Гиперкомплексная теория истины самореферентных предложений для (¬, ↔)-языка.

В.А.Степанов, Вычислительный центр им. А.А.Дородницына ФИЦ ИУ РАН
vlast@ccas.ru

1.Двоичная динамическая модель самореферентных предложений.

Парадокс Лжеца, формулируемый в естественном языке, можно адекватно смоделировать в семантически замкнутом языке с переменными по формулам: x, y, z, и предикатом истинности Tr(x) с аксиомой Тарского:

$$Tr(x) \leftrightarrow x.$$

Присутствующую в естественном языке самореферентность, в нашем языке будем отмечать явно квантором самореферентности **S**x, приписываемым слева к ядру самореферентной формулы. Сам квантор **S**x вводится с помощью аксиомы самореферентности, являющуюся в нашем языке аналогом Аксиомы о неподвижной точке:

$$SxP(x) \leftrightarrow P(SxP(x)).$$

Для анализа рассматриваемых предложений привлечем исследования Пирса, который моделировал их бесконечными конструкциями, результат которых в нашем языке выглядит следующим образом:

$$SxP(x) \leftrightarrow P(P(P(P...(SxP(x))...)))). \qquad (*)$$

Эта формула выражает результат возможной бесконечной подстановки самореферентной формулы в саму себя. Для оценки бесконечной формулы (*) привлечем пошаговую оценку последовательности конечных формул, получаемых на каждом этапе итерационной процедуры в последовательности Пирса:

$$\begin{aligned} SxP(x) &\leftrightarrow P(SxP(x)) \\ &\leftrightarrow P(P(SxP(x))) \\ &\leftrightarrow P(P(P(SxP(x)))) \\ &\leftrightarrow .... \end{aligned}$$

На основании этого предложена динамическая интерпретация атомарных самореферентных формул SxP(x), приписывающая каждой такой формуле динамическую систему ({0,1}, p(x)) с орбитами < $p^n(x)$, $n \in Z^+$ >. Для полного набора связок сформирована логическая матрица 16-значной логики $\mathbf{M_{16}^c = (M_2^c)^4}$.

2.Восьмизначная логика самореферентных предложений.

В рассматриваемом нами (¬, ↔)-фрагменте языка логическая матрица $\mathbf{M_8^c}$ очевидно является подматрицей для $\mathbf{M_{16}^c}$ и будет выглядеть более скромно:

$$\begin{aligned} M_8^c &= <\{11/11,\ 01/10,\ 11/00,\ 01/01,\ 10/10,\ 00/11,\ 01/10,\ 00/00\}, \neg, \leftrightarrow, \{11/11\}> \\ &= <\{\ T,\quad A,\quad V,\quad K,\quad \sim K,\quad \sim V,\quad \sim A,\quad \sim T\ \}, \sim, \leftrightarrow, \{\ T\ \}\ >. \end{aligned}$$

Буквы здесь означают следующее: T – Truth, V – TruthTeller, A – Liar, K=V↔A – еще одна оценка самореферентного предложения, которую назовем просто: K.

Наблюдение: Положительные истинностные значения организованы как Четверная группа Клейна. Таблица Кэли этой группы представлена на рисунке ниже. Элементы таблицы обладают свойством, которое напоминает свойство векторного произведения: если возьмем два каких-нибудь разных элемента таблицы, не являющихся единицами группы, например, **K↔A**, то мы получаем третий элемент, **V**. Подобное обстоятельство наталкивает на мысль выдвинуть следующую

↔	**T**	**V**	**A**	**K**
T	**T**	**V**	**A**	**K**
V	**V**	**T**	**K**	**A**
A	**A**	**K**	**T**	**V**
K	**K**	**A**	**V**	**T**

Гипотезу гиперкомплексности [1, 3]:

Истинностные значения самореферентных предложений организованы как орты в четырехмерном векторном пространстве и описываются гиперкомплексными числами вида:

$$\mathbf{D} = a_0\mathbf{T} + a_1\mathbf{V} + a_2\mathbf{A} + a_3\mathbf{K}$$

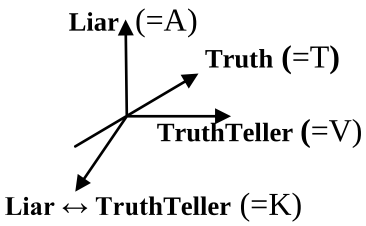
Здесь a_0–a_3 принимают значения 1, ~, 0. При определении произведения двух гиперкомплексных чисел **P** и **Q** (которое в нашем случае есть функция эквивалентности: **P ↔ Q),** в качестве таблицы умножения используем расположенную справа Таблицу Кэли четверной группы Клейна, расширенную для учета операций с отрицанием **~.**

3.Приложение к наивной теории множеств [2].

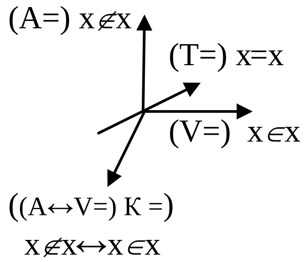
Введем в язык символы принадлежности: ∈, и равенства: =, (и λ - это для удобства). Пусть **R**=λx.(x∉x), **P**=λx.(x∈x). Составим из них такие высказывания:

$$x{=}x\ (=\mathbf{T}),\quad \mathbf{P}\in\mathbf{P}\ (=\mathbf{V}),\quad \mathbf{R}\notin\mathbf{R}\ (=\mathbf{A}),\quad \mathbf{R}\notin\mathbf{R} \leftrightarrow \mathbf{P}\in\mathbf{P}\ (=\mathbf{K}).$$

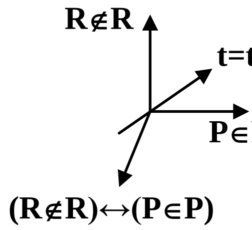
Результаты описанных преобразований проиллюстрируем следующими фигурами:



Расположение оценок самореферентных предложений в четырехмерном гипер-комплексном пространстве



Курсивом выделены F(x)-*ядра соответствующих самореферентных множеств*



То же в терминах самореферентных множеств

Коль скоро мы нашли место для самореферентных предложений, являющихся камнем преткновения для большинства систем теории множеств, сформулируем Аксиому свертывания, не прибегая к обычным в таких случаях ограничениям:

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow F(x)).$$

Литература

1. Кантор Н.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1978.
2. Priest G. The Structure of the Paradoxes of Self-reference.// Mind. Vol. 103, 1994.
3. Stepanov V. Truth theory for logic of self-reference statements as a quaternion structure // St.Petersburg, Proc. of Intern. Scientific Conf., 2014, 225-230
4. Stepanov V. Truth theory for logic of self-reference statements as a hypercomplex structure //Third St.Petersburg Days of LOGIC and COMPUTABILITY, 2015, 23-24