Неконсервативность расширения и дефляционная концепция истины

А.В. Хлебалин, Новосибирский государственный универстет,
Институт философии и права СО РАН
sasha_khl@mail.ru

Центральным положением доминирующей ныне дефляционной концепции истины является утверждение о том, понятие истины является метафизически бессодержательным и выполняет исключительно логические функции. Обоснованием этой концепции явилась бы демонстрация того, что привнесение в теорию предиката истины не привело бы к ее существенным изменениям, т.е., не привело бы к расширению исходной теории. Именно с неконсервативностью расширения теории с добавлением в нее предиката истины связан самый серьезный аргумент против дефляционной концепции, восходящий к С. Шапиро. Пусть переменные языка L пробегают по натуральным числам. Мы ассоциируем каждое предложение ψ языка L с натуральным числом $\ulcorner\psi\urcorner$, являющимся его геделевым номером. И пусть для каждого числа n, Φ_n будет предложением с гёделевым номером n. В этом языке формулируется теория *A*, содержащая примитивные теоремы арифметики. В этом языке определяем предикат доказуемости; формула $\mathbf{PRF}(x,y)$, такая, что для любых числе m и n, $\mathbf{PRF}$(m,n) доказуема в *A*, если и только если n обозначает гёделево число доказательства Φ_m в *A* и $\neg$ $\mathbf{PRF}$(m,n) доказуемо в *A*, если и только если n не обозначает гёделево число доказательства Φ_m в *A*. Пусть G будет неподвижной точкой для $\neg\exists y\mathbf{PRF}(x,y)$, такая что $G\equiv\neg\exists y\mathbf{PRF}(\ulcorner G\urcorner,y)$ доказуемо в *A*. Согласно первой теореме Гёделя о неполноте G истинно, но не доказуемо в *A* (при условии непротиворечивости *A*). Можно показать в *A*, что G эквивалентно $\neg\exists y\mathbf{PRF}(\ulcorner 0=1\urcorner,y)$, которую мы сокращаем как Con и который значит непротиворечивость *A*. В виду того, что не доказуемо G, также не доказуем и Con; что является второй теоремой Гёделя о неполноте. Допустим, в число аксиом *A* мы добавляем предикат *T*, интерпретируемый как предикат истины для языка L и аксиомы для доказательства каждого Т-предложения: $T(n)\equiv\Phi(n)$. Можно добавить Т-предложения в качестве новых аксиом или же, как это сделал А. Тарский, ввести терминологию выполнения (в этом случае нам нужно конечное множество аксиом). В итоге мы получаем язык L′ и теорию *A*′. В Т-схеме метапеременная n пробегает по гёделевым номерам предложений языка L, а не L′, что позволяет избежать парадокса. В случае теорий *A* и *A*′ мы имеем дело с консервативностью расширения, что вполне соответствует принципам дефляционизма. Желательно, чтобы *A*′ давала возможность характеризовать все истины, необходимые для рассмотрения арифметической истины. Но это не так. В частности, необходимо выражать обобщение в отношении истинности; т.к. исходный язык L содержит обычную квантификацию, в L′ можно показать, что все аксиом *A* истинны, а правила вывода сохраняют истинность. В связи с тем, что эти обобщения верны, адекватная теория истины должна позволять установить их. Отсюда должно следовать, что все теоремы истинны: $\forall x(\exists y\,\mathbf{PRF}(x,y)\rightarrow T(x))$ (для L′, при этом $\mathbf{PRF}(x,y)$ – предикат доказуемости для *A*, а не для *A*′). Это предложение говорит в L′, что все теоремы *A* истинны, и если мы можем его доказать, в *A*′, тогда, в связи с тем, что $\neg T(\ulcorner 0=1\urcorner)$ является одним из следствий Т-предложений, $\neg\exists y\mathbf{PRF}(\ulcorner 0=1\urcorner,y)$ будет доказуема в *A*′. Это Con, не содержащий предиката истины и в силу этого, принадлежащий языку L. Свойство консервативности предполагает, что Con (и G) доказуемы в *A*, что противоречит теореме о неполноте К. Гёделя, а следовательно, $\forall x(\exists y\,\mathbf{PRF}(x,y)\rightarrow T(x))$ недоказуемо в *A*′.

Таким образом, дефляционная концепция сталкивается с невыполнением требования консервативности расширения теории. Но возникает вопрос о том, насколько справедливо требование консервативности, имея в виду природу исходной теории, к которой добавляется предикат истины. Наиболее строгая его формулировка предполагает, что добавление предиката истины к исходной теории должно приводить к теории, консервативной по отношению к первопорядковой логике. Это значит, что теория с предикатом истины (Tr) будет консервативной по отношению к первопорядковой логике, если все предложения, доказуемые в Tr, но не содержащие предикат истины, будут доказуемы исключительно средствами логики. Этому требованию не удовлетворяют даже самые слабые дефляционные теории. В общем виде, добавление предиката истины в любой дефляционной формулировке влечет постулирование существования двух объектов – «истина» и «ложь», что уже приводит к неконсервативности расширения исходной теории. Иными словами, любая дефляционная теория заведомо обречена на неконсервативность расширения в отношении логики. В случае онтологической нейтральности логики этот вопрос кажется тривиальным, тогда как обращение к содержательной теории не просто лишает его такой тривиальности, но и делает ответ более определенным, в связи с тем, что исходная теория изначально предполагает определенную онтологию. Тогда если с использование предиката истины можно доказать новые теоремы, не содержащие в себе его, это явно свидетельствует в пользу субстанциальной интерпретации истины. Таким образом, если, например, непротиворечивость исходной теории, например, арифметики Пеано (PA), не может быть доказана в самой исходной теории, но может быть установлено с добавлением аксиом для истины, тогда теория истины влечет несемантические следствия и тем самым оказывается субстанциальной. Можно привести целый перечень теорий истины, как предполагающих метаязык, так и допускающих определение истины в самом языке, которые позволяют доказать непротиворечивость PA, например, композиционная теория истины (CT), аксиоматическая теория Крипке-Фефермана (K-F). Таким образом, оказывается, что определенные теории истины привносят в исходную теорию существенные математические или синтаксические следствия. Но здесь мы сталкиваемся с еще одной проблемой: каков критерий различения математического и теоретико-истинного содержания теории с предикатом истины? При стандартной аксиоматизации композиционной теории, аксиома индукции, как и другие аксиомы PA, выполняют двойную функцию: с одной стороны, они являются частью теории, для которой формулируется теория истины, с другой же стороны, они используются как синтаксические аксиомы. Арифметика может играть эту двойственную роль только потому, что предложения языка L отождествляются с гёделевыми номерами. Только по этой причине доказательства о числах могут быть рассмотрены как доказательства о предложениях. Отождествление чисел с предложениями является в лучшем случае упрощением записи, но в неформальном метатеоретическом обсуждении теория синтаксиса и теория натуральных чисел должны разделяться: предложения не являются числами. Без такого различения математического и теоретико-истинного содержания теории слишком поспешно заключать о том, что, например, композиционная теория истины уже неконсервативна в отношении арифметики Пеано, так как в случае добавления к PA аксиомы индукции с предикатом истины не ясно, была ли добавлена синтаксическая или математическая аксиома.

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект №16-18-10359)