О мощности множества предполных классов для произвольного замкнутого класса функций

Н. Н. Преловский, ИФРАН

mingkemingfeichangming@gmail.com

Речь пойдет о мощности множеств функциональных классов, содержащихся в замкнутых классах, соответствующих различным трехзначным логикам. Эта проблематика напрямую связана с такими хорошо освещенными в отечественной и зарубежной литературе вопросами, как критерии функциональной полноты и описание множеств предполных классов различных функциональных классов.

Приведем определения используемых понятий. Все рассматриваемые в дальнейшем функции определены на множестве $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ и принимают значения из него же. Если имеется система функций

$$\{f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_r(x_1, \ldots, x_n)\},$$

то суперпозицией функций данной системы называется либо функция полученная из уже имеющихся функций путем замены переменных, либо если установлено, что функции

$$f_j^i(x_{1_{ij}}, \ldots, x_{n_{ij}}), \ldots, f_m^k(x_{1_{km}}, \ldots, x_{n_{km}}),$$

а также функция $f_t^s(x_{j_{st}}, \ldots, x_{m_{st}})$ являются суперпозициями исходной системы, то и функция

$$f_t^s(f_j^i(x_{1_{ij}}, \ldots, x_{n_{ij}}), \ldots, f_m^k(x_{1_{km}}, \ldots, x_{n_{km}}))$$

также является суперпозицией функций данной системы.

Множество $[F]$ называется замыканием системы (класса) функций F, если оно содержит все суперпозиции функций над классом F и не содержит никаких других функций.

Систему функций называем базисом данного класса функций, если она эквивалентна этому классу, но никакая ее собственная подсистема не эквивалентна ему. Система функций G, эквивалентная классу F, называется (функционально) полной в этом классе. Система функций G, функционально полная в классе $F = P_k$, где P_k есть k-значная логика Поста, называется функционально полной.

Если G и F - замкнутые классы функций и $G \subset F$, но $F \not\subset G$, то G называется предполным в F, если и только если замыкание объединения класса G и функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ такой, что $f(x_1, \ldots, x_n) \in F$ и $f(x_1, \ldots, x_n) \notin G$, совпадает с F.

Далее будут рассмотрены примеры замкнутых классов, содержащих бесконечное множество предполных классов, а также не имеющих предполных классов.

Рассмотрим класс $M(S) \subset P_3$, не имеющий базиса. Об этом классе доказана следующая теорема.

Теорема 1. Класс $M(S) = [S]$, порожденный последовательностью функций

$$S = f_0, f_1(x_1), f_2(x_1, x_2), \dots$$

каждая из которых имеет вид:

$$f_0 \equiv 0;$$

$$f_i(x_1, \dots, x_i) = \begin{cases} 1 & \text{при } x_1 = \dots = x_i = \frac{1}{2}; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

не имеет предполных классов. □

Рассмотрим класс $M(S) \subset P_3$, имеющий счетный базис. Об этом классе доказана следующая теорема.

Теорема 2. Класс $M(S) = [S]$, порожденный последовательностью

$$S = f_2(x_1, x_2), f_3(x_1, x_2, x_3), \dots$$

функций $f_i(x_1, \dots, x_i)$, которые удовлетворяют определению:

$$f_i(x_1, \dots, x_i) = \begin{cases} 1 & \text{при } x_1 = \dots = x_{j-1} = x_{j+1} = \dots = x_i = \frac{1}{2}, \\ & x_j = 1 \ (1 \leq j \leq i); \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

содержит бесконечное множество предполных классов. □

Работа поддержана грантом РГНФ № 14-03-00341а.

Литература

1. Девяткин Л.Ю., Преловский Н.Н., Томова Н.Е. *В границах трехзначности.* М.: ИФ РАН, 2015.

2. Карпенко А.С. *Развитие многозначной логики.* М.: ЛКИ, 2010.

3. Яблонский С.В., Функциональные построения в k-значной логике. // *Труды математического института им. В.А. Стеклова*, 51, М., 1958. С. 5—142.