ФИЛОСОФСКИЕ ОСНОВАНИЯ ЛОГИЧЕСКОГО ЗНАНИЯ

О. А. Антонова, С. В. Соловьев

АКСИОМАТИКА И ОЧЕВИДНОСТЬ*

Понятие «аксиома» вошло в математический и, более широко, в культурный обиход благодаря «Началам» Евклида, книге, которая на протяжении многих веков была, возможно, не менее читаемой, чем Библия. Смысл этого понятия, однако, не оставался неизменным. Мы начнем эту статью поэтому с небольшого исторического экскурса.

В истории аксиоматического метода принято выделять три стадии. Первая связана с развитием математики, прежде всего геометрии, в Древней Греции и эллинистическом мире. «Начала» здесь — ярчайший образец систематического применения этого метода и в силу своего влияния, однако Евклид отнюдь не был его первооткрывателем. Открытие аксиоматического метода часто приписывается Пифагору, понятие аксиомы подвергается логическому анализу в трудах Аристотеля. Начало второй стадии совпадает приблизительно с открытием неевклидовых геометрий, начало третьей — с так называемым «кризисом оснований» в конце XIX — начале XX в. Эта стадия знаменуется бурным развитием формальной логики.

Заслуживает внимания вопрос, в какой степени в древности аксиомы рассматривались как самоочевидные положения, не требующие доказательства, — взгляд, господствовавший в дальнейшем до начала Нового времени.

В действительности недоказуемые предложения в древнегреческой философской практике подразделялись на различные классы. Как отмечается в статье В. М. Ереминой[1], задолго до появления

*Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № МД-8897.2006.6.

[1] *Еремина В. М.* Проблема недоказуемых предложений в античной философии // Вопросы философии. 1984. № 3. С. 120–124.

«Начал» в античной философии существовала определенная классификация недоказуемых предложений. Именно начиная с Аристотеля термин «аксиома» стал рассматриваться как положение, не требующее доказательств[2]. Однако следует отметить, что это не главное значение термина. Изначально ἀξίωμα имела следующие значения: «достоинство», «почет», «уважение», «честь», «авторитет», а также «требование», «желание», «воля», «решение». Аристотель рассматривает аксиомы, определения и гипотезы как три различных типа допущений. Во «Второй Аналитике» он выделяет положения, в которых нуждается научное доказательство: «В самом деле, всякая доказывающая наука имеет дело с тремя [сторонами]: то, что принимается как существующее (а именно род, свойства которого, присущие ему сами по себе, исследует наука); общие всем [положения], называемые нами аксиомами, из которых как из первого ведется доказательство; третье — это [сами] свойства [вещей], значения каждого из которых принимают»[3]. (Πασα γαρ ἀποδειχτιϰὴ ἐπιστήμη περί τρία ἐστίν, ὁσα τε ειναι τίϑεται (ταυτα δὶ ἐστί το γένος ου των ϰαϑὶ αντα παϑημάτων εστι ϑεωρητιϰή), ϰαι τα ϰοινα λεγόμενα ἀξιώματα, ἐξ ών πρώτων ἀποδείχνυσι, ϰαι τρίτον τα πάϑη, ων τί σημαίνει ἐχαστον λαμβάνει.)

В качестве ἀξιώματα (ϰοινά или ϰοιναί ἀρχαί) Аристотель рассматривает прежде всего закон противоречия и закон исключенного третьего. Однако помимо этих законов он относит к аксиомам принципы менее универсальные, но применимые ко «всем количествам», а именно положения, общие для арифметики и геометрии.

Аристотель полагает, что те положения, которые являются «необходимо истинными через само себя», т. е. самоочевидными, не обязательно должны быть явно сформулированы, так как частные науки лишь применяют универсальные аксиомы к своей определенной предметной области. Таким образом, аксиомы являются не предпосылками, но законами бытия, принципами, согласно которым мы мыслим.

Итак, очевидно, Аристотель[4] четко отделяет ἀξιώματα от ϑέσεις,

---

[2]Силлогистика Аристотеля еще до «Начал» Евклида содержала в себе элементы аксиоматической системы. Другой пример аксиоматического построения теории в античности дает статика Архимеда.

[3]*Аристотель*. Вторая Аналитика //Аристотель. Соч.: В 4 т. Т. 2. М., 1978. С. 274–275.

[4]«То, что необходимо истинно через само себя и необходимо должно казаться таким, не есть ни предположение, ни постулат. Ибо доказательство касается не

положений, которые не являются предпосылками всего знания, но которые выступают принципами, применимыми в одной частной науке. К этому же виду научных положений Аристотель относит ὑποθέσεις, положения, которые утверждают существование некоторой вещи, и ὁρισμοί — определения этой вещи. На низшем уровне у Аристотеля стоят аксиомы, относящиеся к законам логики, такие как закон исключенного третьего. Эти законы предваряют любую систему знания, но ничего не говорят о ее содержании. Далее идут «самодостоверные истины», относящиеся к предметам, отличным от мышления как такового, и характеризующие именно обращение мышления вовне. Дальнейшее движение в сторону предметности обеспечивают общие понятия, благодаря которым существуют различные области знания. Последнюю ступень в системе недоказуемых предложений занимают требования (лат. «постулаты»). В принципе постулаты могут быть доказуемыми, т. е. вторичными, но что-то заставляет исследователя применять их в качестве недоказуемых предложений. Тем самым постулаты характеризуют определенный подход исследователя, при котором они не нуждаются в доказательстве.

Термин «постулат» встречается у Аристотеля, но совсем не в том же значении, в каком он в дальнейшем используется Евклидом и другими математиками. Аристотель применяет его не как положение, присущее науке, но как положение, используемое скорее в риторике, в частности в споре. Несомненно, что Евклид писал свои знаменитые «Начала» под влиянием идей Аристотеля. Многие из них косвенно или прямо легли в основу этого легендарного труда. Евклид, так же как и Аристотель, выделяет два рода знания — знание фактов и знание значения слов. У Евклида ὅροι рассматривается как знание значения слов, а его κοιναι ἔννοιαι соответствует знанию фактов. Равно как и аристотелевскому κοιναί ἀρχαί или ἀξιώματα.

Однако следует отметить, что значение κοιναί различно. Κοιναί ἀρχαί означает «то, что не ограничено одной наукой». Под этим

внешнего выражения, а внутреннего смысла, потому что и силлогизм не [касается внешнего выражения]. В самом деле, всегда можно выдвигать возражения против внешнего выражения, но не всегда — против внутреннего смысла.» (Ουκ έστι δ' υπόθεσις ουδ' αίτημα, ό ανάγκη ειναι δι' αυτο και δοκειν αναγκη. Ου γαρ προς τον έξω λόγον η αποδειξις, αλλα προς τον εν τη ψυχη, επει ουδέ συλλογισμος. Αει γαρ έστιν ενστηναι προς τον έξω λόγον, αλλά προς τον έσω λογον ουκ αεί.) (*Аристотель*. Вторая Аналитика. С. 275).

Аристотель понимает либо общее всем вещам, каковы они есть «по природе» (закон противоречия и исключенного третьего), либо общее предметной области арифметики и геометрии. У Евклида в κοιναι έννοιαι κοιναι имеет значение «общее мышлению всех людей». К κοιναι έννοιαι Евклида нельзя отнести универсальные аксиомы Аристотеля, однако к ним можно отнести аксиомы, общие для арифметики и геометрии, за исключением геометрической аксиомы конгруэнтности. Евклид не рассматривает положений, которые соответствуют гипотезам ύποθέσεις у Аристотеля. Последний же уделяет особое внимание ύποθέσεις — положениям существования. Евклид в отличие от Аристотеля рассматривает такой тип положений, который не соответствует чему-либо у Аристотеля, — αιτημα, или постулат. Как уже отмечалось выше, этот термин встречается у Аристотеля, но в другом смысле.

У самого же Евклида термин αιτήματα представляет собой смешение двух разных типов допущений. Первые три постулата следует рассматривать как требования осуществимости некоторых построений. Но их нельзя отнести к утверждениям, и соответственно классифицировать их с точки зрения Аристотеля практически невозможно. Два последних постулата являются самоочевидными утверждениями, и их необходимо отнести к κοιναι έννοιαι. Наиболее ярким и наиболее хорошо документированным в литературе по истории научной мысли примером постулата является, несомненно, знаменитый 5-й постулат Евклида о параллельных. Характерно, что в «Началах» он относится именно к постулатам. В свете вышесказанного понятно, что Евклид придавал ему значительно более низкий статус, чем аксиомам.

Как отмечается в книге И. Тота[5], во времена расцвета греческой математики существовало ясное понимание возможности альтернативных постулатов. Это подтверждается рядом мест в текстах Аристотеля, развитием в то время сферической тригонометрии (в интересах астрономии), где 5-й постулат, разумеется, не выполняется. В работах И. Тота показано, что сложная по сравнению с другими постулатами и аксиомами формулировка 5-го постулата у Евклида[6]

[5] *Toth I.* Aristoteles in der Entwicklungsgeschichte der geometrischen Axiomatik. M., 1971.

[6] «И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные эти две прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых» (*Евклид.* Начала. Т. 1. М.; Л., 1948. С. 15).

объясняется, по всей вероятности, стремлением четко отграничить исходные положения от других, возможность которых осознавали греки. Следует отметить (мы еще вернемся к этому ниже), что постулат Евклида о параллельных ассоциировался с геометрией на плоскости, в то время как возможные альтернативы — с другими предметными областями — геометрией на сфере, так что в некотором смысле тут не было конфликта, что, однако, не отменяло необходимость данного различения при дедуктивно-аксиоматическом построении теории.

В дальнейшем, после заката древнегреческой цивилизации и вплоть до построения неевклидовых геометрий в XIX в., многие нюансы были надолго забыты, однако особый статус 5-го постулата осознавался математиками. Это проявлялось, в частности, в многочисленных попытках доказательства того, что он является следствием остальных аксиом и постулатов Евклида.

Представляют интерес изменения в подходе к проблеме, проявляющиеся в этих попытках. Прокл (V в. н. э.) в своих комментариях к Евклиду упоминает попытку Птолемея (II в. н. э.), основанную на неявном использовании утверждения, в действительности эквивалентного 5-му постулату[7]. Сам Прокл также пытался доказать 5-й постулат, основываясь неявно на более тонком допущении, что параллельные прямые всегда находятся на ограниченном расстоянии друг от друга (также эквивалентном 5-му постулату).

5-й постулат пытались вывести из утверждения, что из всякой точки внутри угла можно провести линию, пересекающую обе его стороны (Гаухари, IX в.). Неявно использовалось допущение, что если односторонние углы с секущей, пересекающей две прямые, равны, то это верно для всех прямых линий, которые их пересекают. Это неявное допущение вновь «всплыло» в трудах Лежандра, пытавшегося доказать 5-й постулат в начале XIX в., накануне появления неевклидовых геометрий.

Аль-Хайсам (X в.) предложил доказательство, использующее элементы кинематики. Его критиковал Омар Хайям, в свою очередь предложивший несколько интересных геометрических конструкций. В подборе этих конструкций уже чувствуется осознание

[7] Именно это утверждение: «Через любую точку вне данной прямой проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна», — нередко в наши дни называют аксиомой о параллельных, хотя оно не совпадает с 5-м постулатом Евклида.

возможных альтернатив, хотя они нацелены именно на то, чтобы доказать их невозможность.

Ат-Туси (XIII в.) критически проанализировал известные к тому времени доказательства. Он попытался доказать 5-й постулат от противного — вывести из него противоречие. Труды Ат-Туси стали известны в Европе в XVII в. Джон Валлис, вдохновленный ими, прочитал в 1633 г. лекцию в Оксфорде на тему 5-го постулата. Его собственное доказательство основывалось на допущении (впервые в истории доказательств 5-го постулата *явно* сформулированном), что для всякой фигуры существует ей подобная любых размеров.

Дальнейшее развитие подход Ат-Туси получил в трудах Джироламо Саккери, профессора иезуитского колледжа в Милане. Он впервые проанализировал альтернативы: через каждую точку вне прямой а) проходит одна параллельная, б) не проходит ни одной параллельной, в) проходит несколько параллельных. Кроме того, он проанализировал и некоторые другие постулаты, в частности 2-й: «отрезок может продолжаться неограниченно», — который он интерпретировал как возможность получения отрезка сколь угодно большой длины. Используя эту интерпретацию, он показал, что б) дает противоречие. Из в) ему удалось вывести несколько утверждений, которые кажутся идущими вразрез с интуицией, но он не смог получить формального противоречия. Труды Дж. Саккери почти не привлекли внимания, пока не были переизданы Э. Бельтрами уже после открытия неевклидовых геометрий в конце XIX в.

В 1766 г. И. Г. Ламберт опубликовал аналогичное исследование. Он отметил, что следствия предположения б) напоминают результаты сферической геометрии, и предположил, что в) может соответствовать сфере мнимого радиуса (здесь история попыток доказательства 5-го постулата сближается с другой — историей постепенного расширения понятия числа).

А. М. Лежандр, прославившийся работами в других областях математики, всю жизнь пытался доказать 5-й постулат. Последнее его доказательство было опубликовано в 1833 г., уже после выхода в свет работ Н. И. Лобачевского и Я. Бойаи.

Наиболее интересным в истории доказательств 5-го постулата авторам этой статьи представляется мучительный процесс разделения аксиомы (постулата, вообще формального утверждения) и его «естественной» интерпретации, точнее, «естественной» интерпретации входящих в его формулировку понятий. У Аристотеля, при всей тонкости и богатстве его анализа, наименее разработанным остался вопрос о «самоочевидных» свойствах, тесно связанный с «естественной» интерпретацией. Именно эта «естественная» интерпретация служит источником неосознанных допущений, поскольку они кажутся интуитивно очевидными, хотя с формально-логической точки зрения они эквивалентны доказываемому утверждению.

Лишь в конце XVIII в. авторы доказательств осмелились в качестве области интерпретации предлагать такие экстравагантности, как сфера мнимого радиуса.

Огромное значение «естественных» интерпретаций в развитии математики до начала XIX в. подтверждается и другими примерами. Одним из главных типов препятствий на пути расширения понятия числа служат отсутствие «естественных» интерпретаций или их неадекватность. Мнимые и комплексные числа перестают вызывать недоверие только после открытия их интерпретации парами действительных чисел и векторами на плоскости. Даже «естественная» интерпретация нуля как «ничто» (при том, что число интерпретировалось как «количество» или «длина») долгое время служила препятствием для его включения в числовые системы.

Этапы в развитии аксиоматического метода, упоминавшиеся выше, нередко характеризуются как периоды содержательной аксиоматики, модельной и формальной. Для содержательной аксиоматики характерна неразделенность аксиом и их «естественной» интерпретации. Для модельной аксиоматическая система может рассматриваться, если предложена некоторая интерпретация, — скажем, прямыми на сфере называются дуги больших кругов. Для формальной аксиоматики принципиальными являются формальные свойства аксиоматической системы как таковой, например непротиворечивость. Их изучение предполагает высокий уровень развития формальной логики (непротиворечивость означает невозможность вывести противоречие по правилам формальной логики). Интерпретации могут рассматриваться, но глобально, например существует ли вообще модель, в которой интерпретируется данная система аксиом, или каким образом охарактеризовать все возможные модели, причем в качестве моделей для интерпретации могут выступать другие формальные системы.

В XX в. процесс разделения формальных утверждений и их интерпретаций продолжился. Возникли и стали развиваться многочисленные логические системы, построенные на принципах, отличающихся от классической аристотелевской логики. Известны логические системы, которые активно изучались до появления какой бы то ни было интерпретации. В некоторых случаях попытки построения моделей (предметных областей) для этих логик столкнулись с большими трудностями (например, в случае интуиционистских логик высших порядков, логик, использующих зависимые типы), что нисколько не помешало изучать их формальные свойства (невыводимость противоречия и т. п.).

Может показаться, что в процессе разделения аксиом и их интерпретации вопрос об очевидности аксиом постепенно теряет смысл. В самом деле, он представляется вполне осмысленным при наличии «естественной» интерпретации. «Модельная» интерпретация вносит элемент произвола, вследствие которого вопрос об очевидности переносится на модель и на описание интерпретации. Изучение формальных свойств формальных аксиоматик оставляет место понятию очевидности скорее в рассмотрении правил вывода и построении формальных выводов. Если здесь и остается место очевидности, то, пожалуй, в «минималистском» смысле непосредственного усмотрения на этапе построения доказательства в духе феноменологии Э. Гуссерля. Интересно отметить связь между феноменологическим усмотрением и требованием Д. Гильберта[8] о «финитном» построении формальной системы, допускающем непосредственное усмотрение при применении аксиом и правил вывода.

К 70-м годам XX в. баталии по поводу оснований математики в значительной степени затихли. Однако в связи со все более активным использованием компьютеров не присутствуем ли мы при начале очередного этапа в развитии аксиоматического метода и проверке доказательств? Отдельные этапы доказательств, например проверка выполнимости условия, могут осуществляться компьютерными программами, причем детальный контроль со стороны исследователя оказывается нереальным, хотя бы в силу многочисленности частных случаев[9].

С точки зрения взаимоотношений аксиоматического метода и очевидности распространение компьютеров и компьютерных сетей вносит новый и достаточно неожиданный поворот. «Формальный»

---

[8] *Гильберт Д., Бернайс П.* 1) Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. М., 1979; 2) Основания математики. Теория доказательств. М., 1982.

[9] См.: *Wilson R.* Four Colors Suffice: How the Map Problem Was Solved. Princeton. N.Y., 2004; *Hales T.* A Proof of the Kepler Conjecture // Annals of Mathematics. 2005. N 162. P. 1065–1085.

этап в развитии аксиоматического метода характеризовался полной свободой в выборе интерпретации аксиом и даже необязательностью какой бы то ни было интерпретации. Широкое или, точнее, необходимое использование компьютеров, в буквальном смысле «невозможность обойтись без них», приводит к тому, что интерпретация начинает в ряде случаев навязываться пользователю. Иногда это сравнительно легко осознать, как, например, при использовании компьютерной графики для геометрических построений. Даже наивный пользователь может понять, что прямые, состоящие из «пикселей» на экране, не совсем прямые, круги не совсем круги, не говоря о более сложных геометрических фигурах.

Более тонкие следствия интерпретации, навязанной представлением данных в компьютере, однако, легко ускользают от внимания. Например, действительные числа, продолжая называться действительными числами, представляются теперь выражениями ограниченной длины (мы не говорим здесь о дополнительных моментах, связанных с их физическим представлением). Это приводит к ошибкам округления при арифметических операциях, что вызывает нарушение большинства предельных теорем математического анализа и теории вероятностей при компьютерных вычислениях. Если не принимать специальных мер при написании программ, требующих всестороннего анализа представления и операций над данными в компьютере, не может быть гарантирована даже приблизительная верность результата.

Заметим, что пользователь редко имеет полное представление об этих интерпретациях. Частично они являются элементом коллективного творчества разработчиков компьютеров, но в них присутствуют и элементы случайности, и даже элементы, связанные с физической природой компьютеров. Все чаще встречается, особенно в приложениях математики к астрономии, физике, химии, биологии, сочетание компьютерного моделирования, которое вполне может создавать *иллюзию* очевидности, с более традиционными методами рассуждений. Граница размыта.

Наиболее радикальные варианты навязанных интерпретаций на сегодняшний день, пожалуй, можно найти в так называемой виртуальной реальности.

И вопрос об очевидности с гносеологической точки зрения ставится здесь наиболее остро.