О конечнозначных логических матрицах, порождающих классическое отношение следования

Л. Ю. Девяткин, Институт философии Российской академии наук
leoniddevyatkin@gmail.com

Гжегож Малиновский предложил следующий критерий многозначности: логика является многозначной, если и только если ее матрица порождает отношение логического следования, отличное от классического [4, p. 30]. В то же время, многие неклассические логики могут быть заданы преобразованием многозначной матрицы, порождающей классическое следование. Матрицы, отвечающие критерию Малиновского, можно получить добавлением к операциям «классической» многозначной матрицы «неклассической» операции. Такую формулировку допускают трехзначные логики Поста, Лукасевича, Бочвара [2, Гл. 3], логика T^3 [5]. Также, можно оставить операции без изменений, но модифицировать класс выделенных значений. Так формализуются трехзначные логики Гейтинга и Брауэра [2, С. 48–49]. Поэтому представляют интерес необходимые и достаточные условия, при которых логическая матрица порождает классическое следование. В работе [1, с. 49] эти условия описаны для трех значений. Здесь мы обобщаем результат на k-значный случай.

Пропозициональный язык $\mathcal{L} = \langle L, F\rangle$ рассматриваем как абсолютно свободную алгебру. Полагаем, что свободные порождающие $\mathcal{L}$ образуют счетное множество $Var = \{p_1, p_2, \dots\}$, и для каждого $i \leq n$ местность $F_i \in F$ равняется k_i. Множество For формул языка $\mathcal{L}$ определяется стандартно. Логической матрицей называем структуру $M = \langle \mathcal{A}, D\rangle$, где $\mathcal{A} = \langle A, F\rangle$ есть алгебра, и $D \subseteq A$. Если $\mathcal{A}$ есть Булева алгебра, называем матрицу M Булевой матрицей. Когда $\mathcal{L}$ и $\mathcal{A}$ подобны, говорим, что M есть матрица для $\mathcal{L}$. В этом случае гомоморфизм h из $\mathcal{L}$ в $\mathcal{A}$ называем оценкой формулы языка $\mathcal{L}$ в матрице M. Отношение следования на $\mathcal{L}$, порождаемое матрицей M, определяем как множество $M^{\vDash} = \{\langle X, \alpha\rangle | \forall h(h(X) \subseteq D \Rightarrow h(\alpha) \in D)\}$. Если θ конгруэнция на $\mathcal{L}$ и $\forall a(a \in D \Rightarrow |a|_\theta \subseteq D)$, называем θ матричной конгруэнцией на M. Матрицу $M/\theta = \{\mathcal{A}/\theta, D/\theta\}$ называем фактор-матрицей M по θ. Если отношение равенства является единственной матричной конгруэнцией на M, говорим что матрица M является простой. Если $M_1 = \langle \mathcal{A}_1, D_1\rangle$ и $M_2 = \langle \mathcal{A}_2, D_2\rangle$ логические матрицы, h гомоморфизм из $\mathcal{A}_1$ в $\mathcal{A}_2$, и $\forall a(a \in D_1 \Leftrightarrow h(a) \in D_2)$, называем h матричным гомоморфизмом. Если существует матричный гомоморфизм из M_1 на M_2, называем M_2 матрично гомоморфным образом M_1, а M_1 — прообразом M_2.

Теорема 1. Матрица M порождает классическое следование, если и только если она является матрично гомоморфным прообразом простой Булевой матрицы.

Доказательства используемых ниже утверждений доступны в [6, Ch. 3]. Обозначим как $Matr(M^{\vDash})$ класс матриц $\{M_i | M^{\vDash} \subseteq M_i^{\vDash}\}$. Если каждая M_i является простой матрицей, обозначим такой класс как $Matr^*(M^{\vDash})$. Пусть $C^{\vDash}$ — классическое отношение следования. Класс $Matr^*(C^{\vDash})$ совпадает с классом всех простых Булевых матриц. Допустим, что $M^{\vDash} = \mathrm{C}^{\vDash}$. Если матрица M простая, то она есть простая Булева матрица. Если матрица M не простая, существует такая матричная конгруэнция θ на M, что простой является фактор-матрица M/θ. Так как $M^{\vDash} = M/\theta^{\vDash}$, матрица M/θ есть простая Булева матрица. В то же время, по построению M/θ, существует матричный гомоморфизм из M на M/θ. Теперь пусть M есть матрично гомоморфный прообраз простой Булевой матрицы BM. Тогда $M \in Matr(BM^{\models})$ и $BM \in Matr(M^{\models})$. Следовательно, $M^{\models} = BM^{\models} = C^{\models}$. Теорема доказана.

Следствие 1. Если матрица $M = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ порождает классическое отношение логического следования, то найдется такая матрица $M' = \langle \mathcal{A}, D' \rangle$, отличная от M лишь классом выделенных значений, что существует матричный гомоморфизм из M' на двузначную Булеву матрицу.

Любая Булева алгебра изоморфна прямой степени двузначной Булевой алгебры $\mathcal{B}_2$. В то же время, матричный гомоморфизм является сужением стандартного понятия гомоморфизма. Поэтому всегда имеется гомоморфизм из $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}_2$. Однако такой гомоморфизм порождает двухчастное разбиение π носителя $\mathcal{A}$. Принимая один из элементов π за D', получаем искомую матрицу M'.

Обозначим как E_k множество $\{0, 1, \ldots, k-1\}$, а P_k класс всех операций на E_k. Пусть задано разбиение π: $E_k = E_1 + E_2$. Класс U всех функций, сохраняющих данное разбиение, предполон в P_k [3]. Отсюда получаем результат о верхней границе класса всех функций k-значной «классической» матрицы.

Следствие 2. Если k-значная матрица порождает классическое отношение следования, то все ее операции содержатся в предполном классе P_k типа U.

Принимая во внимание, что базовые операции $\mathcal{B}_2$ не содержатся полностью ни в одном из предполных классов P_2, находим нижнюю границу.

Следствие 3. Если матрица M порождает классическое отношение следования, то класс ее операций не содержится ни в одном прообразов предполных классов P_2 относительно матричного гомоморфизма из M на двузначную Булеву матрицу.

Работа поддержана грантом РГНФ № 14-03-00341а.

Литература

1. Девяткин Л.Ю., Преловский Н.Н., Томова Н.Е. *В границах трехзначности.* М.: ИФ РАН, 2015

2. Карпенко А.С. *Развитие многозначной логики.* М.: ЛКИ, 2010

3. Яблонский С.В., Функциональные построения в k-значной логике // *Труды математического института им. В.А. Стеклова*, 51, М., 1958. С. 5—142

4. Malinowski G. *Many-Valued Logics.* Oxford University Press. 1993

5. Tomova N.E. Natural three-valued logics and classical logic // *Logical Investigations* 19, 2013, pp. 344–352

6. Wójcicki R. *Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations.* Dordrecht: Kluwer, 1988