Симуляция натуральных и секвенциальных исчислений

Д.А. Кожемяченко, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
kodaniil@yandex.ru

Рассматривается пропозициональный язык L с константой ложности $\perp$, тремя бинарными связками $\&, \vee, \supset$ и одной унарной — $\neg$, бесконечным множеством пропозициональных переменных $p_1, p_2, \ldots$ и левой и правой круглыми скобками.

Определение 1. Натуральным исчислением в смысле Рекхау [10] и Пеллетье [9] называем исчисление, в котором разрешено вводить произвольные допущения и использовать теорему дедукции как правило.

Рассматриваются определенные в этом языке натуральные исчисления **NP**, **VPC**, **IPC**, и ND, а также секвенциальные исчисления PKT и PKT*, описанные соответственно в [1], [2], [4], [3] и [7]. Кроме того, рассматривается исчисление *nd*$\mathcal{F}$, описанное в [5].

Определение 2. Как и в [8], мы будем писать $f(n)=O(g(n))$ где f и g — функции, отображающие множество $N=\{0,1,2,\ldots\}$ в себя, если есть такие $c, n_0 \in N$, что $f(n) \leqslant c \cdot g(n)$ для любого $n \geqslant n_0$

Соглашение. Вслед за [10] мы при подсчете длины PKT- и PKT*-выводов будем считать одинаковые секвенции за одну, а при подсчете длины ND-выводов мы будем считать одинаковые формулы за одну, если выше них располагаются одни и те же допущения.

Определение 3. Как и в [5] мы будем говорить, что исчисление S симулирует исчисление T с ростом в длине $f(x)$, если для любого T -вывода длиной в k строк, существует S -доказательство той же самой формулы за $O(f(k))$ строк. Мы будем говорить о «линейной», «квадратичной», «полиномиальной» (или p-симуляции) и т.д. симуляции, когда рост в длине задается соответственно линейной, квадратичной, полиномиальной и т.д. функцией. Мы будем говорить об *оценке симуляции* исчислением S исчисления T, имея в виду установление роста в длине, с которым исчисление S симулирует исчисление T.

Индукцией по длине вывода доказывается следующая теорема

Теорема 1. *(1) Любое из исчислений* **VPC**, **IPC**, PKT*, ND *линейно симулирует любое другое из этого же списка. (2) Исчисления* **NP** *и nd*$\mathcal{F}$ *линейно симулируют друг друга. (3) Исчисления из списка (1) линейно симулируют исчисления из списка (2).*

Кроме того, можно доказать следующую теорему:

Теорема 2. *Исчисление PKT кубически симулирует любое из исчислений:* **VPC**, **IPC**, ND и PKT*, *и каждое из исчислений*: **VPC**, **IPC**, ND *и* PKT* *симулирует исчисление* PKT *линейно.*

Автор выражает свою благодарность Василию Олеговичу Шангину за возможность работать над темой и помощь в подготовке доклада.

Литература

1. Бочаров В.А., Маркин В.И. Введение в логику. — М.: ИД «ФОРУМ»: ИНФРА-М., 2008.
2. Войшвилло Е.К., Дегтярев М.Г. Логика — М.: ВЛАДОС-ПРЕСС, 2001.
3. Генцен Г. Исследование логических выводов / Пер. с нем. А.В. Идельсона // Математическая логика и основания математики. Математическая теория логического вывода / Под ре. А.В. Идельсона, Г.Е. Минца. — М.: «Наука», 1967. — С. 9–74
4. Ивлев Ю.В. Логика: учебник. М.: ТК Велби, Изд-во Проспект, 2008.

5. Buss S. R., Bonet M. L. The deduction rule and linear and near-linear proof simulations // The Journal of Symbolic Logic. — 1993. — Jun. — Vol. 58, no. 2. — P. 688–709.
6. Cook S.A., Reckhow R.A. The relative efficiency of propositional proof systems // The Journal of Symbolic Logic. — 1979. — Mar. — Vol. 44, no. 1. — P. 36–50.
7. Handbook of Proof Theory / Ed. by S. R. Buss. — 1st edition. — Amsterdam : Elsevier Science, 1998. — Vol. 137 of Studies in Logic and Foundations of Mathematic.
8. Papadimitriou C. H. Computational complexity. — NY : Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1995.
9. Pelletier F.J. A brief history of natural deduction // HISTORY AND PHILOSOPHY OF LOGIC. — 1999. — no. 20. — P. 1–31.
10. Reckhow R.A. On the lengths of proofs in the propositional calculus : Ph. D. thesis / Reckhow R.A.; University of Toronto. — 1976.