cfrac{\cfrac{\to \Gamma(F \prec G) \to \Delta(G \prec H)}{\to \Gamma\Delta(F \prec H)}(\text{тр})}{\to \Gamma\Delta(\neg H \prec \neg F)}(\neg \prec \neg).$$

Теперь транзитивность имеет меньшую степень и может быть устранена в силу гипотезы индукции (по степени).

Случай 7. Левая посылка получена применением правила $(\prec \neg)$, B есть $\neg G$, правая посылка получена применением правила $(\neg \prec \neg)$, C есть $\neg F$. Заменим

$$\cfrac{\cfrac{\to \Gamma(G \prec \neg A)}{\to \Gamma(A \prec \neg G)}(\prec \neg) \quad \cfrac{\to \Delta(F \prec G)}{\to \Delta(\neg G \prec \neg F)}(\neg \prec \neg)}{\to \Gamma\Delta(A \prec \neg F)}(\text{тр})$$

на

$$\cfrac{\cfrac{\to \Gamma(F \prec G) \to \Delta(G \prec \neg A)}{\to \Gamma\Delta(F \prec \neg A)}(\text{тр})}{\to \Gamma\Delta(A \prec \neg F)}(\prec \neg).$$

Случай 8. Левая посылка получена применением правила $(\neg \prec \neg)$, правая посылка получена применением правила $(\neg \prec)$. Рассматривается симметрично случаю 7.

Случай Б2. Ранг >2. Этот случай может встретиться только в индукционном шаге индукции по рангу (как в базе, так и в индукционном шаге индукции по степени). Поэтому при их рассмотрении можно пользоваться индукционным предположением по рангу.

Случай Б2.1. Левый ранг $\geqslant 2$. Тогда B входит в правую часть хотя бы одной из посылок правила, дающего левую посылку транзитивности.

Случай 9. Левая посылка транзитивности получена применением правила перестановки:

$$\cfrac{\cfrac{\to \Gamma(A \prec B)\mathbf{D}}{\to \Gamma\mathbf{D}(A \prec B)}(\leftrightarrow) \quad \to \Delta(B \prec C)}{\to \Gamma\Delta(A \prec C)}(\text{тр}).$$

Рассмотрим в выводе левой посылки последнее применение неструктурного правила. Если такого применения не существует, то левая посылка представляет собой аксиому, поскольку перестановка членов не может изменить свойство секвенции быть аксиомой.

Пусть такое применение L существует:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cdots}{\Gamma_1(A \prec B)\Gamma_2\mathbf{V}}L \quad (\leftrightarrow)}{\cfrac{\cdots}{\to \Gamma_3\mathbf{V}\Gamma_4(A \prec B)}(\leftrightarrow)} \qquad \to \Delta(B \prec C)}{\to \Gamma_3\mathbf{V}\Gamma_4\Delta(A \prec C)}(\text{тр}).$$

Если $\mathbf{V}$ есть $(A \prec B)$, то Γ_4 пуста. В этом случае все перестановки ниже L не затрагивают $(A \prec B)$ и их можно проделать после применения транзитивности. Ранг такой транзитивности будет меньше, чем исходный, т. е. этот случай сведен к индукционному предположению.

Пусть $\mathbf{V}$ отлично от $(A{\prec}B)$. Перестановки, в которых не участвует $(A{\prec}B)$, можно провести после применения транзитивности. Такая транзитивность устранима по индукционному предположению. Перестановки, в которых не участвует $\mathbf{V}$, можно провести до применения L. Таким образом, достаточно рассмотреть фигуру

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cdots}{\Gamma_1(A \prec B)\mathbf{V}}L}{\Gamma_1\mathbf{V}(A \prec B)}(\leftrightarrow) \qquad \to \Delta(B \prec C)}{\to \Gamma\mathbf{V}\Delta(A \prec C)}(\text{тр}).$$

Формула $(A \prec B)$ в посылке (посылках) правила L стоит перед боковой формулой (боковыми формулами для правил $(\forall \prec)$, $(\prec \exists)$, $(\exists)$). Проделаем перестановку, поставив $(A \prec B)$ на последнее место в посылке (посылках), применим транзитивность, затем переставим в конец заключения боковую формулу применения L (боковые формулы для правил $(\forall \prec)$, $(\prec \exists)$, $(\exists)$) и применим правило L. Правило L будет применимо и в случаях $(\prec \forall)$, $(\exists \prec)$, $(\forall)$: если Δ или C содержат собственную переменную такого правила, то можно заменить эту собственную переменную на новую во всем выводе.

В результате получаем секвенцию $\to \Gamma_1(A \prec C)\Delta\mathbf{V}$, которая преобразуется в требуемую перестановкой $(A \prec B)$ и $\mathbf{V}$.

Случай 10. Левая посылка получена применением неструктурного правила:

$$\cfrac{\cfrac{\alpha}{\Gamma_1(A \prec B)}L \qquad \to \Delta(B \prec C)}{\to \Gamma\Delta(A \prec C)}(\text{тр}).$$

Для $SPLL$ и $STLL$ это означает, что $(A \prec B)$ является главной внешней формулой применения L.

10.1. Если главной внутренней формулой является A, то можно поменять местами транзитивность и L.

10.2. Левый ранг определяется как количество секвенций, содержащих B в сравнениях, являющихся предками $(A \geqslant B)$. Поэтому B может быть главной внутренней формулой L только в правиле $(\prec \exists)$.

Тогда правая посылка либо получена применением правила $(\exists \prec)$, B есть $\exists x G$, либо является аксиомой.

10.2.1. Пусть выполняется первое, т. е. на последнем шаге имеем

$$\dfrac{\dfrac{\to \Gamma(A \prec [G]^x_t)(A \prec \exists x G)}{\to \Gamma(A \prec \exists x G)}(\prec \exists) \quad \dfrac{\to \Delta([G]^x_y \prec C)}{\to \Delta(\exists x G \prec C)}(\exists \prec)}{\to \Gamma\Delta(A \prec C)}(\text{тр}).$$

Применяя лемму 1 к секвенции $\to \Delta(G(x) \prec C)$, получим в свое распоряжение секвенцию $\to \Delta(G(t) \prec C)$, где t — терм из формулы $[G]^x_t$ в левой посылке нашей транзитивности.

В следующей измененной фигуре доказательство секвенции $\to \Gamma\Delta(A \prec C)$ будет обладать свойством чистоты переменных и при этом все свободные, связанные или собственные переменные применений правил $(\prec \forall)$, $(\exists \prec)$ и $(\forall)$ будут входить в него таким же образом, как в прежнее:

$$\dfrac{\to \Delta([G]^x_y \prec C)}{\to \Delta(\exists x G \prec C)}(\exists \prec)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\to \Gamma(A \prec G(t))(A \prec \exists x G)}{\to \Gamma(A \prec \exists x G)(A \prec G(t))}(\leftrightarrow) \quad \to \Delta(G(t) \prec C)}{\to \Gamma\Delta(A \prec \exists x G)(A \prec C)}(\text{тр})}{\to \Gamma\Delta(A \prec C)(A \prec \exists x G)}\leftrightarrow}{\to \Gamma\Delta(A \prec C)\Delta(A \prec C)}.$$

Ранг обоих новых транзитивностей не понизился (а у второго из них даже повысился), но этим транзитивностям в левой посылке предшествует правило перестановки, что отвечает случаю 10. Значит, из построенной фигуры транзитивности можно устранить, и в силу допустимости правила сокращений повторений (теор. 3) выводима и секвенция $\to \Gamma\Delta(A \prec C)$.

10.2.2. Если $\to \Delta(G(y) \prec C)$ — аксиома, то аксиомой является и $\to \Delta(G(t) \prec C)$. Дальнейшие рассуждения аналогичны п. 10.2.1.

Случай Б2.2. Правый ранг $\geqslant 2$. Рассматривается симметрично случаю Б2.1. *Лемма, а вместе с ней и теорема, доказаны.*

---

[1] *Косовский Н. К.* Уровневые логики // Записки научных семинаров ЛОМИ. Т. 220. СПб., 1995. С. 72–82.

[2] *Голота Я. Я.* Об адекватности логики мировоззренческим принципам // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке: Тезисы докладов. СПб., 1996. С. 6–10.

[3] *Косовский Н. К.* Уровневые логики.

[4] *Zadeh A.* Fuzzy Logic, Nenral Network and Soft Computing // Communications of the ACM 37. 1994. № 3. P. 77–89.

[5] *Косовский Н. К.* Уровневые логики.

[6] *Клини С. К.* Введение в метаматематику. М., 1957.