Топологическое представление и обобщение классических связок и правил системы естественной дедукции

А. Б. Бановац, Институт философии Российской академии наук
pochtamoya@bk.ru

Исходя из концепции пространственности П.А. Флоренского [1-2], автор доказывает, что каждому объекту дифференциации (различения) может быть поставлено в соотношение топологическое пространство, определяемое схемой (критериев) его дифференциации, причем различные схемы дифференциации одного и того же объекта, в общем случае, определяют различные топологические пространства. Таким образом, топологические пространства могут быть поставлены в соотношение с логическими формами, и свойства первых определяются семантическими и синтаксическими свойствами последних.

Доказывается теорема о топологическом представлении классических связок, путем топологического представления классов формул логики высказываний, отличающихся относительно главной связки, т.е.: $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$, $A \leftrightarrow B$ и $\neg A$, где A и B переменные пробегающие по формулам.

Если A и B представляют различные формулы, то соответствующим пространством в первых двух случаях является $X_1 = \{A, B\}$, в третьем и четвертом $X_2 = \{A, B, \alpha\}$ и в последнем $X_3 = \{A, \alpha\}$. Элемент α в данном случае (когда речь идет о классической логике высказываний) определяется как $\alpha = \perp$.
Семантические свойства связок задают следующие топологические структуры пространств X_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, различных классов формул:

$$A \wedge B \colon T_{\wedge} = \big\{\{A, B\}, \emptyset\big\}, \tag{1}$$

$$A \vee B \colon T_{\vee} = \big\{\{A, B\}, \{A\}, \{B\}, \emptyset\big\}, \tag{2}$$

$$A \to B \colon T_{\to} = \big\{\{A, B, \alpha\}, \{B, \alpha\}, \{\alpha\}, \emptyset\big\}, \tag{3}$$

$$A \leftrightarrow B \colon T_{\leftrightarrow} = \big\{\{A, B, \alpha\}, \{\alpha\}, \emptyset\big\}, \tag{4}$$

$$\neg A \colon T_{\to} = \big\{\{A, \alpha\}, \{\alpha\}, \emptyset\big\}. \tag{5}$$

Из сказанного понятно, что каждая подформула логики высказываний также образует (в вышеуказанном смысле) топологическое пространство, т.е. формулы, логическая длина которых больше 2, представляются топологическими пространствами, элементами которых являются топологические пространства.

Каждое из приведенных выше пространств обладает различными топологическими свойствами. Исходя из этих свойств, можно доказать и обратную теорему, т.е. утверждение о том, что топологические пространства, обладающие соответствующими топологическими свойствами генерируют классы формул (логики высказываний) с точно определенной главной связкой. Данный результат дает возможность трактовки "пространственных форм", т.е. (определенным образом) топологизируемых сущностей, в логических терминах.

Обобщение полученных результатов возможно за счет различных определений элемента α; в зависимости от значения последнего получаются различные определения отрицания, а соответственно и различные, уже неклассические (например паранепротиворечивые), логические системы.

Далее, можно доказать, что правило вывода *modus ponens* топологически представляется в виде гомеоморфизма пространств с топологической структурой

$$T_{\rightarrow} = \{\{A, B, \alpha\}, \{B, \alpha\}, \{\alpha\}, \emptyset\}. \tag{6}$$

Также, все правила системы естественной дедукции могут быть топологически представлены в виде отображений топологических пространств и, соответствующим образом обобщены. Данные обобщения позволяют включать в область определения отображений пространства обладающие топологическими свойствами отличными от приведенных выше пространств, и переводить их в образы (пространства) представляющие логические формы.

Литература

1. Флоренский П.А. Анализ пространственности (и времени) в художественно-изобразительных произведениях // *Флоренский. История и философия искусства* / Ред. игумен Андроник (А.С. Трубачев). М.: «Мысль» 2000. С. 81-259.

2. Флоренский П.А. Значение пространственности // *Флоренский. История и философия искусства* / Ред. игумен Андроник (А.С. Трубачев). М.: «Мысль» 2000. С. 272-274.

3. Munkres J.R. *Topology*. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000.