Интерпретация субъектно-предикатных суждений в множествах из неотрицательных целых чисел

Ю.М. Сметанин, Удмуртский государственный университет
gms1234gms@rambler.ru

Первый параграф. Рассматривается пропозициональная многозначная логика L_{s_2} с атомарными суждениями $\langle A(X,Y), Eq(X,Y), IO(X,Y), X \subset U, X = U \rangle$, где U −универсум, $X \cdot Y'$ −пересечение X и дополнения Y до универсума. Вместо X и Y можно подставить ППФ $F_1(\tilde{X}_n), F_2(\tilde{X}_n)$ алгебры множеств;

$$\mathrm{A}(X,Y) \equiv (X \subset Y) \cdot (X \subset U) \cdot (X' \subset U) \cdot (Y \subset U) \cdot (Y' \subset U)$$

$$Eq(X,Y) \equiv (X = Y) \cdot (X \subset U) \cdot (X' \subset U) \cdot (Y \subset U) \cdot (Y' \subset U);$$

$$IO(X,Y) \equiv (X \cdot Y \subset U) \cdot (X \cdot Y' \subset U) \cdot (X' \cdot Y \subset U) \cdot (X' \cdot Y' \subset U).$$

Посредством конъюнкции ($\cdot$), дизъюнкции ($+$) и отрицания ($'$) из атомов можно построить ППФ L_{s_2} двух типов — конъюнктивные и неконъюнктивные. Конъюнктивные ППФ являются конъюнкциями атомов. Неконъюнктивные ППФ в L_{s_2} могут быть приведены к дизъюнкции конъюнктивных. Область интерпретации ППФ построена из образов n-арных модельных схем [1] вида $M_S = \langle \Omega, \aleph_1, \aleph_2, ..., \aleph_n \rangle$, где Ω −универсум, $\aleph_i \subseteq \Omega$, $\tilde{\aleph}_n = \langle \aleph_1, \aleph_2, ..., \aleph_n, \rangle$. Число таких схем не более $2^{(2^n)} - 1$. Множество непустых конституент модельной схемы, назовем **характеристическим**. Бинарные схемы обозначим $G_1(\aleph_1, \aleph_2), ..., G_{15}(\aleph_1, \aleph_2)$. По единицам в двоичном изображении номера схемы восстанавливаются номера конституент, которые являются непустыми в данной схеме, и сама схема. Например, для G_{15}, $15_{(10)} = 1111_{(2)}$, поэтому $\aleph_1 \cdot \aleph_2 \neq \varnothing, \aleph_1 \cdot \aleph_2' \neq \varnothing, \aleph_1' \cdot \aleph_2 \neq \varnothing, \aleph_1' \cdot \aleph_2' \neq \varnothing$ и $G_{15} = IO(\aleph_1, \aleph_2)$. В схемах $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_{81}, G_{10}, G_{12}$ одно или оба модельных множеств либо совпадают с универсумом, либо пустые. В остальных схемах модельные множества непусты и неуниверсальны. При этом $G_9 = Eq(\aleph_1, \aleph_2)$ и $G_{13} = A(\aleph_1, \aleph_2)$. Одноодназначно сопоставим характеристическому множеству n-арной модельной схемы и самой модельной схеме универсум U и кортеж $\langle U, X_1, X_2, ..., X_n \rangle$, в котором все множества называются **конституентными** и составлены из номеров непустых конституент. Будем называть его **алгебраической онтологией** (А-онтологией)(смотри Рисунок 1).

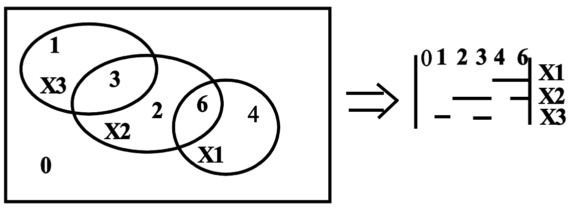

Рис. 1 Переход от диаграммы Венна для модельной схемы к А-онтологии I_{M_S}

А-онтология $I_{M_S} = \langle U = \{0,1,2,3,4,6\}, X_1 = \{4,6\}, X_2 = \{2,3,6\}, X_3 = \{1,3\} \rangle$, поэтому $M_S = \left\langle \Omega = \bigcup_{i \in \{0,1,2,3,4,6\}} K(i),\ \aleph_1 = \bigcup_{i \in \{4,6\}} K(i),\ \aleph_2 = \bigcup_{i \in \{2,3,6\}} K(i),\ \aleph_3 = \bigcup_{i \in \{1,3\}} K(i) \right\rangle$, где $K(i)$-конституента с номером i. Например, $K(4) = \aleph_1 \cdot \aleph_2' \cdot \aleph_3'$; $4_{(10)} = 100_2$. А-онтология $I = \langle U, X_1, X_2, ..., X_n \rangle$ называется канонической, если $U = \{0,1,...,2^n - 1\}$. То есть все конституенты соответствующей ей модельной схемы, непусты. А-онтология иллюстрирует неаристотелевское строение понятия [2]. Например, «Все тигры хищные млекопитающие, не живущие в воде и не приспособленные к жизни в условиях Крайнего Севера» — $A(T, X \cap M \cap B' \cap C')$ (смотри Рисунок 2). Достоинством так устроенного понятия является то, что оно содержит контекст (хотя и ограниченный), ему можно сопоставить алгоритм вычисления объема по логическому содержанию. Контекст можно изменять.

```
U =     0 1 2 3 4 5 6 7 8 910111213141528
X1 = |==============================██|T-тигры
X2 = |================████████████████|X-хищники
X3 = |========████████========████████|M-млекопитающие
X4 = |====████====████====████====████==|B-живут в воде
X5 = |==██==██==██==██==██==██==██==██==|C-живут на крайнем Севере
BIN= {A(T,X), A(T,M), A(T,B^), A(T,C^), IO(X,M),IO(X,B),IO(X,C),
IO(M,B), IO(M,C) IO(B,C)}
```

Рис. 2 А-онтология для суждения $A(T, X \cap M \cap B' \cap C')$

Второй параграф. Введено новое понятие — **непарадоксальное логическое следование в семантическом смысле** (НЛССС). Построено **исчисление конституентных множеств**. Формализовано понятие **логического содержания А-онтологии** в виде конъюнктивной ППФ логики L_{s_2} и построен алгоритм получения универсума U А-онтологии по конъюнктивной ППФ, этот универсум назван **семантическим значением ППФ.** Построен алгоритм вычисления семантического значения, в виде семейства конституентных множеств, для неконъюнктивной ППФ. Определено понятие закона, противоречия и выполнимой ППФ. Формализовано понятие непарадоксального логического следования в семантическом смысле (НЛССС— $\models_N$). Доказана функциональная полнота атомов логики L_{s_2}, посредством которых можно выразить любую модельную схему. Поэтому набор этих атомов—**новый базис силлогистики.** Для выполнимых конъюнктивных ППФ справедлива

Теорема Если логическое содержание $\mathbb{Q}_1(\tilde{X}_n)$ содержит логическое содержание $\mathbb{Q}_2(\tilde{X}_n)$, то имеет место равносильность $\mathbb{Q}_1(\tilde{X}_n) \models_N \mathbb{Q}_2(\tilde{X}_n) \equiv U_{\mathbb{Q}_1} \subseteq U_{\mathbb{Q}_2}$. Причем, $U_{\mathbb{Q}_1} = U_{\mathbb{Q}_2}$ имеет место ,только если $\mathbb{Q}_1(\tilde{X}_n) \models_N \mathbb{Q}_2(\tilde{X}_n)$ и $\mathbb{Q}_2(\tilde{X}_n) \models_N \mathbb{Q}_1(\tilde{X}_n)$.

Теорема позволяет алгоритмически проверять НЛССС между неконъюнктивными ППФ, посредством сравнения их семантических значений.

В работе развивается подход П. С. Порецкого из [3]. В качестве ППФ в своей, явно не сформулированной силлогистике, Порецкий использовал конъюнкции утверждений трех типов $F_1(\tilde{\aleph}_n) \subseteq F_2(\tilde{\aleph}_n)$, $F_1(\tilde{\aleph}_n) \subseteq F_2(\tilde{\aleph}_n)'$, $K(\mathrm{i}) = \varnothing$; первые два соответствуют категорическим сужениям Аристотеля — $F_1(\tilde{\aleph}_n)\, \boldsymbol{a}\, F_2(\tilde{\aleph}_n)$ и $F_1(\tilde{\aleph}_n)\, \boldsymbol{e}\, F_2(\tilde{\aleph}_n)$ [1], а третье утверждает пустоту конституенты с номером i.

Полученные результаты позволяют строить и рассчитывать логико-семантические модели для решения прикладных задач, заменяя логический вывод верификацией НЛССС, которая сводится к проверке отношения включения конституентных множеств. Алгоритм проверки обладает высоким уровнем параллелизма.

Литература

1. Бочаров В. А., Маркин В. И. Силлогистические теории.— М.: Прогресс-Традиция, 2010. — 336 с.
2. Финн В.К. О неаристотелевском строении понятий // логические исследования 2015. Вып. 21(1). С. 9-48.
3. Порецкий П. С. О способах решения логических равенств и об одном обратном способе математической логики. // Собрание протоколов заседаний секции физико-математических наук общества естествоиспытателей при Казанском университете.— т. 2.—XXIV.—Казань,1884—170 с.