Семантика позитивных силлогистик и релевантное следование

В.И. Маркин, Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
vladimirmarkin@mail.ru

§ 1. В традиционной и в современной логике доминирует идущая от Аристотеля и отчетливо выраженная схоластами трактовка силлогистики как теории, которая исследует связи, возникающие в сфере *объемных* отношений между общими терминами. Силлогистические константы обычно рассматриваются как выражающие *экстенсиональные* отношения между двумя множествами (объемами понятий): константа *a* репрезентирует отношение теоретико-множественного включения класса в класс, константа *i* – наличие общих элементов у двух классов и т.д.

Эта трактовка может быть точно выражена средствами формальной семантики. *Моделью* является пара $<\mathbf{D}, \varphi>$, в которой **D** есть произвольное непустое множество (трактуемое как множество индивидов), а φ – функция, сопоставляющая терминам силлогистического языка подмножества из **D** (т.е. классы индивидов). Определим *функцию* $|\ |^{\mathbf{D}}_{\varphi}$ (или сокращенно – $|\ |_{\varphi}$) *означивания формул* в модели $<\mathbf{D}, \varphi>$ – функцию, отображающую множество силлогистических формул на множество истинностных значений {**1**, **0**} при фиксированных **D** и φ:

$|SaP|_{\varphi} = \mathbf{1}$, е.т.е. $\varphi(S) \subseteq \varphi(P)$,
$|SiP|_{\varphi} = \mathbf{1}$, е.т.е. $\varphi(S) \cap \varphi(P) \neq \varnothing$,
$|SeP|_{\varphi} = \mathbf{1}$, е.т.е. $\varphi(S) \cap \varphi(P) = \varnothing$,
$|SoP|_{\varphi} = \mathbf{1}$, е.т.е. $\varphi(S) \setminus \varphi(P) \neq \varnothing$,

Условия истинности (значимости) сложных формул стандартные.

Класс общезначимых формул аксиоматизируется силлогистическим исчислением **ФС**, дедуктивно эквивалентным системе Дж. Шефердсона [7]. **ФС** формализует позитивный фрагмент так называемой «фундаментальной» силлогистики. Её дедуктивными постулатами являются схемы аксиом

A0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний,
A1. $(MaP \wedge SaM) \supset SaP$, **A5.** $SiP \supset SiS$,
A2. $(MeP \wedge SaM) \supset SeP$, **A6.** $SoP \supset SiS$,
A3. $SeP \supset PeS$, **A7.** $SiP \equiv \neg SeP$,
A4. SaS, **A8.** $SoP \equiv \neg SaP$,

и единственное правило вывода – *modus ponens*. Понятие доказательства обычное.

Если на интерпретационную функцию φ в модели $<\mathbf{D}, \varphi>$ наложить дополнительное ограничение – $\varphi(S) \neq \varnothing$ для любого *S* (т.е. потребовать, чтобы общие термины были непустыми), получим адекватную семантику для силлогистики Я. Лукасевича (системы **C4** в классификации В.А. Смирнова). Схемами аксиом **C4** являются **A0**, **A1**, **A4**, **A7**–**A8**, а также следующие схемы формул:

$(MaP \wedge MiS) \supset SiP$ и SiS.

Подобные «экстенсиональные» семантики могут быть построены и для других известных систем позитивной силлогистики. Они будут отличаться от базовой (семантики для **ФС**) условиями истинности атомарных силлогистических формул, что связано с наложением различных ограничений на непустоту терминов в тех или иных категорических высказываниях.

Так, аристотелевско-оккамовская трактовка высказываний требует, чтобы истинные утвердительные суждения обязательно имели непустой субъект, если же субъект суждения пуст, то истинным окажется любое отрицательное высказывание. Эта трактовка может быть точным образом эксплицирована посредством модификации условий истинности для *SaP* и *SoP*:

$|SaP|_\varphi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\varphi(S) \subseteq \varphi(P) \;\dot{\wedge}\; \varphi(S) \neq \varnothing$,
$|SoP|_\varphi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\varphi(S) \setminus \varphi(P) \neq \varnothing \;\dot{\vee}\; \varphi(S) = \varnothing$.

Условия истинности *SeP* и *SiP* не меняются.

Класс общезначимых (при указанных семантических условиях) формул аксиоматизирует исчисление **С2** В.А. Смирнова. Система **С2** может быть получена из **ФС** посредством замены схем аксиом **А4**, **А5** и **А6** на две иные схемы:

А9. $SaP \supset SiP$, **А10.** $SiP \supset SaS$.

§ 2. В истории логики имелся и иной – альтернативный экстенсиональному – подход к интерпретации категорических суждений. Суть этого подхода заключается в трактовке субъекта и предиката высказывания как понятийных конструкций и их анализа с точки зрения *содержательных*, а не объемных характеристик. Силлогистические константы при этом рассматриваются как знаки отношений между понятиями по содержанию. По-видимому, впервые идея интенсиональной интерпретации силлогистики в отчетливом виде была высказана Г. Лейбницем, который прямо противопоставлял «содержательную» трактовку категорических суждений «объемной», схоластической. Попытка решения данной задачи была предпринята им в ряде работ, среди которых особо выделяется работа "Элементы исчисления", датированная 1679 г. [1, т.3, с.514-522]. Лейбниц предложил связывать с терминами категорических суждений не классы индивидов (объемы понятий), а совокупности признаков, т.е. содержания понятий (в их традиционном понимании).

Тогда высказывание *SaP* выражает утверждение не о включении объема субъекта в объем предиката, а о *включении содержания предиката в содержание субъекта*: "... всякое истинное общеутвердительное категорическое предложение означает не что иное, как некую связь предиката и субъекта ..., что предикат находится в субъекте, или содержится в субъекте ..." [1, т.3, с.516].

Лейбниц трактует высказывания типа *SiP* так: "... в *частноутвердительном предложении* нет необходимости, чтобы предикат присутствовал в субъекте, ... но достаточно предикату содержаться в каком-то виде субъекта, т.е. *чтобы понятие какого-то вида субъекта содержало понятие предиката*..." [1, т.3, с.521]. Заметим, что *вид*, по Лейбницу, – более богатое по содержанию понятие, результат добавления одного или нескольких признаков к содержанию исходного понятия. Таким образом, согласно Лейбницу, высказывание типа *SiP* истинно, если к содержанию его субъекта можно добавить признаки так, что в полученную совокупность будет включаться содержание предиката; иными словами, *субъект и предикат имеют общий вид*.

В [2] мною бала построена формальная семантика, адекватно эксплицирующая лейбницевскую интенсиональную интерпретацию силлогистики.

Рассмотрим множество *литералов* $\mathbf{L} = \{p_1, \sim p_1, p_2, \sim p_2, ...\}$. Литералы, не содержащие символа "~", представляют *положительные признаки*, а содержащие данный символ – *отрицательные признаки*.

Непротиворечивым понятием (рассматриваемым в аспекте его интенсиональной характеристики – содержания) назовем произвольное непустое и непротиворечивое подмножество $\mathbf{L}$, т.е. множество $\alpha \subseteq \mathbf{L}$, удовлетворяющее следующим условиям:

(i) $\alpha \neq \varnothing$;
(ii) не существует p_i, такого что $p_i \in \alpha$ и $\sim p_i \in \alpha$.

Пусть **Н** – множество всех непротиворечивых понятий. Определим на **Н** операцию *, сопоставляющую каждому понятию α *противоположное* ему понятие α*:

$$p_i \in \alpha^* \Leftrightarrow {\sim}p_i \in \alpha \quad \text{и} \quad {\sim}p_i \in \alpha^* \Leftrightarrow p_i \in \alpha.$$

Определим *интерпретирующую функцию* **d**, приписывающую каждому общему термину в качестве значения некоторое (интенсионально трактуемое) понятие: $\mathbf{d}(P) \in \mathbf{H}$. Зададим понятие *значимости* формулы языка позитивной силлогистики при интерпретации **d** (выражение “$\mathbf{d} \models A$” читается как “формула A значима при интерпретации общих терминов **d**”):

$\mathbf{d} \models SaP$, е.т.е. $\mathbf{d}(P) \subseteq \mathbf{d}(S)$;
$\mathbf{d} \models SiP$, е.т.е. $\mathbf{d}(P)^* \cap \mathbf{d}(S) = \varnothing$;
$\mathbf{d} \models SeP$, е.т.е. $\mathbf{d}(P)^* \cap \mathbf{d}(S) \neq \varnothing$;
$\mathbf{d} \models SoP$, е.т.е. $\mathbf{d}(P) \setminus \mathbf{d}(S) \neq \varnothing$.

Условия значимости сложных формул обычные.

Лейбницевская трактовка высказываний *SaP* в точности соответствует условию их значимости в сформулированной нами семантике.

Условие значимости высказываний *SiP* равносильно следующему:

$$\mathbf{d} \models SiP, \text{ е.т.е. } \dot{\exists}\alpha{\in}\mathbf{M}\ (\mathbf{d}(S) \subseteq \alpha\ \dot{\wedge}\ \mathbf{d}(P) \subseteq \alpha).$$

Последнее также соответствует лейбницевской интерпретации: субъект и предикат истинного частноотрицательного высказывания должны иметь общий вид.

Класс общезначимых (значимых при любой интерпретации **d**) формул совпадает с множеством теорем силлогистики Я. Лукасевича (системы **С4**).

Для того чтобы получить семантики, адекватные другим системам силлогистики, естественно отказаться от исходной предпосылки о непротиворечивости понятий, т.е. ввести в рассмотрение *противоречивые* понятия, содержания которых одновременно включают признаки p_i и ${\sim}p_i$ для некоторого p_i.

Пусть **П** – множество всех понятий. Положим, что $\mathbf{d}(P) \in \mathbf{П}$, но сами условия значимости силлогистических формул не меняются. Естественной выглядит гипотеза, что модифицированная интенсиональная семантика адекватна системе фундаментальной силлогистики **ФС**. Однако это не так. Аксиомы **А5** ($SiP \supset SiS$) и **А6** ($SoP \supset SiS$) не являются в ней общезначимыми.

Адекватно формализует эту семантику более слабое исчисление, получающееся из **ФС** отбрасыванием схем **А5** и **А6** и названное мною в [3] системой **ИФС**.

Вместе с тем, и для **ФС** имеется адекватная интенсиональная семантика. В ней $\mathbf{d}(P) \in \mathbf{П}$, но постулируются иные условия значимости силлогистических формул:

$\mathbf{d} \models SaP$, е.т.е. $\mathbf{d}(P) \subseteq \mathbf{d}(S)\ \dot{\vee}\ \mathbf{d}(S) \notin \mathbf{H}$;
$\mathbf{d} \models SiP$, е.т.е. $\mathbf{d}(S) \cup \mathbf{d}(P) \in \mathbf{H}$;
$\mathbf{d} \models SeP$, е.т.е. $\mathbf{d}(S) \cup \mathbf{d}(P) \notin \mathbf{H}$;
$\mathbf{d} \models SoP$, е.т.е. $\mathbf{d}(P) \setminus \mathbf{d}(S) \neq \varnothing\ \dot{\wedge}\ \mathbf{d}(S) \in \mathbf{H}$.

Для других систем позитивной силлогистики также можно сформулировать адекватные интенсиональные семантики. Так, семантика, адекватная «аристотелевско-оккамовской» силлогистике **С2** имеет следующие условия значимости формул [4]:

$\mathbf{d} \models SaP$, е.т.е. $\mathbf{d}(P) \subseteq \mathbf{d}(S)\ \dot{\wedge}\ \mathbf{d}(S) \in \mathbf{H}$;
$\mathbf{d} \models SiP$, е.т.е. $\mathbf{d}(S) \cup \mathbf{d}(P) \in \mathbf{H}$;
$\mathbf{d} \models SeP$, е.т.е. $\mathbf{d}(S) \cup \mathbf{d}(P) \notin \mathbf{H}$;
$\mathbf{d} \models SoP$, е.т.е. $\mathbf{d}(P) \setminus \mathbf{d}(S) \neq \varnothing\ \dot{\vee}\ \mathbf{d}(S) \notin \mathbf{H}$.

§ 3. Недавно В.И. Шалак в [6] предложил оригинальный подход к построению семантик для систем позитивной силлогистики. Его суть состоит в том, что в качестве значений общим терминам силлогистического языка сопоставляются не классы индивидов и не совокупности признаков, а *формулы языка классической пропозициональной логики*. Условия значимости атомарных формул силлогистики *SaP*, *SeP*, *SiP* и *SoP* определяются с использованием отношения выводимости между пропозициональными формулами, приписанными в качестве значений терминам *S* и *P*. Свою интерпретацию силлогистического языка он назвал «синтаксической».

Основной результат работы [6] – построение адекватной семантики для исчисления **ФС**, формализующего чистый позитивный фрагмент «фундаментальной» силлогистики.

Изложим семантику В.И. Шалака для **ФС** в несколько модифицированном виде: вместо отношения классической выводимости будем использовать его семантический аналог – отношение классического логического следования, а также переформулируем эквивалентным образом условия значимости формул *SeP* и *SoP*.

Интерпретирующая функция δ сопоставляет каждому общему термину формулу языка классической логики высказываний, не содержащую иных пропозициональных связок, кроме $\neg$, $\wedge$ и $\vee$. Условия значимости атомарных формул силлогистики **ФС** при некоторой интерпретации δ определяются так:

$$V(SaP, \delta), \text{ е.т.е. } \delta(S) \vDash \delta(P),$$
$$V(SiP, \delta), \text{ е.т.е. } \delta(S) \nvDash \neg\delta(P),$$
$$V(SeP, \delta), \text{ е.т.е. } \delta(S) \vDash \neg\delta(P),$$
$$V(SoP, \delta), \text{ е.т.е. } \delta(S) \nvDash \delta(P),$$

где $V(A, \delta)$ – «формула *A* значима при интерпретации δ».

Условия значимости сложных формул стандартные. Назовем формулу *A* V-общезначимой, е.т.е $V(A, \delta)$ при любой интерпретации δ. В [6] доказано, что множество V-общезначимых формул совпадает с множеством теорем силлогистики **ФС**.

В.И. Шалак показал также, что адекватная «синтаксическая» семантика для силлогистики Я. Лукасевича получается при наложении следующего ограничения: δ(*S*) – классически непротиворечивая формула пропозиционального языка.

В работе [5] мною был поставлен вопрос о возможности использования при определении условий значимости формул силлогистики не *классического* отношения логического следования ($\vDash$), а *релевантного* следования, а именно, отношения первоуровневого следования релевантной логики **FDE** ($\vDash_{rel}$). Семантика силлогистического языка модифицируется следующим образом:

$$V'(SaP, \delta), \text{ е.т.е. } \delta(S) \vDash_{rel} \delta(P),$$
$$V'(SiP, \delta), \text{ е.т.е. } \delta(S) \nvDash_{rel} \neg\delta(P),$$
$$V'(SeP, \delta), \text{ е.т.е. } \delta(S) \vDash_{rel} \neg\delta(P),$$
$$V'(SoP, \delta), \text{ е.т.е. } \delta(S) \nvDash_{rel} \delta(P).$$

$V'(A, \delta)$, когда *A* – сложная формула, определяется в «классическом» метаязыке стандартным образом.

В [5] доказано, что класс V′-общезначимых в этой «релевантизированной» семантике формул (т.е. $\{A\colon V'(A, \delta)$ при любой интерпретации $\delta\}$) аксиоматизируется силлогистическим исчислением **ИФС**. Таким образом, в данном случае замена классического логического следования на релевантное в условиях значимости формул *SaP*, *SeP*, *SiP* и *SoP* сужает класс законов силлогистики.

Возникает вопрос, можно ли построить адекватную семантику для фундаментальной силлогистики (**ФС**), используя в условиях значимости релевантное следование. Для решения данной задачи необходимо видоизменить их так:

$V'_1(SaP, \delta)$, е.т.е. $\delta(S) \vDash_{rel} \delta(P) \dot{\vee} \delta(S) \vDash_{rel} \neg\delta(S)$,

$V'_1(SiP, \delta)$, е.т.е. $\delta(S) \nvDash_{rel} \neg\delta(P) \dot{\wedge} \delta(S) \nvDash_{rel} \neg\delta(S) \dot{\wedge} \delta(P) \nvDash_{rel} \neg\delta(P)$,

$V'_1(SeP, \delta)$, е.т.е. $\delta(S) \vDash_{rel} \neg\delta(P) \dot{\vee} \delta(S) \vDash_{rel} \neg\delta(S) \dot{\vee} \delta(P) \vDash_{rel} \neg\delta(P)$,

$V'_1(SoP, \delta)$, е.т.е. $\delta(S) \nvDash_{rel} \delta(P) \dot{\wedge} \delta(S) \nvDash_{rel} \neg\delta(S)$.

Можно доказать, что все теоремы исчисления **ФС** и только они общезначимы при данных условиях (V'_1-общезначимы). При обосновании этого метаутверждения существенную роль играет (имеющий самостоятельное значение) результат о погружаемости системы **ФС** в свою подсистему **ИФС** посредством следующего перевода ψ:

$\psi(SaP) = SaP \vee SeS$, $\qquad \psi(SeP) = SeP \vee SeS \vee PeP$,

$\psi(SiP) = SiP \wedge SiS \wedge PiP$, $\qquad \psi(SoP) = SoP \wedge SiS$,

$\psi(\neg A) = \neg\psi(A)$, $\qquad \psi(A \nabla B) = \psi(A) \nabla \psi(B)$,

где ∇ – произвольная бинарная связка.

Адекватные семантики в терминах отношения релевантного следования могут быть построены и для других систем позитивной силлогистики. Рассмотрим в качестве примера исчисление **С2**.

Можно показать, что **С2** погружается в систему **ИФС** посредством перевода χ:

$\chi(SaP) = SaP \wedge SiS$, $\qquad \chi(SeP) = SeP \vee SeS \vee PeP$,

$\chi(SiP) = SiP \wedge SiS \wedge PiP$, $\qquad \chi(SoP) = SoP \vee SeS$,

$\chi(\neg A) = \neg\chi(A)$, $\qquad \chi(A \nabla B) = \chi(A) \nabla \chi(B)$.

На основе данного результата несложно сформулировать условия значимости атомарных силлогистических формул, соответствующие **С2**:

$V'_2(SaP, \delta)$, е.т.е. $\delta(S) \vDash_{rel} \delta(P) \dot{\wedge} \delta(S) \nvDash_{rel} \neg\delta(S)$,

$V'_2(SiP, \delta)$, е.т.е. $\delta(S) \nvDash_{rel} \neg\delta(P) \dot{\wedge} \delta(S) \nvDash_{rel} \neg\delta(S) \dot{\wedge} \delta(P) \nvDash_{rel} \neg\delta(P)$,

$V'_2(SeP, \delta)$, е.т.е. $\delta(S) \vDash_{rel} \neg\delta(P) \dot{\vee} \delta(S) \vDash_{rel} \neg\delta(S) \dot{\vee} \delta(P) \vDash_{rel} \neg\delta(P)$,

$V'_2(SoP, \delta)$, е.т.е. $\delta(S) \nvDash_{rel} \delta(P) \dot{\vee} \delta(S) \vDash_{rel} \neg\delta(S)$.

Множество теорем системы **С2** совпадает с множеством V'_2-общезначимых формул. Это свидетельствует о том, что и для данной силлогистики существует адекватная интерпретация, базирующаяся на использовании релевантного следования в определениях условий значимости её формул.

Заметим попутно, что для системы **С2** имеется адекватная семантика рассматриваемого типа, использующая классическое (а не релевантное) отношение следования. Условия значимости V_2 для атомарных силлогистических формул задаются так: $V_2(SiP, \delta)$ определяется в точности так же, как $V(SiP, \delta)$, а $V_2(SeP, \delta)$ так же, как $V(SeP, \delta)$, условия значимости *SaP* и *SoP* изменяются следующим образом:

$V_2(SaP, \delta)$, е.т.е. $\delta(S) \vDash \delta(P) \dot{\wedge} \delta(S) \nvDash \neg\delta(S)$,

$V_2(SoP, \delta)$, е.т.е. $\delta(S) \nvDash \delta(P) \dot{\vee} \delta(S) \vDash \neg\delta(S)$.

Литература

1. Лейбниц Г.В. *Сочинения в четырех томах*. М.: Мысль, 1984.
2. Маркин В.И. Интенсиональная семантика традиционной силлогистики // *Логические исследования*. 2001. Вып. 8. С. 82-91.
3. Маркин В.И. Фундаментальная силлогистика с интенсиональной точки зрения // *Логические исследования*. 2002. Вып. 9. С. 119-130.
4. Маркин В.И. Интенсиональная семантика для систем позитивной силлогистики // *Логика и В.Е.К.* М.: Современные тетради. 2003. С. 166-174.
5. Маркин В.И. Интерпретация категорических высказываний в терминах релевантного следования // *Логические исследования*. 2016. Т. 22. № 1. С. 70-81.
6. Шалак В.И. Синтаксическая интерпретация категорических атрибутивных высказываний // *Логические исследования*. 2015. Т. 21. №1. С. 60-78.
7. Shepherdson J.C. On the Interpretation of Aristotelian Syllogistic // *Journal of Symbolic Logic*. 1956. Vol. 21. No.2. P. 137-147.