Обобщенный нестандартный анализ и семантический подход к исследованию типов формальной логики.

А.В.Титов, МГУ ПС (МИИТ), МГТУ им. Баумана.
a.v.titov@mail.ru

Рассматривается развитие семантического подхода к исследованию взаимосвязи различных типов логических исчислений, в основе которого лежит исследование структур значений оценки [1].

В математической и символической логике логики представлены как алгебры формул и для их исследования используется математический аппарат [2,3]. Однако исследование формальной логики связано с исследованием, не только свойств соответствующей алгебры логики, но и с тем какие значения истинности принимают формулы алгебры логики в результате проведенных с ними операций. Иными словами исследуются свойства оценки как морфизма из алгебры логики в алгебру, на которой принимают значения оценки. Кроме того, операции на алгебре формул и алгебре значений должны быть согласованы ввиду того, что оценка F(a1, a2,..,an) зависит от значений оценок формул a1, a2,..,an.

В основе семантического подхода к исследованию взаимосвязи типов формального логического исчисления, лежит тот факт, что логическое исчисление может быть представлено как универсальная алгебра формул общего вида, и то, что свойства этой алгебры согласованы со свойствами структуры, на которой принимает значение оценка.

И нестандартный анализ в категорной фроме, в которой стрелки сохраняют структуру «предметов», являющихся их началом и концом может оказаться эффективным инструментом исследования типов формальной логики.

В работе [2] А.В.Любецкий определяет обобщенный нестандартный анализ как «алгебро-логический метод, основанный на рассмотрении оценок и в основном применяемый для изучения объектов, представимых в виде **глобальных элементов некоторого пучка**.».

. В докладе отстаивается точка зрения, согласно которой этот метод эффективен при изучении типов формальной логики и позволяет рассматривать взаимосвязь между различными типами логики на основе исследования взаимосвязи порождающих их структур, на которых принимает значение оценка.

Непосредственное представление об истинности сводится к тому, что, суждение «А есть В» считается истинным лишь тогда, когда это суждение выполняется для всех элементов из А, т.е.в случае, когда в качестве значений оценки рассматривается система подмножеств Р(А) некоторого множества А. При этом принимается возможным существование только двух мер истинности – 0 и 1, причем только само А имеет меру 1. Кроме того, если А есть бесконечное множество, то и разность A/N, где N – любое конечное множество, при таком задании меры имеет меру ноль.

«Оцениванием (оценкой) в данном языке для фиксированной решетки X называется сопоставление каждой формуле ϕ элемента из X, обозначаемого $\|\phi_k\|_X$ или, короче $\|\phi_k\|$, причем логические связки языка моделируются операциями в решетке X. Последнее означает, что: $\|\phi\wedge\psi\| = \|\phi\| \wedge \|\psi\|$, $\|\phi\vee\psi\| = \|\phi\| \vee \|\psi\|$, $\|\phi\rightarrow\psi\| = \|\phi\| \rightarrow \|\psi\|$, $\|\neg\phi\| = \neg\|\phi\|$» [2].

При этом X рассматривается как импликативная решетка общего вида. Уже в этом случае, анализируя разные типы оценок, можно проследить то, как количественные изменения и сопоставляемая им мера определяют качественный тип логики, зафиксированный в системе аксиом логического исчисления.

В частности, в нестанданртном анализе рассматривается множество - степень K^I, где K- структура, а формулы –суждения о свойствах данной структуры. Оценка принимает значения на P(I), выбор в качестве j ультрафильтра в P(I) позволяет заменить $Tr_j\ (\phi_k)$ ($Tr_j(\phi_k) \equiv \|\phi_k\| \in j$) [2]) «обычной» истинностью суждения ϕ_k о структуре K^I. Поскольку для ультрапроизведений $K^I|j \equiv K^I|\sim_j$, имеем $\phi_{k|j}([f_1], [f_2],\ldots[f_n]) \Leftrightarrow ([\phi_k(f_1, f_2,\ldots,f_n)] \in j)$, где $[f_i] \in K^I|j$. Как показано в [3] это фактор – множество содержит два элемента. Это обеспечивает эквивалентность обеих семантик.

В [4] приводится вариант логики с двумя типами отрицания - Н-В логики.

В работе [5] показано, что аксиомы этого исчисления полностью соответствуют утверждениям о свойствах импликативной решетки общего типа и при условии сохранения оценкой структуры индуцированы оценкой на такой решетке.

На категорном языке модели, которые рассматриваются классической теорией, являются функторами из категории, соответствующей некоторой теории в категорию всех множеств. Рассматривая какую-либо другую категорию, обладающую дополнительной структурой, получим неклассическую теорию. Тип полученной теории будет индуцироваться заданной категорией и ограничениями, наложенными на функтор (его задаваемыми свойствами).

При таком подходе «логики» как вид исследования структур представляют собой семейство функторов из категорий, соответствующих формальным теориям в категории структур, на которых принимает значение оценка. Иными словами в категорном подходе ***оценка есть функтор, сохраняющий дополнительную структуру***. При таком подходе вид логики будет определяться типом функтора и, следовательно, минимальные логики будут представлять собой семейство, определяемое семейством баз, предбаз, образующих и т.д. структур значений оценки. Нельзя исключать и того, что сюда войдут функторы как гладкие отображения многообразий, поскольку в обиход уже введен термин «локальная истинность», в частности в [6] рассматривается язык PL, в который включена новая связка ∇ и если α формула этого языка, то формула $\nabla\alpha$ читается «локально имеет место, что α».

Введение в теории категорий классификатора подобъектов Ω, и связанная с этим понятием Ω -аксиома, порождает утверждение, о том, что в категории, обладающей классификатором подобъектов Sub (d) $\cong$ ***K*** (d,Ω). В частности, в качестве ***K*** можно взять категорию, соответствующую формальной теории (в частности алгебру формул логического исчисления), в качестве Ω - структуру, на которой принимает значение оценка. В [3] доказано, что утверждение о том, что топос ***K*** булев, эквивалентно утверждению о том, что Sub Ω - булева алгебра. Этим определяются и ограничения на свойства функции $\chi(f){:}d \rightarrow \Omega$ – она должна сохранять структуру. В частности подтверждается предположение о том, что структура оценки для булевой алгебры формул должна быть булевой алгеброй, что не всегда учитывается в многозначных логиках.

Литература.

1. А.В.Титов.Семантический подход к анализу логических исчислений**//** «Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке» Материалы XI Международной научной конференции, 26-28 июня 2010 г. Санкт-Петербургский государственный университет. 2010, сс. 376-380.

2. В.А.Любецкий. Оценки и пучки. О некоторых вопросах нестандартного анализа// УМН, том 44, выпуск 4(269), сс. 99-153.

3. Е.Рассева, Р.Сикорский. Математика метаматематики. -М.: «Наука», 1972,- 591 с.

4. Васюков В.Л. «Категорная логика».-М.: АНО Институт логики. 2005,- 194 с.

5. А.В.Титов. Диалектика в развитии типов логических исчислений на основе структур значений оценки//Доказательство очевидность, достоверность и убедительность в математике. Труды Московского семиеара по философии математики/ Под ред. В.А.Божанова, А.Н.Кричевца, В.А.Шапошникова –М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014, - 432с.

6. Р.Гольдблатт. Топосы. Категорный анализ логики. М.»Мир» 1983. 486 с.