*Н. И. Стешенко*

# ДИЗЪЮНКТИВНЫЕ И КОНЪЮНКТИВНЫЕ ФОРМЫ ЛОГИКИ РОГОВСКОГО

Мне неизвестны работы, в которых изучались бы нормальные формы логики направленности и изменения Л. С. Роговского. Цель данной статьи — исследовать нормальные формы этой логики, которые имеют важное значение: для изучения ее функциональной полноты, формализации ее методом аналитических таблиц, секвенционального построения. В статье КНФ (конъюнктивно нормальные формы) и ДНФ (дизъюнктивно нормальные формы) используются как один из критериев проверки тождественной истинности и тождественной ложности формул логики Роговского.

Эта логика представлена Роговским в пропозициональном языке, она аксиоматизирована и имеет все нужные метатеоремы[1].

В польской традиции логика Роговского рассматривается как диалектическая[2]. Речь идет о том, что в логике направленности Роговского формализованы главным образом отдельные фрагменты гегелевского учения о бытии, изложенного в «Науке логики», и, по-видимому, поэтому логику Роговского, собственно, и называют диалектической логикой. Эта логика изучалась прежде всего польскими логиками. На основании логики Роговского Слупецкий, Брыль и Працнал построили трехзначную логику изменения, которая оказалась функционально эквивалентной трехзначной логике Лукасевича[3]. И. Вайщик выразил основные понятия логики Роговского в терминах темпоральной логики[4]. Однако мне неизвестны работы, в которых исследовались бы отношения между четырехзначной логикой Роговского и другими известными четырехзначными логиками.

В отечественной литературе логика Роговского не осталась без внимания. Например, В. Г. Кузнецов использовал ее как средство

---

[1] *Rogowski L. S.* Logika kierunkowa a heglowska teza o sprzeczności zmiany. Torun, 1969.

[2] Logika dialektyczna // Mala encyclopedia logiki. Wroclaw; Warshawa; Krakow, 1970. St. 130-132.

[3] *Slupecki J., Bryll G., Prucnal T.* Kilka uwag o logice trojwartosciowej Lukasiewicza. Studia Logica. 1968. N 21. St. 45–70.

[4] *Wajszczyk J.* O reconstruwalnosci nieklasycznych rachuncow zdaniowych w logicie temporalnej. Olsztyn, 2001.

интерпретации логико-философских понятий «существование» и «действительность»[5].

Исходными синтаксическими понятиями логики изменения и направленности Роговского являются импликация и оператор возникновения «В», который читается — «возникает так, что...». Через исходные понятия определениями вводятся другие логические связки и операторы. Дадим, следуя Роговскому, некоторые важные определения логики направленности[6].

(Д1). $\sim p =_{Df} BBp$ — «не есть так, что р»;

(Д2). $Иp =_{Df} B \sim p$ — «исчезает так, что р»;

(Д3). $p \wedge g =_{Df} \sim (p \rightarrow \sim g)$;

(Д4). $Tp =_{Df} p \wedge И(p \wedge Bp) \wedge B(p \wedge Иp)$ — сильное утверждение: «истинно, что р»;

(Д5). $p \vee g =_{Df} \sim (\sim p \wedge \sim g) = \sim p \rightarrow g$;

(Д6). $Уp =_{Df} T(p \vee Bp)$ — «уже есть так, что р»;

(Д7). $Ep =_{Df} T(p \vee Иp)$ — «еще есть так, что р».

Выделенным значением является «3» — истина. Остальные истинностные значения обозначаются так: «2» — подыстина; «1» — подложь; «0» — ложь. В табл. 1 даны значения истинности исходных понятий («В» и «→») и понятий, вводимых определениями (Д1), (Д2), (Д4), (Д6) и (Д7). Таблицы истинности для четырехзначных конъюнкции и дизъюнкции опускаются, их легко построить на основании определений (Д3) и (Д5).

*Таблица 1*

| p | ~ p | Tp | Bp | Иp | Уp | Ep | p → g | 3 2 1 0 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 0 | 3 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 | 2 | 3 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 0 | 0 | 3 | 0 | 3 | 1 | 3 | 2 | 2 | 2 |
| 0 | 3 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 3 | 3 | 3 | 3 |

Можно видеть, что на подмножестве истинных значений {3, 0 ножества истинностных значений {3, 2, 1, 0} определение логич ских связок «~», « → », « ∨» и «∧» посредством таблиц истинност совпадает с определением связок классической двухзначной лог ки. Ввиду этого подмножество истинных значений {3, 0} будем на

[5] *Кузнецов В. Г.* Интерпретация понятия «существования» в логике // М одология развития научного знания. М., 1982. С. 134–147.

[6] *Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А.* Задачи и упражнения по дискретной м ематике. М., 2004.

зывать классическим, подмножество истинных значений $\{2,1\}$ множества $\{3,2,1,0\}$ назовем неклассическим или промежуточным.

**Определение 1.** Функция $f(_1,\ldots,_n)$ $n$-аргументов называетс *функцией четырехзначной логики*, если ее аргументы определен на множестве $E_4 = \{3,2,1,0\}$ и сама функция принимает значени из того же множества.

Функции логики Роговского полностью определяются ее таблицами истинности. Если функция $f$ и формула $\Phi$ имеют одну и ту же таблицу истинности, то будем говорить, что формула $\Phi$ представляет (реализует) функцию $f$. Произвольные формулы $\Phi_1$ и $\Phi_2$ называются *эквивалентными*, если совпадают их таблицы истинности, т. е. совпадают представляемые этими формулами функции $f_{\Phi 1} = f_{\Phi 2}$.

Для описания нормальных форм введем нужные понятия. Функции четырехзначной логики Роговского $x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n = \min(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n = \max(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ соответственно назовем конъюнкцией и дизъюнкцией. Используем оператор Россера — Тюркетта и, кроме того, введем еще два оператора (функции).

$$J_i(x) = \begin{cases} 3, & \text{если } x = i \\ 0, & \text{если } x \neq I \end{cases} \qquad \text{ф}^{1i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = i \\ 0, & \text{если } x \neq i \end{cases}$$

$$\text{ф}^{2i}(x) = \begin{cases} 2, & \text{если } x = i \\ 0, & \text{если } x \neq i \end{cases},$$

где $i \in E_4 = \{0, 1, 2, 3\}$.

Оператор Россера — Тюркетта широко используется при изучении различных свойств конечнозначных логик. Нам он понадобится для представления произвольных функций логики Роговского СДНФ (СКНФ).

Одноаргументные функции $\text{ф}^{1i}(x)$ и $\text{ф}^{2i}(x)$ в множестве конечнозначных логик относятся к классу функций, выпускающих хотя бы одно значение истинности[7]. Функция $\text{ф}^{1i}(x)$ выпускает истинностные значения «3» и «2», а функция $\text{ф}^{2i}(x)$ — истинностные значения «3» и «1». Их назначение при изучении нормальных форм

[7] *Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А.* Задачи и упражнения по дискретной математике. С. 91, 97.

логики Роговского объясняется ниже. Однако надо сначала показать, что эти функции существуют в множестве функций логики Роговского. Для этого надо выразить функции $\text{ф}^{1i}(x)$ и $\text{ф}^{2i}(x)$ в терминах понятий логики изменения и направленности Роговского. В табл. 2 и 3 явно задается соответственно существование функций $\text{ф}^{1i}(x)$ и $\text{ф}^{2i}(x)$.

*Таблица 2*

| $x$ | $\text{ф}^{13}(x)=\text{Вx}\wedge\text{Т}x$ | $\text{ф}^{12}(x)- \sim x\wedge\text{ТВ}(x$ | $\text{ф}^{11}(x)=x\wedge\text{ТИ}(x)$ | $\text{ф}^{10}(x)=\text{И}(x)\wedge\text{Т}(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

*Таблица 3*

| $x$ | $\text{ф}^{23}(x)-\text{И}(x)\wedge\text{Т}(x$ | $\text{ф}^{22}(x)=x\wedge\text{ТВ}(x$ | $\text{ф}^{21}(x)=\sim x\wedge\text{ТИ}(x)$ | $\text{ф}^{20}(x)=\text{В}(x)\wedge\text{Т}\sim(x$ |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 2 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |

Отметим, что имеются следующие равнозначности операторов: $\text{Т}(x) = J_3(x)$; $\text{ТВ}(x) = J_2(x)$; $\text{ТИ}(x) = J_1(x)$; $\text{Т}(x) = J_0(x)$, что непосредственно проверяется при помощи значений оператора Россера — Тюркетта и табл. 1. Это значит, что в таблицах, определяющих операторы $\text{ф}^{1i}(x)$ и $\text{ф}^{2i}(x)$, можем заменить операторы логики Роговского $\text{Т}(x)$, $\text{ТВ}(x)$, $\text{ТИ}(x)$, $\text{Т} \sim (x)$ соответствующими операторами Россера и Тюркетта.

**Определение 2.** *Литерой* (буквой) называется любая из формул вида $x$, $\sim x$, $\text{В}x$, $\text{И}x$, $\text{Т}x$, $\text{Т} \sim x$, ТВх, $\text{ТИ}x$, где $x$ — *элементарная* формула.

Отметим, что в классической логике литерой называется атом или отрицание атома. В логике Роговского понятие литеры усложняется. Соответственно усложняются и остальные известные понятия — элементарной конъюнкции, элементарной дизъюнкции и т. д.

**Определение 3.** *Элементарной конъюнкцией* (ЭК), или конъюнктом, назовем конъюнкцию литер. *Элементарной дизъюнкцией* (ЭД), или дизъюнктом, назовем дизъюнкцию литер.

**Определение 4.** ДНФ — это дизъюнкция конъюнктов, КНФ — это конъюнкция дизъюнктов.

**Определение 5.** ЭК, ЭД называются полными, если в них представлены все элементарные формулы исходной формулы без повторений.

**Определение 6.** СДНФ — это дизъюнкция полных ЭК; СКНФ — это конъюнкция полных ЭД.

Все три оператора $J_i(x)$, $\text{ф}^{2i}(x)$ и $\text{ф}^{1i}(x)$ нам нужны для представления элементарными конъюнкциями (полными) либо элементарными дизъюнкциями (полными) различных частей совершенных форм формул логики Роговского. Для СДНФ — тех наборов истинностных значений, на которых формула получает соответственно истинностное значение «3», «2» и «1». Для СКНФ — тех наборов истинностных значений, на которых формула получает соответственно истинностное значение «0», «1» и «2».

Аналогом единичного набора (относительно двухзначной логики) является набор (3, 3,…,3). Элементарная конъюнкция вида $J_{\delta 1}(x_1) \wedge J_{\delta 2}(x_2) \wedge \cdots \wedge J_{\delta n}(x_n)$ равна истинностному значению «3» на наборе ($\delta_1$, $\delta_2$, …, $\delta_n$), таком, что $\delta_1 = x_i$, $1 \leq \mathrm{i} \leq n$. Если элементарная конъюнкция СДНФ представляет строчку (истинностный набор), в которой формула принимает истинностное значение «2», то эта конъюнкция содержит члены $\text{ф}^{2i}(x_\kappa)$: $J_{\delta 1}(x_1) \wedge J_{\delta 2}(x_2) \wedge \cdots \wedge \text{ф}^{2i}(x_\kappa) \wedge \cdots \wedge J_{\delta n}(x_n)$, $0 \leq \mathrm{i} \leq 3$. Если в формуле имеется истинностный набор, на котором формула принимает значение «1», то в элементарной конъюнкции имеются члены вида $\text{ф}^{1i}(x_\text{к})$. Аналогично для элементарных дизъюнкций СКНФ.

Сформулируем несколько утверждений о функциях логики Роговского.

**Утверждение 1.** Любая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ логики Роговского разложима по переменным.

Не теряя общности, разложим функцию по первой переменной:

$$(*) f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (J_3(x_1) \wedge f(3, x_2, \ldots, x_n)) \vee (J_2(x_1) \wedge$$
$$\wedge f(2, x_2, \ldots, x_n)) \vee (J_1(x_1) \wedge f(1, x_2, \ldots, x_n)) \vee (J_0(x_1) \wedge$$
$$\wedge f(0, x_2, \ldots, x_n)) = \vee (J_{\delta 1}(x_1) \wedge f(\delta_1, x_2, \ldots, x_n)),$$

$$\delta_1 \in \Gamma_4.$$

Для доказательства равенства значений левой и правой частей дизъюнктивного разложения функции по указанной переменной разобьем множество всевозможных истинностных значений переменных функции, число которых равно $4^n$, на четыре множества: $м_1$, $м_2$, $м_3$ и $м_4$. К множеству $м_1$ отнесем все такие наборы истинностных значений $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, в которых $\alpha_1 = 3$; к множеству $м_2$ отнесем все такие наборы истинностных значений $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, в которых $\alpha_1 = 2$; множество $м_3$ содержит все такие наборы истинностных значений $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, в которых $\alpha_1 = 1$; множеству $м_4$ принадлежат все те наборы истинностных значений $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, в которых $\alpha_1 = 0$.

Пусть $\alpha \in м_1$. Подставим его в левую и правую часть разложения (*).

$$f(3, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (J_3(3) \wedge f(3, \alpha_2, \dots, \alpha_n)) \vee (J_2(3) \wedge$$
$$\wedge f(2, \alpha_2, \dots, \alpha_n)) \vee (J_1(3) \wedge f(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)) \vee (J_0(3) \wedge f(0, \alpha_2, \dots, \alpha_n)) =$$
$$= f(3, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (3 \wedge f(3, \alpha_2, \dots, \alpha_n)) \vee (0 \wedge f(2, \alpha_2, \dots, \alpha_n)) \vee$$
$$\vee (0 \wedge f(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)) \vee = (0 \wedge f(0, \alpha_2, \dots, \alpha_n)) = (3 \wedge f(3, \alpha_2, \dots, \alpha_n)) \vee$$
$$\vee 0 \vee 0 \vee 0 = f(3, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Были применены свойства оператора Россера и Тюркетта, а также известные законы идемпотентности и констант.

Пусть $\alpha \in м_2$. Подставим его в левую и правую часть разложения (*).

$$f(2, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (0 \wedge f(3, \alpha_2, \dots, \alpha_n)) \vee (3 \wedge f(2, \alpha_2, \dots, \alpha_n)) \vee$$
$$\vee (0 \wedge f(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)) \vee (0 \wedge f(0, \alpha_2, \dots, \alpha_n)) = 0 \vee (3 \wedge f(2, \alpha_2, \dots, \alpha_n)) \vee$$
$$\vee 0 \vee 0 = f(2, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Сходным образом рассматриваются случаи $\alpha \in м_3$ и $\alpha \in м_4$. В итоге имеем равенство дизъюнктивного разложения (*) по переменной $x_1$:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \vee (J_{\delta 1}(x_1) \wedge f((\delta_1, x_2, \dots, x_n)),$$
$$\delta_i \in E_4.$$

Применяя далее лемму о разложении по переменной $x_2$, получим:

$$(**) f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \vee (J_{\delta 1}(x_1) \wedge [\vee (J_{\delta 2}(x_2) \wedge f(\delta_1, \delta_2, x_3, \dots, x_n))]),$$
$$\delta_1 \in E_4, \quad \delta_2 \in E_4.$$

Применив дистрибутивный закон в правой части (**) для конъюнкции относительно дизъюнкции, имеем:

$$(**) f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \vee \quad \vee\, (J_{\delta 1}(x_1) \wedge J_{\delta 2}(x_2) \wedge f(\delta_1, \delta_2, x_3, \ldots, x_n)),$$

$$\delta_1 \in E_4, \quad \delta_2 \in E_4.$$

Продолжив это разложение по переменным $x_3, \ldots, x_n$, получим дизъюнктивное разложение вида:

$$(***) f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \vee$$

$$\vee \cdots \vee\, (J_{\delta 1}(x_1) \wedge J_{\delta 2}(x_2) \wedge \cdots \wedge J_{\delta n}(x_n) \wedge f(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n))$$

$$\delta_1 \in E_4 \quad \delta_2 \in E_4 \quad \delta_n \in E_4 =$$

$$=_{df} \vee (J_{\delta 1}(x_1) \wedge J_{\delta 2}(x_2) \wedge \cdots \wedge J_{\delta n}(x_n) \wedge f(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n))$$

$$\delta_i \in E_4$$

Полученное в правой части (***) представление формулы $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется ее *полным дизъюнктивным разложением.* Если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не равна константе «0» (т. е. формула, представляющая данную функцию, не является тождественно-ложной), то, опустив в полном дизъюнктивном разложении дизъюнктивные члены, в которых $f(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) = 0$, получим СДНФ. Тем самым было доказано утверждение.

**Утверждение 2.** Любая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, не равная константе 0, представима четырехзначным аналогом СДНФ

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \vee[(J_{\delta 1}(x_1) \wedge \cdots \wedge J_{\delta n}(x_n)) \wedge f(\delta_1, \ldots, \delta_n)],$$

$$\delta_i \in E_4.$$

Докажем, что представление функции (или формулы, реализующей эту функцию) единственно. В СДНФ фиксированной функции логики Роговского ровно столько конъюнкций (полных), сколько в таблице этой функции имеется в сумме истинностных значений «3», «2» и «1». Каждому истинностному набору $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ (а они все различные) аргументов функции соответствует своя полная конъюнкция, т. е. существует взаимно-однозначное соответствие между данной функцией и ее СДНФ. Разным СДНФ соответствуют разные функции. Таким образом, представления функции в виде СДНФ единственно с точностью до порядка конъюнктивных членов в СДНФ и литер в полных конъюнкциях ввиду коммутативности дизъюнкции и конъюнкции, т. е. перестановка (ввиду коммутативности) дизъюнкций и литер в конъюнкциях, не различаются.

**Пример.** Рассмотрим пример построения СДНФ формулы по ее истинностной таблице. Сразу опустим те дизъюнктивные члены, в которых формула принимает значение «0».

| B(p → g) | 3 | 2 | 1 | 0 |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 3 | 0 | 2 |
| 2 | 1 | 3 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 3 | 3 | 3 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

$$\mathrm{B}(\mathrm{p} \to \mathrm{g}) = \{(J_3p \wedge J_2g) \vee (J_2p \wedge J_2g) \vee (J_1p \wedge J_2g) \vee (J_1p \wedge J_1g) \vee \vee (J_1p \wedge J_0g)\} \vee \{\phi^{23}(p) \wedge \phi^{20}(g)\} \vee \{(\phi^{13}(p) \wedge \phi^{13}(g)) \vee (\phi^{12}(p) \wedge \phi^{13}(q)) \vee \vee (\phi^{11}(p) \wedge \phi^{13}(g)) \vee (\phi^{10}(p) \wedge \phi^{13}(g)) \vee (\phi^{10}(p) \wedge \phi^{12}(g)) \vee (\phi^{10}(p) \wedge \wedge \phi^{11}(q)) \vee (\phi^{10}(p) \wedge \phi^{10}(q))\}.$$

В первых фигурных скобках элементарными конъюнкциями представлены те истинностные наборы, в которых формула B (p → g) получает значение «3»; во вторых фигурных скобках — значение «2»; наконец, в третьих фигурных скобках элементарными конъюнкциями представлены те истинностные наборы, в которых формула B (p → g) получает значение «1».

Перепишем функции $\phi^{20}$, $\phi^{23}$ и $\phi^{1i}$, $0 \leq i \leq 3$ в соответствии с табл. 2 и 3, чтобы выразить их собственно в понятиях логики Роговского.

$$\mathrm{B}(\mathrm{p} \to \mathrm{g}) = \{(J_3p \wedge J_2g) \vee (J_2p \wedge J_2g) \vee (J_1p \wedge J_2g) \vee (J_1p \wedge J_1g) \vee \vee (J_1p \wedge J_0g)\} \vee \{(Tp \wedge Иp) \wedge (T \sim g \wedge Bg)\} \vee \{[(Tp \wedge Bp) \wedge (Tg \wedge Bg)] \vee \vee [(TBp \wedge \sim p) \wedge (Tg \wedge Bg)] \vee [(TИp \wedge p) \wedge (Tg \wedge Bg)] \vee [(T \sim p \wedge Иp) \wedge \wedge (Tg \wedge Bg)] \vee [(T \sim p \wedge Иp) \wedge (TBg \wedge \sim g)] \vee [(T \sim p \wedge Иp) \wedge (TИg \wedge g)] \vee \vee [(T \sim p \wedge Иp) \wedge (T \sim g \wedge Иg)]\}.$$

Заменим операторы Россера — Тюркетта операторами собственно логики изменения и направленности, используя равнозначности.

$$\mathrm{B}(\mathrm{p} \to \mathrm{g}) = \{(Tp \wedge TBg) \vee (TBp \wedge TBg) \vee (TИp \wedge TBg) \vee (TИp \wedge TИg) \vee$$
$$\vee (TИp \wedge T \sim g)\} \vee \{(Tp \wedge Иp) \wedge (T \sim g \wedge Bg)\} \vee \{[(Tp \wedge Bp) \wedge (Tg \wedge Bg)] \vee$$
$$\vee [(TBp \wedge \sim p) \wedge (Tg \wedge Bg)] \vee [(TИp \wedge p) \wedge (Tg \wedge Bg)] \vee [(T \sim p \wedge Иp) \wedge$$
$$\wedge (Tg \wedge Bg)] \vee [(T \sim p \wedge Иp) \wedge (TBg \wedge \sim g)] \vee [(T \sim p \wedge Иp) \wedge (TИg \wedge g)] \vee$$
$$\vee [(T \sim p \wedge Иp) \wedge (T \sim g \wedge Иg)]\}.$$

**Утверждение 3.** Любая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, не равная константе 3, представима четырехзначным аналогом СКНФ

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \wedge[(J_{\delta 1}(x_1) \vee \cdots \vee J_{\delta n}(x_n)) \vee f(\delta_1, \ldots, \delta_n)],$$

$$\delta_i \in E_4.$$

Для доказательства утверждения используем стандартные определения двойственной функции и принципа двойственности.

Функция $f^+(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *двойственной* по отношению к функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если $f^+(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sim f(\sim x_1, \sim x_2, \ldots, \sim x_n)$, где «$\sim$» — знак отрицания. Из закона двойного отрицания следует равенство $(f^+(x_1, x_2, \ldots, x_n))^+ = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

*Принцип двойственности*, если

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(h_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, h_\kappa(x_1, x_2, \ldots, x_n)),$$

то

$$f^+(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g^+(h_1^+(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, h_\kappa^+(x_1, x_2, \ldots, x_n)),$$

т. е. функция, двойственная суперпозиции функций, есть соответствующая суперпозиция двойственных функций.

Доказательство утверждения 3 представлено на основании указанных определений следующими равенствами:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f^+(x_1, x_2, \ldots, x_n))^+ = (\text{СДНФ}(f^+))^+ =$$
$$= \text{СКНФ}(f),$$

т. е. мы строим вначале СДНФ функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а затем используем принцип двойственности.

Докажем единственность СКНФ от противного, т. е. предположим, что существует такая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, у которой имеется, по крайней мере, две СКНФ: СКНФ $(f)_1$ и СКНФ $(f)_2$. Тогда имеем

$$f^+ = \begin{cases} (\text{СКНФ}(f)_1)^+ = \text{СДНФ}(f^+)_1 \\ (\text{СКНФ}(f)_2)^+ = \text{СДНФ}(f^+)_2 \end{cases},$$

что противоречит единственности СДНФ для $f^+$.

Для приведения произвольной формулы $\Phi$ логики изменения и направленности Роговского к ДНФ и КНФ нужны правила эквивалентных преобразований. Напомним, что когда речь идет об эквивалентных преобразованиях, то имеется в виду преобразование формул, реализующих одну и ту же функцию.

Используем две эквивалентности: слабую $(\Phi_1 \leftrightarrow \Phi_2 =_{df} (\Phi_1 \rightarrow \Phi_2) \wedge (\Phi_2 \rightarrow \Phi_1))$ и сильную $(\Phi_1 \Leftrightarrow \Phi_2 =_{df} (\mathrm{T}\Phi_1 \rightarrow \mathrm{T}\Phi_2) \wedge (\mathrm{T}\Phi_2 \rightarrow \mathrm{T}\Phi_1))$. В слабой эквивалентности $\Phi_1 \leftrightarrow \Phi_2$ таблицы истинности для $\Phi_1$ и $\Phi_2$ совпадают не только на классических значениях истинности $\{0,3\}$, но и на средних значениях истинности $\{1,2\}$. В сильной эквивалентности $\Phi_1 \Leftrightarrow \Phi_2$ средние значения истинности в $\Phi_1$ и $\Phi_2$ заменяются истинностным значением «0» — ложь, в силу свойств оператора «Т» (см. табл. 1). Укажем нужные эквивалентности.

Для любых формул $p$, $g$, $r$ логики Роговского верны (согласно таблицам истинности) следующие эквивалентности.

| | |
|---|---|
| 1.1. $(p \wedge g) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (g \wedge r)$; | 1.2. $(p \vee g) \vee r \leftrightarrow p \vee (g \vee r)$; |
| 2.1. $(p \wedge g) \leftrightarrow (g \wedge p)$; | 2.2. $(p \vee g) \leftrightarrow (g \vee p)$; |
| 3.1. $(p \wedge p) \leftrightarrow p$; | 3.2. $(p \vee p) \leftrightarrow p$; |
| 4.1. $p \wedge (g \vee r) \leftrightarrow (p \wedge g) \vee (p \wedge r)$; | 4.2. $p \vee (g \wedge r) \leftrightarrow (p \vee g) \wedge (p \vee r)$; |
| 5.1. $p \wedge (p \vee g) \leftrightarrow p$; | 5.2. $p \vee (p \wedge g) \leftrightarrow p$; |
| 6.1. $p \wedge \Phi_0 \Leftrightarrow \Phi_0$; | 6.2. $p \vee \Phi_0 \leftrightarrow p$; |
| 7.1. $p \wedge \Phi_1 \leftrightarrow p$; | 7.2. $p \vee \Phi_1 \Leftrightarrow \Phi_1$. |

*Примечание*: $\Phi_0$ есть или а) $x \wedge \sim x \wedge Bx \wedge Иx$ (либо конъюнкция тех же литер, в которой, по меньшей мере, одна из них усилена оператором «Т»), или б) $x \wedge T \sim x$; $(Tx \wedge \sim x)$, или в) $Bx \wedge TИx$; $(TBx \wedge Иx)$. Обратим внимание, что случаи б) и в) есть фрагменты случая а). Во всех трех случаях конъюнкты являются тождественно ложными формулами. $\Phi_1$ есть $x \vee \sim x \vee Bx \vee Иx$ (либо дизъюнкция тех же литер, в которой, по меньшей мере, одна из них усилена оператором «Т»). $\Phi_1$ есть тождественно истинная формула. Нам нужны разные варианты $\Phi_0$ и $\Phi_1$ для получения полных элементарных конъюнкций и дизъюнкций при построении совершенных форм, для формулировки критерия тождественной истинности (ложности) формулы по ее КНФ и ДНФ и некоторых других целей.

8.1. $\sim\sim p \leftrightarrow p$; 8.2. $\sim (p \wedge g) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim g)$; 8.3. $\sim (p \vee g) \leftrightarrow$ $\leftrightarrow (\sim p \wedge \sim g)$;

8.4. $\sim (p \to g) \leftrightarrow (p \wedge \sim g)$; 8.5. $\sim Вp \leftrightarrow В \sim p \leftrightarrow Иp$;

8.6. $\sim Иp \leftrightarrow И \sim p \leftrightarrow Вp$; 8.7. $\sim Тp \Leftrightarrow \sim p \vee ТВp \vee ТИp$; 8.8. $\sim ТВp = Иp \vee Т \sim p \vee Тp$;

8.9. $\sim ТИp = Вp \vee Тp \vee Т \sim p$; 8.10. $\sim Уp \Leftrightarrow У \sim p$;

8.11. $\sim Еp \Leftrightarrow Е \sim p$;

9. $(p \to g) \leftrightarrow (\sim p \vee g)$;

10.1. $Т(p \wedge g) \leftrightarrow (Тp \wedge Тg)$; 10.2. $Т(p \vee g) \leftrightarrow (Тp \vee Тg)$;

10.3. $Тp \wedge p \Leftrightarrow Тp$; 10.4. $Тp \vee p \leftrightarrow p$;

10.5. $ТТp \Leftrightarrow Тp$; 10.6. $ТЕp \Leftrightarrow Еp$; 10.7. $ТУp \Leftrightarrow Уp$;

10.8. $ТВ(p \wedge g) \Leftrightarrow (ТВp \wedge Тg) \vee (ТВp \wedge ТВg) \vee (Тp \wedge ТВg)$;

10.9. $ТВ(p \vee g) \Leftrightarrow (ТВp \wedge ТВg) \vee (ТВp \wedge ТИg) \vee (ТВp \vee Т \sim$ $\sim g) \vee (ТВg \wedge ТИp) \vee (ТВg \wedge Т \sim p)$;

10.10. $ТИ(p \wedge g) \Leftrightarrow ТВ(\sim p \vee \sim g)$;

10.11. $ТИ(p \vee g) \Leftrightarrow ТВ(\sim p \wedge \sim g)$;

11.1. $В(p \wedge g) \leftrightarrow (Тp \wedge Вg) \vee (ТВp \wedge Тg) \vee (\sim p \wedge ТИp \wedge Тg) \vee$ $\vee (Вp \wedge Вg) \vee (Вp \wedge Т \sim p)$;

11.2. $В(p \vee g) \leftrightarrow (Вp \wedge Вg) \vee (Т \sim p \wedge Вg) \vee (ТВp \wedge ТИg) \vee (ТВp \wedge Т \sim$ $\sim g) \vee (ТИp \wedge Т \sim g) \vee (Вp \wedge Тp \wedge Тg)$;

11.3. $ВТp \leftrightarrow (p \vee \sim p) \wedge (Вp \vee Иp) \wedge (\sim p \vee Вp)$;

11.4. $ВВp \leftrightarrow \sim p$; 11.5. $ВИp \leftrightarrow p$;

12.1. $И(p \wedge g) \leftrightarrow В(\sim p \vee \sim g)$; 12.2. $И(p \vee g) \leftrightarrow В(\sim p \vee \sim g)$;

12.3. $ИВp \leftrightarrow p$; 12.4. $ИИp \leftrightarrow \sim p$;

12.5. $ИТp \leftrightarrow (\sim p \wedge p) \vee (Иp \wedge Вp) \vee (p \wedge Иp)$;

13.1. $Уp \Leftrightarrow Тp \vee ТВp$; 13.2. $УВp \Leftrightarrow Е \sim p$; 13.3. $УИp \Leftrightarrow Еp$;

13.4. $УТp \Leftrightarrow Тp$; $УЕp \Leftrightarrow Еp$; 13.5. $У(p \wedge g) \Leftrightarrow (Уp \wedge Уg)$;

13.6. $У(p \vee g) \Leftrightarrow (Уp \vee Уg)$;

14.1. $Еp \Leftrightarrow Тp \vee ТИp$; 14.2. $ЕВp \Leftrightarrow Уp$; 14.3 $ЕИp \Leftrightarrow У \sim p$;

14.4. $ЕТp \Leftrightarrow Тp$; 14.5. $Е(p \wedge g) \Leftrightarrow Т(p \wedge g) \vee ТИ(p \wedge g)$;

14.6. $Е(p \vee g) \Leftrightarrow Т(p \vee g) \vee ТИ(p \vee g)$;

Слабые эквивалентности в логике изменения и направленности вводятся определениями. Ни одна из слабых эквивалентностей недоказуема в этой логике.

**Утверждение 4.** Если $\Phi_1 \leftrightarrow \Phi_2$, то $T\Phi_1 \leftrightarrow T\Phi_2$, т.е. если левую и правую часть слабой эквивалентности усилить оператором «Т», то такая формула доказуема.

**Утверждение 5.** Все сильные эквивалентности доказуемы.

Доказательства 4 и 5 утверждений опускаются по понятным причинам: чтобы их привести, надо указать все аксиомы логики Роговского, все правила вывода и собственно предъявить сами доказательства, что требует много страниц.

**Теорема 1.** а) Любая формула логики Роговского эквивалентна некоторой ДНФ;

б) Любая формула логики Роговского эквивалентна некоторой КНФ.

Алгоритм приведения формулы к ДНФ и КНФ извлекается из эквивалентностей (1.1)–(14.6). Опишем его в общих чертах.

(1). Выражаем эквиваленцию через конъюнкцию и импликацию, импликацию — через отрицание и дизъюнкцию.

(2). Используя эквивалентности 8.1–8.9, проносим отрицание в глубь формулы по подформулам настолько, насколько возможно; двойные отрицания снимаем. Определение подформулы стандартное и осуществляется индуктивно.

(3). Используя эквивалентности 10.1–13.6, проносим операторы «Т», «В» и «И», а также их комбинацию в глубь формулы. Если появляется отрицание перед сложной подформулой, возвращаемся к пункту (2) и, если надо, повторяем пункт (3).

(4). Повторяющиеся конъюнктивные или дизъюнктивные члены убираются в силу эквивалентностей (3.1) и (3.2). Проводим сокращения выражений на основании (5.1)–(7.2).

(5). Если все операторы («Т», «В», «И», «ТВ» и «ТИ») и отрицания находятся перед элементарными формулами, используем дистрибутивный закон (4.1).

В результате применения пунктов (1)–(5) получим ДНФ исходной формулы.

Приведение формулы к КНФ проводится аналогично, только в пункте (5) вместо дистрибутивного закона (4.1) используется дистрибутивный закон (4.2).

СДНФ является ДНФ, СКНФ является КНФ. Для получения СДНФ из ДНФ нужно неполные конъюнктивные члены ДНФ преобразовать в полные. Для этого проведем несколько производных эквивалентных преобразований. Ранее нами было указано (см. примечание после эквивалентностей 6.1–7.2), что $\Phi_1$ может принимать различные виды.

$$(\text{a.1}) \sim p \leftrightarrow_{(7.1)} p \wedge \Phi_1 \leftrightarrow p \wedge (Tp \vee T \sim p \vee TBp \vee TИp) \leftrightarrow_{(4.1)} \sim$$
$$\sim ((p \wedge Tp) \vee (p \wedge T \sim p) \vee (p \wedge TBp) \vee (p \wedge TИp)) \leftrightarrow (Tp \vee \phi^{22} p \vee \phi^{11} p).$$

Первый конъюнкт $p \wedge Tp$ заменяется на $Tp$ в силу (10.3); второй конъюнкт $p \wedge T \sim p$ есть противоречие; третий конъюнкт $p \wedge TBp$ и четвертый $p \wedge TИp$ заменяются соответственно на $\phi^{22} p$ и $\phi^{11} p$ на основе табл. 1 и 2. Нижеследующие эквивалентные преобразования обосновываются сходным образом.

$$(\text{a.2}) \sim p \leftrightarrow \sim p \wedge \Phi_1 \leftrightarrow \sim p \wedge (Tp \vee T \sim p \vee TBp \vee TИp) \leftrightarrow ((\sim p \wedge Tp) \vee$$
$$\vee (\sim p \wedge T \sim p) \vee (\sim p \wedge TBp) \vee (\sim p \wedge TИp)) \leftrightarrow (T \sim p \vee \phi^{12} p \vee \phi^{21} p);$$

$$(\text{a.3})\ Bp \leftrightarrow Bp \wedge \Phi_1 \leftrightarrow Bp \wedge (Tp \vee T \sim p \vee TBp \vee TИp) \leftrightarrow ((Bp \wedge Tp) \vee$$
$$\vee (Bp \wedge T \sim p) \vee (Bp \wedge TBp) \vee (Bp \wedge TИp)) \leftrightarrow (\phi^{13} p \vee \phi^{20} p \vee TBp);$$

$$(\text{a.4})\ Иp \leftrightarrow Иp \wedge \Phi_1 \leftrightarrow Иp \wedge (Tp \vee T \sim p \vee TBp \vee TИp) \leftrightarrow ((Иp \wedge Tp) \vee$$
$$\vee (Иp \wedge T \sim p) \vee (Иp \wedge TBp) \vee (Иp \wedge TИp)) \leftrightarrow (\phi^{23} p \vee \phi^{10} p \vee TИp).$$

Ниже $\Phi_1$ будет иметь другой вид: $p \vee \sim p \vee Bp \vee Иp$:

$$(\text{b.1})\ Tp \leftrightarrow Tp \wedge \Phi_1 \leftrightarrow Tp \wedge (p \vee \sim p \vee Bp \vee Иp) \leftrightarrow ((Tp \wedge p) \vee$$
$$\vee (Tp \wedge \sim p) \vee (Tp \wedge Bp) \vee (Tp \wedge Иp)) \leftrightarrow (Tp \vee \phi^{13} p \vee \phi^{23} p);$$

$$(\text{b.2})\ T \sim p \leftrightarrow T \sim p \wedge (p \vee \sim p \vee Bp \vee Иp) \leftrightarrow ((T \sim p \wedge p) \vee$$
$$\vee (T \sim p \wedge \sim p) \vee (T \sim p \wedge Bp) \vee (T \sim p \wedge Иp)) \leftrightarrow (T \sim p \vee \phi^{20} \vee \phi^{10});$$

$$(\text{b.3})\ TBp \leftrightarrow TBp \wedge (p \vee \sim p \vee Bp \vee Иp) \leftrightarrow ((TBp \wedge p) \vee (TBp \wedge \sim p) \vee$$
$$\vee (TBp \wedge Bp) \vee (TBp \wedge Иp)) \leftrightarrow (\phi^{22} p \vee \phi^{12} \vee TBp);$$

$$(\text{b.4})\ TИp \leftrightarrow TИp \wedge (p \vee \sim p \vee Bp \vee Иp) \leftrightarrow ((TИp \wedge p) \vee (TИp \wedge \sim p) \vee$$
$$\vee (TИp \wedge Bp) \vee (TИp \wedge Иp)) \leftrightarrow (\phi^{11} p \vee \phi^{21} \vee TИp).$$

Далее введем равенства, которые легко проверяются посредством табл. 2 и 3.

$$(\text{c}.1)\ \phi^{1i} \cap \phi^{2i} \leftrightarrow \phi^{1i},\ \text{где } 0 \leq i \leq 3;$$

$$(\text{c}.2) \leftrightarrow \phi^{1i} \cap \phi^{2j} \leftrightarrow 0,\ \text{где } 0 - \text{константа и } i \neq j;$$

$$(\text{c}.3)\ \phi^{1i} \cup \phi^{2i} \leftrightarrow \phi^{2i}.$$

Укажем еще ряд эквивалентных преобразований.

$$(\text{d}.1.1)\ Tp \wedge \phi^{1i}g \leftrightarrow \phi^{13}p \wedge \phi^{1i}g;\ (\text{d}.1.2)\ Tp \wedge \phi^{2i}g \leftrightarrow \phi^{23}p \wedge \phi^{2i}g;$$

$$(\text{d}.2.1)\ T \sim p \wedge \phi^{1i}g \leftrightarrow \phi^{10}p \wedge \phi^{1i}g\cdot\ (\text{d}.2.2)\ T \sim p \wedge \phi^{2i}g \leftrightarrow \phi^{20}p \wedge \phi^{2i}g;$$

$$(\text{d}.3.1)\ TBp \wedge \phi^{1i}g \leftrightarrow \phi^{12}p \wedge \phi^{1i}g;\ (d.3.2)\ TBp \wedge \phi^{2i}g \leftrightarrow \phi^{22}p \wedge \phi^{2i}g;$$

$$(\text{d}.4.1)\ TИp \wedge \phi^{1i}g \leftrightarrow \phi^{11}p \wedge \phi^{1i}g;\ (d.4.2)\ TИp \wedge \phi^{2i}g \leftrightarrow \phi^{21}p \wedge \phi^{1i}g.$$

Эквивалентные преобразования (d.1.1–d.4.2) обосновываются единообразно. Дан минимальный по значению истинности конъюнктивный член ($\phi^{1i}$ либо $\phi^{2i}$). Напомним, что $\phi^{1i}$ либо $\phi^{2i}$ принимают средние значения истинности $\{2, 1\}$ из множества значений $\{3, 2, 1, 0\}$. Второй член конъюнкции, дающий среднее значение, однозначно определим по конъюнктивным членам $Tp, T \sim p, TBp$ и $TИp$. Например, $Tp \wedge \phi^{1i}g \leftrightarrow (Tp \wedge \phi^{13}p) \wedge \phi^{1i}g \leftrightarrow \phi^{13}p \wedge \phi^{1i}g$, так как $(Tp \wedge \phi^{13}p) \leftrightarrow \phi^{13}p$ в силу таблиц истинности для $Tp$ и $\phi^{13}p$.

Однако работа с примерами преобразования ДНФ в СДНФ (КНФ в СКНФ) даже формул 2- и 3-пропозициональных переменных показывает, что проще построить СДНФ по таблице истинности, чем путем преобразования. Это значит, что надо найти какие-то, мне пока неизвестные, более эффективные способы преобразования ДНФ в СДНФ (КНФ в СКНФ).

**Определение 7.** ЭК называется *противоречивой*, если она есть $\Phi_0$ или содержит в качестве фрагмента $\Phi_0$, ЭД называется *тождественно истинной*, если она есть $\Phi_1$ или содержит в качестве фрагмента $\Phi_1$.

**Теорема 2.** 1) Формула логики изменения и направленности тождественно истинна, если в эквивалентной ей КНФ все ЭД тождественно истинны;

2) Формула логики изменения и направленности тождественно ложная, если в эквивалентной ей ДНФ все ЭК противоречивы.