Логицизм и нео-логицизм: решение математических задач

П.И. Олейник, Национальный исследовательский Томский государственный университет
polina-grigorenko@mail.ru

Одним из новых направлений философии математики является нео-логицизм, апологеты которого (К. Райт [1] и Б. Хейл) стремятся переосмыслить логицизм Г. Фреге и построить на его основных постулатах новую программу философии математики. Нео- логицизм, программа создания разделов математики из принципов абстракции, и, в частности, обоснование арифметики на принципе Юма, в современной философии математики является одним из самых обсуждаемых проектов. Одним из дискуссионных вопросов является вопрос о том, насколько в действительности задачи этих двух философско-математических проектов совпадают. Мы будем отталкиваться от позиции по этому вопросу С. Шапиро в его работе «The Measure of Scottish Neo-Logicism» [2]. С. Шапиро анализирует программу нео-логицизма и обозначает различные критерии (или, как выражается С. Шапиро, мерные палочки (meter sticks)), которые он предлагает использовать для «измерения» программы. Р. Джешон [3. P. 939] обобщает различные цели, которые были приписаны Г. Фреге различными учеными и выделяет следующие доводы, которыми руководствовался Г. Фреге при построении программы логицизма: математические доводы (Mathematical Rationale); логико-картезианские доводы (Logico- Cartesian Rationale); доводы от знания источников (Knowledge-of-Sources Rationale); Евклидовы доводы (Euclidean rationale). Эти четыре довода и станут «мерными палочками» для измерения результатов нео-логицизма. Мы остановимся на рассмотрении математических доводов, согласно которым мотивы Г. Фреге являются математическими: он действительно хотел доказать некоторые теоремы. Он верил, что все, что может быть доказано, должно быть доказано, и он думал, что предложения арифметики, доселе недоказанные, могут быть доказаны, а значит, они должны быть доказаны. Г. Фреге пришел к пониманию того, что основные положения арифметики были доселе недоказанными, и он предложил то, что было, в сущности, первым доказательством этих предложений.

Аналогичным притязанием со стороны шотландского нео-логицизма является то, что при выводе аксиом Пеано-Дедекинда из принципа Юма (абстрактный принцип, согласно которому два понятия F и G имеют одно и то же кардинальное число, если они равночисленны, т.е. если имеется взаимно-однозначное соответствие между объектами, подпадающими под F и объектами, подпадающими под G). Проект нео-логицизма выводит математику из этого принципа). мы получаем, по сути, доказательства этих предложений. Однако существуют вопросы, касающиеся выполнения математических доводов. Дело в том, что мы не можем знать, удовлетворены ли математические доводы, пока мы не определили, что подразумевается под математикой (арифметикой), и какие доказательства будут считаться приемлемыми. Нам необходимо знать, что такое арифметика, и что нужно, чтобы доказать что-то в арифметике. Рассмотрим, например, утверждение S, что за каждым натуральным числом следует (непосредственно) другое натуральное число. Г. Фреге и сторонники нео- логицизма предоставляют действующий вывод, последняя строка которого имеет те же слова, что и предложение, которое выражает S. Вывод нео-логицизма имеет преимущество перед Г. Фреге в том, что, возможно, его посылки истинны. Но этого, конечно, не достаточно, чтобы представить доказательство.

Для Г. Фреге толкование принципа последовательности натуральных чисел S – это что-то вроде следующего:

Пусть x – объем понятия формы «равночисленен C», и предположим, что есть только конечное число объектов, подпадающих под C. То есть, что есть x' и понятие D такое, что (1) существует z такое, что Dz и C равночисленны понятию «подпадающие под D, но отличные от z», и (2) x' является объемом понятия «равночисленно D».

Это можно принять в качестве принципа последовательности натуральных чисел S только в том случае, если эксплицитные определения Г. Фреге верны. То есть, Г. Фреге обеспечивает доказательство принципа последовательности натуральных чисел, только если натуральные числа, о которых говорят математики и обычные люди, от античности и до 1884 года, по сути, – объемы, которыми их считает Г. Фреге. С. Шапиро пишет: «мне кажется, что нео-логицизм находится здесь в более выгодном положении. Не беря во внимание их концептуальный анализ, действительно кажется правдоподобным, что натуральные числа – это просто кардинальные числа конечных понятий» [2. P. 77]. Теорема Фреге (согласно которой аксиомы Пеано можно вывести в логике второго порядка из принципа Юма) включает вывод принципа последовательности натуральных чисел S из этой более или менее очевидной истины. И можно полагать это доказательством S.

Однако, Р. Дедекинд в некоторой степени сделал обратное тому, что предлагают Г. Фреге и представители нео-логицизма. Наряду со структуралистами он полагает структуру в качестве сущности натуральных чисел. Применение чисел добавляется позже, и соответствующая теорема – принцип Юма – тогда доказывается. Поэтому стороны расходятся во взглядах на математическое обоснование: одна сторона берет на себя доказательство S и других особенностей строения натурального ряда чисел из принципа Юма (плюс определения); другая берет на себя доказательство ограниченной версии принципа Юма из структуры (плюс определения). Вопрос в том, какое из них является реальным доказательством? Возможно, представители нео-логицизма могут рассуждать следующим образом: понимание арифметики мы получаем из принципа Юма, который имеет правильную структуру и это понимание приводит нас к стандартному применению (чисел). Так теория, основанная на принципе Юма, может играть ту роль, которую арифметика играет в нашей концептуальной схеме. В таком случае, возможно, не стоит рассматривать две эти позиции как конкурирующие (как предлагает сам С. Шапиро). И, заключает С. Шапиро, «кажется разумным, и не вызывает никаких споров, считать это как подпадающее под нечто в пределах математических доводов» [2. P. 78]. Таким образом, в рамках проекта предпринимается попытка решить поставленную Г. Фреге математическую задачу по установлению доказательства базовых предложений арифметики и эта попытка может считаться состоятельной. Вместе с тем, существует ряд трудностей в рамках проекта, без преодоления которых эта задача не может считаться полностью выполненной. Программа К. Райта и Б. Хейла находится в постоянном развитии, предлагая новые решения для проблем в рамках философии математики нео-логицизма.

Литература

1. Wright C. Frege's conception of numbers as objects. Aberdeen University Press, 1983. – 194 p.
2. Shapiro S. The Measure of Scottish Neo-Logicism // Logicism, Intuitionism, and Formalism, edited by Linström et al. Vol. 341. Springer Dordrecht; London, 2009. P. 69-90.
3. Jeshion R. Frege’s notions of self-evidence // Mind. № 110, 2001. P. 937–976.