Два подхода к обобщению формальных систем: формализованный язык и аксиоматика.

Е.Г. Шкорубская, Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского
shkorubska@gmail.com

С методологической точки зрения формальная система представляет собой метатеоретический конструкт, образующийся в результате сочетания двух научных методов – аксиоматического метода и метода построения формализованных языков (формализации). Наибольшее развитие формальные системы получили в первой половине XX века, в качестве одного из средств преодоления кризиса оснований математики. Достаточно полное теоретическое обобщение они получили в работах двух исследователей – Э. Поста (в 1943 г.) и Р. М. Смаллиана (в 1962 г.).

Э. Пост в статье «Formal reductions of the general combinatorial decision problem» [1] ввёл понятие «канонической системы» (КС). КС – это n-ка (A, P, A, p), где A и P– алфавиты, не имеющие общих букв (A – алфавит исчисления, P–алфавит переменных), A–аксиомы системы, p – набор правил вывода.

Словами из алфавита A (a_1, a_2, a_3, … , a_n) будут конечные последовательности знаков $a_1\,a_2\,a_3 \ldots a_n$. Аксиомы системы – точно определённое конечное множество слов из A. Схема вывода (продукции, порождения) выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{c} Q_1 \\ \ldots. \\ Q_m \\ \text{---} \\ Q_0 \end{array} \qquad (1)$$

Где Q_i – слова объединения алфавитов A и P, состоящие из базовых знаков и переменных (такие слова КС будут называться термами), i = 1, 2, 3, … m. $Q_1, \ldots, Q_m$ – посылки выводной схемы, Q_0 – вывод. Q_0 имеет хотя бы по одной общей переменной с каждой посылкой. Слово a называется применением аксиомы *A'*, если a получается из A' путём подстановки слов вместо переменных. Множество утверждений системы включает в себя аксиомы системы и все утверждения, полученные из аксиом, с помощью правил вывода.

КС представляют собой высшую степень обобщения – в их терминах может быть выражена любая формальная система. Здесь не специфицирован алфавит, не заданы правила вывода (они представлены в виде схем). Более того, не определена «правильно построенная формула алфавита A». К словам КС предъявляется единственное требование – быть конечной последовательностью базовых знаков. Требование, предъявляемое к термам – быть конечной последовательностью базовых знаков и переменных. Таким образом, мы имеем очень гибкий конструкт, позволяющий описывать крайне широкие классы формальных систем. Более богатые формальные системы могут без каких-либо ограничений надстраиваться поверх КС за счёт расширения алфавита, определения правил вывода, строгого задания аксиом и т.д. В то же время аппарата КС достаточно для рассмотрения таких базовых свойств формальной системы как вычислимость, разрешимость и т.д.

Канонические системы Поста в дальнейшем стали известны как «канонические исчисления», правила вывода – как «порождение». В силу своей гибкости они стали основой для многих логических исчислений и получили прикладное применение в компьютерных науках. Как можно легко заметить, операции КС Поста в первую очередь представляют собой средство порождения множества слов некоего формального языка. Это послужило причиной внимания к КС со стороны лингвистики и компьютерной лингвистики. Непосредственно на базе КС были разработаны «порождающие грамматики» Хомского и развилась теория формальных грамматик. Таким образом, можно отметить, что методологическая применимость КС Поста вышла далеко за рамки математики и метаматематики.

Несколько иная ситуация с обобщением, представленным Р. Смаллианом (в «Теории формальных систем» [2]). Несмотря на то, что он в своём подходе он опирался на КС Поста, его внимание всё же в первую очередь направлено на обобщение именно формальных метаматематических систем. Как он справедливо замечает, предлагаемый им конструкт, по сравнению с постовским, более прост в описании и куда легче применим (действительно, оперировать с общими схемами вывода-продукциями и случайными последовательностями знаков алфавита, пожалуй, сложнее, чем со строго заданными формулами и правилами вывода). Однако, это достигается за счёт большей строгости определений и, соответственно, меньшей вариативности.

Основным понятием, вводимым Смаллианом, является понятие элементарной формальной системы (ЭФС). ЭФС над алфавитом К (E_k)– это совокупность следующих объектов:

1) алфавит К (предварительно строго определённый)
2) алфавит символов, называемых переменными
3) алфавит символов, называемых предикатами (для отношений или свойств)
4) два символа, называемые знаком импликации и знаком пунктуации
5) конечная последовательность A_1, … A_z строк, которые являются правильно построенными формулами, и эти строки являются аксиомами системы $E_{k.}$

Помимо определения алфавита и правильно построенной формулы, также определяются правила вывода – подстановка и modus ponens.

Как можно заметить, существенные элементы формальных систем в обоих обобщающих подходах совпадают, однако, очевидно, что подход Смаллиана демонстрирует более структурированное и строгое построение, благодаря чему ЭФС, во-первых, более просты для описания и понимания, а, во-вторых, действительно легче применимы для разрешения метаматематических проблем. Справедливо будет заметить, что ЭФС Смаллиана являются частным случаем КС Поста.

Оба указанных подхода имеют одну общую черту: они не схватывают всех фрагментов, имеющих хождение в существующих формальных системах. И в первом, и во втором случае мы имеем дело с необходимой базой для построения формальных систем. Однако стоит задать вопрос о достаточности этой базы. Например, здесь не учитывается важнейший элемент большинства формальных систем – уравнения. В связи с этим можно определить проблему «формальной системы в полном объёме», которая содержала бы не только необходимые, но и достаточные единицы строительства формальных систем.

Исследование выполнено при поддержке РГНФ, грант № 16-03-*00120 «Влияние форматирования на смысл: изменения в текстовой культуре и трансформация коммуникации»*

Литература

1. Post E. L. Formal Reductions of the General Combinatorial Decision Problem // American Journal of Mathematics, Vol. 65, No. 2, 1943, pp. 197–215
2. Смальян Р. Теория формальных систем. М: Наука, 1981.