Пер Мартин-Лёф

Аналитические и синтетические суждения в теории типов

Аннотация: Лекция Пера Мартин-Лёфа посвящена роли и значению аналитических и синтетических суждений в развитии современной математики и символической логики.

Ключевые слова: Философия Канта, теория типов, пропозиция, аналитическое суждение, синтетическое суждение, тип, доказательство.

Abstract: This lecture of Per Martin-Löf is dedicated to the role and to the meaning of analytic and synthetic judgments in the development of contemporary mathematics and symbolic logic.

Keywords: Kant's philosophy, type theory, proposition, analytic jugement, synthetic judgement, type, proof.

От переводчиков

Профессор Пер Мартин-Лёф — известный специалист в области математической логики, теории доказательств, теории вероятностей и математической статистики, а также член Шведской Королевской академии наук и Европейской академии. В 1964–1965 гг. Пер Мартин-Лёф работал в Московском университете под руководством А. Н. Колмогорова над проблемами теории сложности и случайности. Начиная с 1970-х годов основной интерес Пера Мартин-Лёфа лежит в области математической логики и теории доказательств. Именно в это время он начинает разрабатывать интуиционистскую теорию типов, которая впоследствии оказала сильное влияние на различные области математической логики и информатики. Помимо разработки интуиционисткой теории типов Пер Мартин-Лёф большое внимание уделяет исследованию философских и семантических проблем оснований математики и теории доказательств.

Проявляя живой интерес к идеям и работам Брентано, Больцано и Фреге, Пер Мартин-Лёф в то же время предлагает свое концептуальное осмысление ряда основополагающих логических понятий, среди которых суждение, логическое следование и логический закон. Данная работа посвящена исследованию таких понятий, как «аналитические» и «синтетические» суждения. Отталкиваясь от разделения между аналитическими и синтетическими суждениями, которое было предложено И. Кантом, Пер Мартин-Лёф на основе детального анализа теории типов показывает важность данного разделения и для современного развития логики.

Эта лекция была прочитана на семинаре «Кант и современная эпистемология» (Флоренция, 27–30 мая 1992 г.), организованном Флорентийским центром истории и философии науки. Я очень признателен сотруднику центра Пьерлуиджи Минари за предоставленную мне аудиозапись, которая с небольшими изменениями легла в основу настоящей статьи.

Когда И. Кант вводил всем нам хорошо известное различие между синтетическими и аналитическими суждениями, он прекрасно осознавал, что это различие не является чем-то абсолютно новым. В «Пролегоменах» он прямо и детально ссылается на Локка, упрекая его догматических предшественников Вольфа и Баумгартена за пренебрежение этим различием. Так или иначе мы можем принять как данность тот факт, что он знал лейбницевское различие между истиной разума и истиной факта, хотя и это достаточно странно, он никогда, насколько мне известно, открыто не ссылался на него. Также нам известно о различии, которое делает Юм между отношениями идей и фактическими обстоятельствами, которое, очевидно, даже словесно очень близко к лейбницевскому различию. Собственная терминология Канта была терминологией синтетических суждений в противопоставлении аналитическим.

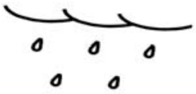
После Канта мы также находим различие, разработанное Больцано, который, например, говорил о концептуальных и интуитивных пропозициях, в немецком — Begriffs- und Anschauungssätze соответственно. При сравнении Больцано с Кантом ситуация становится немного необычной, так как Больцано использовал не только различие между концептуальными и интуитивными пропозициями, но также между аналитическими и синтетическими. Однако он интерпретировал понятия «аналитичности» и «синтетичности» совершенно другим образом. Так, больцановское понятие аналитической пропозиции подразумевает то, что теперь можно было бы назвать логически истинной пропозицией, т. е. пропозицией, которая является истинной при любых возможных интерпретациях, что совершенно отлично от кантовского понятия, в то время как больцановское различие между концептуальными и интуитивными пропозициями очень близко кантовскому — между аналитическими и синтетическими суждениями.

Наконец, я хотел бы вспомнить Милля. Милль, с одной стороны, говорит о существенных (эссенциальных) и случайных (акцидентальных) пропозициях: разница между пропозициями и суждениями здесь не важна, и, с другой стороны, о вербальных и действительных пропозициях. Разница, которую Милль делал между этими двумя парами понятий, была просто терминологической. Таким образом, первая пара терминов Милля проясняет многое, так как, если это различие между аналитическими и синтетическими суждениями настолько важно, тогда странно выглядел бы тот факт, что до Нового времени в логике не существовало ничего соответствующего данному понятию. В самом деле, первая миллевская терминология ясно показывает, как мне кажется, что она соответствует именно различию между существенными и случайными свойствами, которое играло такую важную роль в логике Аристотеля и схоластике. Однако суждение, в котором существенное свойство приписывается чему-либо, называется аналитическим суждением, тогда как суждение, в котором случайное свойство приписывается чему-либо, т. е. суждение в котором говорится, что случайное свойство присуще чему-нибудь, называется синтетическим суждением в терминологии Канта. Итак, терминология Милля, в которой существенные пропозиции противопоставляются случайным, очень удачна: она указывает нам на саму сущность вопроса. Также, между прочим — если мы продвинимся дальше Милля — различие между существенными и случайными свойствами вновь появляется. Это различие было, очевидно, заново открыто Витгенштейном. Его можно найти в Трактате под именем различия между формальными свойствами и собственными, в немецком — formale und eigentliche Eigenschaften. Но, как можно заметить, это старое различие между существенными и несущественными свойствами, которое уже было известно.

Для того чтобы объяснить разницу между аналитическими и синтетическими суждениями, Кант совершает дополнительное действие, а именно вводит два термина — «поясняющее суждение» (Erläuterungsurteil) и «расширяющее суждение» (Erweiterungsurteil) соответственно. Идея состоит в том, что аналитические (или поясняющие) суждения — это те суждения, которые становятся очевидными посредством одного концептуального анализа. Такое (или почти такое) объяснение было дано Кантом, и я, конечно, не смогу улучшить современную широко распространенную формулировку, согласно которой аналитическое суждение — это суждение, которое является очевидным благодаря смыслу терминов, которые встречаются в нем, т. е. каноническое определение, которое мы все, кажется, используем. Такова ситуация в том случае, если рассматриваются аналитические, или объясняющие, суждения. К счастью, наше современное понимание таких суждений существенно совпадает с собственно кантовским пониманием: по-видимому, для нас представляет трудность понимание кантовского понятия синтетического, или расширяющего, суждения.

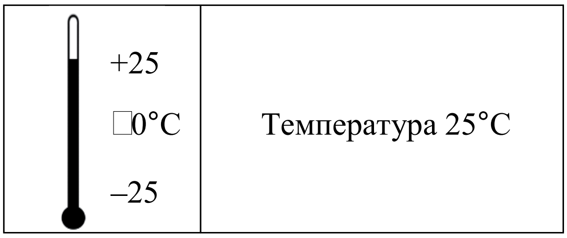
Идея Канта заключается в том, что существуют некоторые суждения, не очевидные только из-за смысла понятий, в них включенных, и нам, наоборот, необходимо продвинуться за границы того, что содержится внутри суждения, для того, чтобы оно стало очевидным для нас самих. Если это эмпирическое суждение, апостериорное в терминологии Канта, тогда то, что вы находите за пределами суждения самого по себе, относится к опыту: вам следует выглянуть, так сказать, за его пределы, между тем как в случае чисто математического суждения тем, что должно быть добавлено к суждению самому по себе — для того, чтобы оно было очевидным, становится конструкция, математическая конструкция. У Канта есть замечательная формулировка, на которую также ссылался профессор Кернер: математическое знание осуществляется через конструирование понятий, по-немецки — mathematische Erkenntnis durch die Konstruktion der Begriffe. Такая формулировка — ключ к пониманию кантовского понятия синтетического априорного суждения. Таким образом, синтетическое суждение — это такое суждение, когда вам необходимо выйти за пределы суждения самого по себе, для того, чтобы убедиться в нем, и в случае чистой математики этот выход за пределы означает, что вам следует создать более или менее хитроумную конструкцию для того, чтобы суждение стало очевидным.

Прежде чем углубиться в теорию типов, я мог бы дать некоторые простые, детские, нематематические примеры различия между аналитическими и синтетическими суждениями. В дальнейшем вы увидите, что существует большое сходство между этими нематематическими примерами и соответствующей трактовкой теории типов. Итак, взгляните на например.

	Идет дождь

Если я говорю «Идет дождь», то я предполагаю, что сейчас идет дождь, которого на самом деле нет. В этом случае никакое количество просто концептуального анализа того, что содержится в этом суждении, не убедит вас в том, что идет дождь. Если вы хотите сами себя убедить в том, что идет дождь, тогда необходимо встать под падающий дождь или обеспечить себя любой другой косвенной очевидностью. Итак, это падающий дождь, или кусочек косвенной очевидности, которые делают суждение «Идет дождь» очевидным. Это означает, что данное суждение — синтетическое.

Вместе с тем, если вы посмотрите на весь этот комплекс как на суждение, состоящее из нелингвистической части (падающий дождь) и собственно лингвистической части (высказывание), тогда это суждение — аналитическое. Вы видите, в суждении содержится все, что вам необходимо, чтобы убедить в нем самих себя. Если кто-то не соглашается с утверждением, что идет дождь в присутствии падающего дождя, тогда просто что-то не так с его концептуальным пониманием. Ему не хватает тех понятий, которые содержатся в суждении или он неправильно понял их, или что-нибудь другое. Необходимо сразу же отметить, что этот способ рассмотрения лингвистическое наравне с нелингвистическим, был бы чужд Канту, и, следовательно, я очевидно сказал то, что идет дальше Канта. Совершенно аналогичный анализ применяется, если вы в качестве примера берете высказывание «Светит солнце» или «Температура +25°C».



Суждение «Температура +25°C» само по себе, конечно, синтетическое. Очевидно, что недостаточно одного лишь анализа понятий, которые содержатся в нем, для того, чтобы убедиться в этом суждении. Но если вербальное выражение берется вместе с показанием термометра, показывающего +25°C, тогда весь этот комплекс, очевидно, снова становится аналитическим. И, конечно, достаточно легко продолжить этот список. Вы можете взять в качестве примера, скажем, этот карандаш. Если я скажу «Этот карандаш длиной 15 см» и при этом вы только видите этот карандаш, тогда, конечно, недостаточно лишь вспомнить смысл используемых терминов — чтобы сделать это суждение очевидным самому себе. Но если у меня есть линейка, и я прижму этот карандаш к линейке таким образом, что вы сможете увидеть результат измерений, тогда результат измерений, взятый вместе с чисто вербальной частью «Этот карандаш длиной 15 см», — весь этот комплекс, несомненно, снова становится аналитическим. Уже с помощью этих простых примеров вы можете понять нечто очень важное: каждое синтетическое суждение основывается на аналитическом, и синтетическое суждение получается, так сказать, исключением некоторой части аналитического суждения, или аналитической связи.

Какое все это имеет отношение к теории типов, которая фигурирует в названии моей лекции? Что ж, современнная теория типов несколько отличается от простой теории типов, и я объясню точно, каким образом. Наилучшим образом это описывается путем прямой демонстрации форм суждений, которые использует теория типов. Прежде всего эта теория использует суждения формы:

$$\mathbf{a} : \boldsymbol{\alpha}.$$

В этом суждении говорится о том, что a является объектом типа α, где Кант сказал бы «категория» вместо «типа», «категория» или «чистый концепт мышления». В дополнение к суждениям этого вида у вас также имеются суждения тождества, т. е. суждения формы:

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} : \boldsymbol{\alpha}.$$

В суждениях данной формы говорится о том, что объекты **a** и **b** — это тождественные объекты типа α, где тождественность понимается как тождественность по определению. Таким образом, эти формы представляют собой две основные формы категорических суждений, используемых в теории типов.

Теперь — каким образом порождаются типы этой системы. Так, структура типов — это обобщение структуры типов простой теории типов. Если вы помните черчевскую формулировку простой теории типов, в ней существуют базовый тип ο для типа пропозиций и другой базовый тип ι — для типа индивидов. Затем Чёрч выстраивает структуру типов над данными типами посредством принятия следующего условия: если α и β — типы, тогда тип функций — от α к β, который Чёрч обозначает как (βα), но в данном случае я предпочитаю обозначение Шютте (α)β (также типа). Таким образом, простая структура типов образуется при помощи трех правил:

$$o : \mathrm{type},$$

$$\iota : \mathrm{type},$$

$$\frac{\alpha : \mathrm{type} \quad \beta : \mathrm{type}}{(\alpha)\beta : \mathrm{type}} .$$

В интуиционистской теории типов эти правила сведены к более общей форме. До сих пор мы использовали тип пропозиций, обозначающийся как *prop* в теории типов. Хотя это то же самое, что и у Чёрча, вследствие так называемого соотношения Карри–Ховарда между пропозициями и множествами, он может быть отождествлен с типом множеств. Так, в интуиционистской теории типов существует управляемый аксиомой базовый тип множеств:

$$\mathrm{set} : \mathrm{type},$$

с типом пропозиций, и отсюда у Чёрча также отождествляются:

$$\mathrm{prop} = \mathrm{set} : \mathrm{type}.$$

Но вместо единственного другого базового типа ι индивидов у нас есть правило

$$\frac{A\colon \mathrm{set}}{\mathrm{elem}(A)\colon \mathrm{type}} ,$$

в котором говорится о том, что элементы каждого множества A образуют новый базовый тип. С логической точки зрения, когда A мыслится в качестве пропозиции, то elem(A) служит также в качестве типа доказательств пропозиции A:

$$\mathrm{proof}(A) = \mathrm{elem}(A)\colon \mathrm{type}.$$

Если вам ближе способ обозначения Чёрча для простых типов, тогда вам следовало бы обозначить elem(A) просто как ι(A). Это показывает, что у нас нет единственного базового типа ι индивидов: скорее всего, для каждого множества A у нас есть тип ι(A) индивидов, принадлежащих этому множеству. Итак, у нас есть базовые типы, полученные с помощью обобщения двух первых правил образования типов, а также обобщение правила для формирования типов функций (x : α)

$$\frac{\alpha : \text{type} \qquad \beta : \text{type}}{(x : \alpha)\ \beta\text{: type}}\ ,$$

в котором говорится, что если α и β — типы, из которых β может зависеть от переменной x, принимающей значения типа α, т. е. от переменной x типа α, тогда зависимый тип функции (x : α)β снова будет типом, именно типом функций, аргумент которых имеет тип α, значение типа β, который может зависеть от x. Это правило обобщает третье правило образования типов Чёрча. Причина этого в том, что в частном случае, когда β не зависит от x, мы получаем тип функции Чёрча как особый случай зависимого типа функции — (α)β, и он может быть определен просто как (x : α)β в случае, когда β не зависит от x:

$$(\alpha)\beta = (x : \alpha)\beta : \text{type}.$$

Таким образом, у нас есть правила образования типов α, которые фигурируют справа в двух основных формах суждений: a : α и a = b : α. Если хотите, вы можете рассматривать вышеизложенное как современную аналогию кантовской метафизической дедукции категорий, или чистых рассудочных понятий. Я имею в виду удачную идею, которую Кант называл ключом к открытию всех чистых понятий мышления, заключающуюся в том, чтобы рассмотреть все формы суждений логики, которые были известны в его время. Путем создания полного списка используемых форм суждений он пришел к категориям. В данном случае α, которая появлятся в **a : α** и **a = b : α**, строго говоря, форма, или, скорее, две парные формы суждения. Нам просто следует сесть, подумать и увидеть те формы суждения, которые мы используем в логике в настоящее время. Оказывается, эти формы могут быть произведены от двух базовых форм, которые говорят нам, что нечто является множеством, или пропозицией, соответственно элементом множества, или доказательством пропозиции, — при помощи правила формирования типов функций. Итак, перед нами исчерпывающий список категорий, который используется в теории типов в настоящее время.

Как видим, кантовская идентификация категории, или чистого рассудочного понятия, с формой суждения остается полностью нетронутой. Теперь, каким бы ни был выбранный нами тип **α**, две формы суждения — **a : α** и **a = b : α** — обе являются аналитическими. Вы видите, если суждение одной из этих двух форм очевидно, то оно является очевидным только благодаря смыслу терминов, которые встречаются в нем. Таким образом, вы можете спросить, откуда же берутся синтетические суждения? Возникают они следующим образом.

Рассмотрим еще раз первую форму суждения — $\mathbf{a} : \boldsymbol{\alpha}$, которая обозначает, что **a** есть объект типа $\boldsymbol{\alpha}$. В данном случае нас не беспокоит, что представляет собой объект **a** типа $\boldsymbol{\alpha}$, мы просто интересуемся существованием объекта типа α. Мы можем ввести новую форму суждения, предположим,

$$\alpha \text{ exists}.$$

Оно может быть прочитано двояким образом: либо понятие α имеет существование, или существует α, или просто α есть, как у Больцано. Следуя Больцано, Брентано сказал, что все эти формы — различные прочтения одной и той же экзистенциальной формы суждения. Смысл экзистенциального суждения, т. е. суждения этой новой экзистенциальной формы, можно понять из правила

$$\frac{a : \alpha}{\alpha \text{ exists}}.$$

Чтобы более точно объяснить с семантической точки зрения форму суждения, вам следует установить, что обозначает суждение такой формы. Тогда объяснение, в данном случае того, что значит знать, что α существует, — это объяснение, что значит знать объект, который подпадает под α. Экзистенциальная форма суждения включает в себя обычную форму суждения:

$$A \text{ true},$$

где A — пропозиция, которую можно рассматривать как частный случай. Чтобы понять это, вспомните, что мы ввели в наши базовые типы для произвольного множества, или пропозиции A тип elem(A), или, с логической точки зрения, proof(A). Так как это базовый тип, мы можем образовать суждение о том, что тип или понятие имеют существование

$$\text{proof}(A) \text{ exists}.$$

Это экзистенциальное суждение говорит о том, что существует доказательство пропозиции A. Отсюда, согласно интуиционистскому объяснению понятия истины, оно говорит в точности о том, что пропозиция A истинна, так как истина определяется с интуиционистской точки зрения как существование доказательства, или конструкции пропозиции. Таким образом, обычная форма суждения — A истинна — на самом деле частный случай экзистенциальной формы суждения.

Как это связано с различием между аналитическими и синтетическими суждениями? Я уже говорил о том, что две основные формы суждения, из которых одна говорит о том, что **a** — объект типа $\boldsymbol{\alpha}$, а другая о том, что **a** и **b** являются тождественными объектами типа **α**, обе аналитические. Синтетическая форма суждения — это экзистенциальная форма суждения, которую я только что ввел.

Таким образом, экзистенциальное суждение — это синтетическое суждение в кантовской терминологии. Чтобы понять, почему это так, нам следует спросить себя: на чем основывается очевидность данного суждения? Просто ли это концептуальный анализ, или нам необходимо выйти за пределы того, что целиком содержится внутри суждения для того, чтобы сделать его очевидным? Его очевидность основывается на конструкции, так как мы подходим к экзистенциальному суждению (скажем, α exists) через конструкцию объекта, который подпадает под понятие **α**, т. е. через конструкцию понятия, по-немецки — durch die Konstruktion des Begriffs, в кантовской терминологии. Таким образом, нам techновистя очевидно, что следует выйти за пределы того, что содержится в суждении самом по себе. Нам надо найти вещь, существующую вещь, для того чтобы сделать экзистенциальное суждение очевидным, и, следовательно, оно должно быть синтетическим. То, что сам Кант считал суждения о существовании синтетическими, ясно выражено в «Критике чистого разума». Если вы посмотрите раздел о невозможности онтологического доказательства существования Бога, то увидите, что в нем совершенно открыто говорится о том, что каждое суждение о существовании является синтетическим, по-немецки — daβ ein jeder Existenzialsatz synthetisch sei. Таким образом, каждое суждение о существовании, согласно Канту, синтетическое, и ясно почему, так как это в точности соответствует его объяснению источника синтетических суждений. Вы можете также увидеть здесь очевидную аналогию с нематематическими примерами, с которых я начал. Можно снова напомнить, что синтетическое суждение получается исключением определенной части лежащего в его основании аналитического суждения. Таким образом, мы снова подтвердили то, что каждое синтетическое суждение основывается на аналитическом суждении, и в этом смысле понятие аналитического суждения, несомненно, более основополагающее и более важное.

Предыдущий анализ понятий аналитичности и синтетичности имеет одно важное следствие, которое, как мне кажется, может нас удивить. Это следствие заключается в том, что логические законы, в их обычной формулировке, все синтетические. Я не хочу сейчас углубляться в различие между *a priori* и *a posteriori*, но, как только мы принимаем как данность кантовскую трактовку этих терминов, становится ясно, что они также *a priori*. Таким образом, логические законы в их обычной формулировке не только синтетические, но синтетические *a priori.* И, по сути, я уже дал объяснение почему: так как логические законы в их обычной формулировке все говорят, что произвольная пропозиция определенной формы истинна, а утвердительная форма суждения «A — истинна» — форма синтетического суждения. Но позвольте мне прояснить это положение посредством частного примера. Возьмем простой пример логического закона, скажем, $A\supset(B\supset A\&B)$. Это стандартный закон пропозициональной логики, а также логики предикатов. На самом деле закон устанавливает, что любая пропозиция этой формы истинна. Так, посредством интуиционистского анализа понятия истины, согласно которому доказательство этой пропозиции существует, вы можете увидеть, что это суждение экзистенциальной формы и, следовательно, синтетическое. Каким образом, используя стандартный путь, вы сможете убедить себя в истинности этой пропозиции? Для этого вам следует создать определенную конструкцию. Если вы выбрали для этого систему натурального вывода, то это можно представить следующим образом:

$$
\begin{array}{ll}
(1) \qquad\qquad\qquad\; (2) & \\
\underline{A \qquad\qquad\qquad\quad B} & \&I \\
\underline{A\&B} & \supset I, \text{удаление } (2) \\
\underline{B\supset A\&B} & \supset I, \text{удаление } (1)\ . \\
A\supset(B\supset A\&B) &
\end{array}
$$

Итак, чтобы убедиться в истинности данной пропозиции, вам следует создать ее конструкцию. Я использовал здесь систему обозначений, которая близка всем нам. В системе обозначений теории типов необходимо найти конструкцию **c**, которая является доказательством пропозиции $A\supset(B\supset A\&B)$, т. е. **c**: proof $(A\supset(B\supset A\&B))$. Решением будет:

$$\supset I(A,\ B\supset A\&B,\ (x)\supset I(B,\ A\&B,\ (y)\ \&I\ (A,\ B,\ x,\ y))) : \text{proof}\ (A\supset(B\supset A\&B)).$$

Однако, как можно убедиться, это не что иное, как другая форма записи вышестоящего натурального вывода, представленная в линейной или функциональной форме, характерной для теории типов. Существенный момент здесь — то, что создание конструкции, независимо от логического закона в его обычной формулировке, не потребует значительной изобретательности, чтобы закон стал очевидным.

Следует добавить, тем не менее, что пропозициональная логика и даже логика предикатов не только состоят из логических законов, в которых утверждается, что некоторая пропозициональная схема истинна, но они несомненно содержат также правила образования термов, которые позволяют доказать, что что-то является индивидом, или, с формальной точки зрения, индивидуальным термом, содержат они и правила образования формул, которые производят для вас пропозиции или формулы. Таким образом, логика предикатов в действительности состоит из правил для выведения суждений трех форм:

$$t : \iota = \text{ind},$$
$$A : o = \text{prop},$$
$$A \text{ true}.$$

Две первые формы представляют собой частный случай первой формы суждения, которую я привел выше — формы **a : α**. Это означает, что обе эти формы являются аналитическими и только третья форма синтетическая. Как сказал профессор Кёрнер, и я полностью согласен с ним, Кант не считал, что все математические суждения синтетические, но наиболее интересные являются синтетическими. Это совершенно верно. Интересные математические суждения — несомненно, экзистенциальные суждения, и сложность математического доказательства заключается в том, чтобы найти или построить объект, который подпадает под понятие, которому экзистенцальное суждение приписывает существование. Именно в этом, как предполагают, нам могут помочь системы компьютерной поддержки доказательства, которые сейчас активно разрабатываются. Они могут оказать некоторую механическую помощь в тяжелой задаче построения объекта, подпадающего под данное понятие или принадлежащего данному типу.

У меня есть еще время? Позвольте мне тогда отметить, что различие между аналитическими и синтетическими суждениями важно для понимания феноменов неполноты и неразрешимости, которые, как мы знаем, существуют в классических логических исчислениях. Ситуация здесь следующая: логика аналитических суждений, т. е. логика для выведения суждений двух аналитических форм, является полной и разрешимой, в то время, как логика синтетических суждений является неполной и неразрешимой, как было показано Гёделем. То, что теорема о неполноте относится к логике синтетических суждений, очевидно. Важное суждение, на котором основывается доказательство теоремы о неполноте — это суждение формы «A — истинно», представляет собой частный случай экзистенциальной формы суждения и, следовательно, синтетическое.

Теперь о том, что я имею ввиду, когда говорю, что логика аналитических суждений является полной и разрешимой. Это значит просто, что если у вас есть суждение одной из двух аналитических форм, т. е. одной из двух форм **a : α** или **a = b : α**, тогда может быть проверено или решено, выводится или нет это суждение посредством формальных правил. Алгоритм, который способен выполнить эту процедуру, информатики называют алгоритмом проверки типов, который является, можно сказать, формальным, или логическим ядром систем компьютерной поддержки доказательства, о которых я уже упоминал. Вот то, что я имел ввиду, говоря, что логика аналитических суждений разрешима. Она также полна в том смысле, что если у вас есть суждение одной из двух аналитических форм, которое содержит определенные константы, выражающие понятия, тогда никакие другие законы, кроме тех, которые содержат эти понятия, нам не нужны. Поскольку вам не нужно идти за пределы законов, относящихся к понятиям, в терминах которых выражается суждение, эти законы на самом деле достаточны для выведения суждения, при условии, что это суждение представляет собой одну из двух аналитических форм.

Откуда же тогда возникают феномены неполноты и неразрешимости? Причиной служит, несомненно, тот факт, что в синтетической, или экзистенциальной, форме суждения «**α** существует» объект **a** типа **α**, который, как утверждается, тоже существует, был исключен, и при переходе от аналитического суждения **a : α** к синтетическому суждению «**α** существует» разрешимость теряется. Чтобы доказать, что **α** существует, нам следует искать объект **a** типа **α**, и даже если мы ограничимся частной формальной системой, эта поисковая процедура необязательно будет конечной, не говоря уже об условии, когда никакие ограничения не будут наложены на аксиомы, которые нам разрешено использовать в процессе этой процедуры. В частности, если предположить, что тип имеет форму proof(A), где A — пропозиция, тогда именно тот факт, что объект, представляющий собой доказательство a : proof(A), был исключен в форме суждения proof(A) exists, или, что то же самое, в форме суждения «A — истинно», является источником неразрешимости, а также и неполноты.

Рассмотрим снова самый простой и самый важный случай суждения формы «A — истинно», где A — пропозиция. Предположим, что пропозиция A была сформулирована в определенном языке или системе. Тогда A может быть недоказуема в этой системе просто потому, что не существует доказательства или конструкции a : proof(A), которое может быть выражено в этой системе. С одной стороны, возможно, если мы пойдем от исходной системы к некоторому ее расширению путем введения новых понятий, наподобие того, как идут от арифметики к арифметическому анализу или к теории обобщенных индуктивных определений, или к чему-то другому в этом роде, мы сможем построить объект a : proof (A) в расширенной системе, хотя это было бы невозможно сделать в исходной системе, в которой пропозиция A была выражена. Именно этот феномен был открыт Геделем путем рассмотрения в качестве исходной системы первопорядковой арифметики и построения частной первопорядковой арифметической пропозиции A, для которой не существует доказательства в этой системе. С другой стороны, он показал неформально, что существует тем не менее такое доказательство, которое говорит, что A истинна, и оно может быть также формализовано в подходящем расширении первопорядковой арифметики, полученной, например, добавлением правила рефлексивности. Итак, вот что я имел в виду, когда говорил, что различие между аналитическими и синтетическими суждениями оказывается важным моментом в правильном понимании феноменов неполноты и неразрешимости.

Так как эта конференция посвящена Канту и современной эпистемологии, позвольте мне закончить мой доклад воздаянием чести Канту. Хотя я и решил сконцентрироваться на определенных кантовских вопросах в логике и философии математики, я, конечно, не хочу утверждать, что достижения Канта в этих областях — в каком-то смысле самая важная часть его философского наследия. Несомненно, его философская позиция, его трансцендентальный идеализм, имеет намного более важное значение. Но я хотел показать вам хотя бы то, что даже в такой узкой области, как логика и философия математики, у Канта была невероятно важная идея, а именно идея существования синтетических суждений *a priori*, а также то, что эти суждения обязательно возникают, так как интересные математические теоремы требуют для их доказательства построения некоторой конструкции. Вам уже известна эта формулировка, которую я цитировал дважды: математическое знание осуществляется через построение понятий, по-немемецки — mathematische Erkenntnis durch die Konstruktion der Begriffe, великолепная формулировка, которая, без сомнения, имела плодотворное влияние на Брауэра, и, по моему мнению, справедливо сказать, что интуиционизм — это развитие по сути кантовской позиции в основаниях математики.

Перевод *О. А. Антоновой, О. Власичевой*