Эквивалентные преобразования формул в логике Роговского R_4 в базисе {В, $\rightarrow$}.

Н. И. Стешенко, Южный федеральный университет
steshenkon@list.ru

Символы В, $\rightarrow$ соответственно читаются как «возникает, что…», «если…, то...». Остальные логические связки: ~, И, Т, ТВ, ТИ, У, Е, вводятся определениями, и читаются как «не есть так, что…», «исчезает, что…», «сильно утверждается, что…», «сильно утверждается, что В…», «сильно утверждается, что И…», «уже есть так, что…», «еще есть так, что...». Импликация $\rightarrow$ является сильно регулярной связкой в смысле Клини. Определения и табличная семантика этих символов дана в работе [1. Гл. 1].

В работе [1. С. 84] отмечалось, что надо найти более экономные (т.е. меньшей длины) эквивалентные преобразования ДНФ в СДНФ, что и сделано в тезисах.

Используем две эквивалентности: слабую эквивалентность ($Ф_1 \leftrightarrow Ф_2 =_{df} (Ф_1 \rightarrow Ф_2) \wedge (Ф_2 \rightarrow Ф_1)$) и сильную эквивалентность ($Ф_1 \Leftrightarrow Ф_2 =_{df} (ТФ_1 \rightarrow ТФ_2) \wedge (ТФ_2 \rightarrow ТФ_1)$). Сильная эквивалентность при всевозможных распределениях истинностных значений по подформулам формулы принимает только классические значения: 3(истина) и 0(ложь). Формулы А и С называются *эквивалентными*, если они реализуют (представляют) одну и ту же функцию, т. е. если их таблицы истинности совпадают.

Эквивалентное преобразование формулы А *в формулу* С есть такая последовательность формул, которая начинается с формулы А и каждая последующая формула получается из предыдущей путем эквивалентной замены формулы или ее подформул по одному из ниже данных эквивалентных отношений между формулами и заканчивается формулой С. Для любых формул логики Роговского верны (согласно таблицам истинности) следующие эквивалентные отношения между формулами.

1.1 $(p \wedge g) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (g \wedge r)$; 1.2 $(p \vee g) \vee r \leftrightarrow p \vee (g \vee r)$;
2.1 $(p \wedge g) \leftrightarrow (g \wedge p)$; 2.2 $(p \vee g) \leftrightarrow (g \vee p)$;
3.1 $(p \wedge p) \leftrightarrow p$; 3.2 $(p \vee p) \leftrightarrow p$;
4.1 $p \wedge (g \vee r) \leftrightarrow (p \wedge g) \vee (p \wedge r)$; 4.2 $p \vee (g \wedge r) \leftrightarrow (p \vee g) \wedge (p \vee r)$;
5.1 $p \wedge (p \vee g) \leftrightarrow p$; 5.2 $p \vee (p \wedge g) \leftrightarrow p$;
6.1 $p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$; 6.2 $p \vee 0 \leftrightarrow p$;
7.1 $p \wedge 3 \leftrightarrow p$; 7.2 $p \vee 3 \Leftrightarrow 3$;
7.1.1. $0 \leftrightarrow Тp \wedge ТВp \wedge ТИp \wedge Т{\sim}p$. 7.2.1. $3 \leftrightarrow Тp \vee ТВp \vee ТИp \vee Т{\sim}p$
7.1.2. $c_1 \wedge c_2 = \min(c_1, c_2)$; $c_1 \vee c_2 = \max(c_1, c_2)$; $c_1, c_2 \in \{0,1,2,3\}$

Примечание: вместо p, g, r можно подставить любую (нужную) формулу.

8.1 $\sim\sim p \leftrightarrow p$; 8.2 $\sim(p \wedge g) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim g)$; 8.3 $\sim(p \vee g) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim g)$; 8.4 $\sim(p \rightarrow g) \leftrightarrow (p \wedge \sim g)$; 8.5 $\sim Вp \leftrightarrow В{\sim}p \leftrightarrow Иp$; 8.6 $\sim Иp \leftrightarrow И \sim p \leftrightarrow Вp$; 8.7. $\sim Тp \Leftrightarrow \sim p \vee ТВp \vee ТИp$; 8.8. $\sim ТВp \Leftrightarrow Иp \vee Т{\sim}p \vee Тp$; 8.9. $\sim ТИp \Leftrightarrow Вp \vee Тp \vee Т{\sim}p$; 8.10. $\sim Уp \Leftrightarrow У \sim p$; 8.11. $\sim Еp \Leftrightarrow Е \sim p$;

9. $(p \rightarrow g) \leftrightarrow (\sim p \vee g)$;

10.1. $Т(p \wedge g) \Leftrightarrow (Тp \wedge Тg)$; 10.2 $Т(p \vee g) \Leftrightarrow (Тp \vee Тg)$; 10.3. $Тp \wedge p \Leftrightarrow Тp$; 10.4. $Тp \vee p \leftrightarrow p$; 10.5. $ТТp \Leftrightarrow Тp$; 10.6. $ТЕp \Leftrightarrow Еp$;10.7. $ТУp \Leftrightarrow Уp$; 10.8. $ТВ(p \wedge g) \Leftrightarrow (ТВp \wedge Тg) \vee (ТВp \wedge ТВg) \vee (Тp \wedge ТВg)$;

10.9. $ТВ(p \vee g) \Leftrightarrow (ТВp \wedge ТВg) \vee (ТВp \wedge ТИg) \vee (ТВp \vee Т{\sim}g) \vee (ТВg \wedge ТИp) \vee (ТВg \wedge Т{\sim}p)$; 10.10. $ТИ(p \wedge g) \Leftrightarrow ТВ(\sim p \vee \sim g)$; 10.11. $ТИ(p \vee g) \Leftrightarrow ТВ(\sim p \wedge \sim g)$;

11.1. $В(p \wedge g) \leftrightarrow (Тp \wedge Вg) \vee (ТВp \wedge Тg) \vee (\sim p \wedge ТИp \wedge Тg) \vee (Вp \wedge Вg) \vee (Вp \wedge Т{\sim}p)$;

11.2. $В(p \vee g) \leftrightarrow (Вp \wedge Вg) \vee (Т{\sim}p \wedge Вg) \vee (ТВp \wedge ТИg) \vee (ТВp \wedge Т{\sim}g) \vee (ТИp \wedge Т{\sim}g) \vee (Вp \wedge Тp \wedge Тg)$; 11.3. $ВТp \leftrightarrow (p \vee \sim p) \wedge (Вp \vee Иp) \wedge (\sim p \vee Вp)$; 11.4. $ВВp \leftrightarrow \sim p$; 11.5. $ВИp \leftrightarrow p$;

12.1. И(p ∧g) ↔ В(~p ∨ ~g); 12.2. И(p ∨ g) ↔ В(~p ~g); 12.3. ИВp ↔ p; 12.4. ИИp ↔ ~p; 12.5. ИТp ↔ (~p ∧ p) ∨ (Иp ∧ Вp) ∨ (p ∧ Иp);

13.1. Уp ⇔ Тp ∨ ТВp; 13.2. УВp ⇔ Е~p; 13.3. УИp ⇔ Еp; 13.4. УТp ⇔ Тp; УЕp ⇔ Еp; 13.5. У(p ∧g) ⇔ (Уp ∧ Уg); 13.6. У(p ∨ g) ⇔ (Уp ∨ Уg);

14.1. Еp ⇔ Тp ∨ ТИp; 14.2. ЕВp ⇔ Уp; 14.3. ЕИp ⇔ У~p; 14.4. ЕТp ⇔ Тp; 14.5. Е (p ∧ g) ⇔ Т(p ∧ g) ∨ ТИ(p ∧ g); 14.6. Е(p ∨ g) ⇔ Т(p ∨ g) ∨ ТИ(p ∨ g);

15.1. Тp ∧ТВp ⇔ Тp ∧ ТИp ⇔ ТВp ∧ ТИp ⇔ 0; 15.2. p ↔ ((3∧Тp) ∨ (2∧ТВp) ∨ (1∧ТИp)); 15.3. Вp ↔ ((3∧ТВp) ∨ (2∧Т~p) ∨ (1∧Тp)); 15.4. Иp ↔ ((3∧ТИp) ∨ (2∧Тp) ∨ (1∧Т~p)); 15.5. ~p ↔ ((3∧Т~p) ∨ (2∧ТИp) ∨ (1∧ТВp));

16.1. (i∧p) ∨ (j∧p) ↔ j∧p, i < j; i ∈ {1, 2}, j ∈ {1, 2, 3};

16.2. (i∧p) ∧ (j∧p) ↔ i∧p, i < j; i ∈ {1, 2}, j ∈ {1, 2, 3}.

Набор эквивалентностей полный (т.е. для любых двух эквивалентных формул существует эквивалентное преобразование одной в другую), но избыточен, последнее позволяет сократить число шагов в преобразовании.

Предполагается стандартный набор понятий многозначной логики для описания ДНФ и СДНФ. Но отдельные определения дадим. *Литерой* называется любая формула вида, Тp, Т~p, ТВp, ТИp, где p – простая формула. *Элементарная конъюнкция* (*ЭК*) есть конъюнкция литер. *Полная ЭК* есть ЭК, в которой представлены все элементарные формулы исходной формулы (приписав к ним оператор Т) без повторений.

Допустим, что формула **А** уже преобразована в ДНФ. На основании эквивалентностей. 15.2 – 15.5 разлагаем формулы вида p, ~p, Вp, Иp в составе ДНФ в дизъюнкцию конъюнкций. Чтобы получить полные ЭК используем 7.1 и 7.2.1. После раскрытия скобок при помощи 3.2 убираем повторяющиеся дизъюнкты (полные ЭК). Посредством 16.1 уменьшаем число дизъюнктов. В итоге имеем СДНФ в языке логики Роговского.

Для примера преобразуем Иp ∨ g в СДНФ. Конъюнкцию заменим звездочкой ∗.

Иp ∨ g $\leftrightarrow_{(15.4,\ 15.2)}$ (3∗ТИp ∨ 2∗Тp ∨ 1∗Т~p) ∨ (3∗Тg ∨ 2∗ТВg ∨ 1∗ТИg) $\leftrightarrow_{(7.1,\ 7.2.1.)}$ {(3∗ТИp ∨ 2∗Тp ∨ 1∗Т~p)∗(Тg ∨ ТВg ∨ ТИg ∨ Т~g)} ∨ {(Тp ∨ ТВp ∨ ТИp ∨ Т~p) ∗ (3∗Тg ∨ 2∗ТВg ∨ 1∗ТИg)} $\leftrightarrow_{(\text{раскрываем первые фигурные скобки})}$3∗ТИp∗Тg ∨ 3∗ТИp∗ТВg ∨3∗ТИp∗ТИg ∨3∗ТИp∗Т~g ∨ 2∗Тp∗Тg ∨ 2∗Тp∗ТВg ∨2∗Тp∗ТИg ∨2∗Тp∗Т~g ∨ 1∗Т~p∗Тg ∨ 1∗Т~p∗ТВg ∨1∗Т~p∗ТИg ∨1∗Т~p∗Т~g $\vee_{(\text{раскрываем вторые фигурные скобки})}$∨ 3∗Тp∗Тg ∨ 2∗Тp∗ТВg ∨1∗Тp∗ТИg ∨ 3∗ТВp∗Тg ∨ 2∗ТВp∗ТВg ∨1∗ТВp∗ТИg ∨ 3∗ТИp∗Тg ∨ 2∗ТИp∗ТВg ∨1∗ТИp∗ТИg ∨ 3∗Т~p∗Тg ∨ 2∗Т~p∗ТВg ∨1∗Т~p∗ТИg

Далее на основании эквивалентных преобразований 1.2, 2.2, 3.2, 16.1 получим СДНФ в виде:

3∗ТВp∗ Тg ∨ 2∗ТВp ∗ТВg ∨ 1∗ТВp∗ТИg ∨ 3∗Т~p∗Тg ∨ 2∗Т~p∗ТВg ∨ 1∗Т~p∗ ТИg ∨ 1∗Т~p ∗Т~g ∨ 3∗Тp∗Тg ∨ 2∗Тp∗ТВg ∨ 2∗Тp∗ТИg ∨ 2∗Тp∗Тg ∨
∨ 3∗ТИp∗Тg ∨ 3∗ТИp∗ТВg ∨ 3∗ТИp∗ТИg ∨ 3∗ТИp∗Т~g.

Можно убедится, что полученная путем эквивалентных преобразований СДНФ формулы Иp ∨ g, совпадет с СДНФ, построенной по таблице истинности для формулы Иp ∨ g.

Литература.

1. Стешенко Н. И. Логика направленности изменения. Ростов-Дон. 2010.