Д. Буэно-Солер, В. Карниелли[1]

КОРРЕКТНОЕ ВЕРОЯТНОСТНОЕ РАССУЖДЕНИЕ ПРИ ПРОТИВОРЕЧИИ, НЕКОНСИСТЕНТНОСТИ И НЕПОЛНОТЕ[2*]

Резюме: Мы намерены показать, каким образом теория вероятностей может считаться зависимой от логики, рассматривая теорию вероятности как ветвь логики в ее обобщенном понимании. Своего рода мета-аксиоматика позволяет определять вероятностные меры, которые являются классическими, параконсистентными, интуиционистскими или интуиционистскими и параконсистентными одновременно, просто параметризируя отношения следования. В частности, мы обсуждаем те теории вероятностей, которые выстроены на основе параконсистентной логики формального противоречия **Ci** и на основе логики свидетельства и истинности **LETj**. Логика **Ci** естественным образом формализует расширение понятия вероятности, способное выразить вероятностные рассуждения в условиях избытка информации (противоречий), в то время как **LETj** формализует расширение понятия вероятности, способное выразить вероятностный способ рассуждения в условиях недостатка информации (неполноты), и, таким образом, связана с понятием вероятности свидетельства. Будет показано, как интересное нестандартное байесовское обновление может быть определено в обоих случаях и далее расширено до трехзначной параконсистентной логики **LFI1**. Мы обсудим также то, как теория вероятностей, выстроенная на неклассических логиках, может быть непосредственно расширена за счет мер необходимости и возможности, и перечисляем некоторые открытые проблемы.
Ключевые слова: параконсистентность, вероятностные меры, меры необходимости и возможности, противоречие, консистентность, логика формальной неконсистентности.

---

[1] Juliana Bueno-Soler, Faculty of Technology, State University of Campinas, Limeira, SP, Brazil.

Жулиана Буэно-Солер, Факультет технологии, Государственный университет Кампинас, Лимейра, Сан-Паулу, Бразилия. Walter Carnielli, Centre for Logic, Epistemology and the History of Science and Department of Philosophy, State University of Campinas, Campinas, SP, Brazil.

Вальтер Карниелли, Центр логики, эпистемологии и истории науки, Кафедра философии, Государственный университет Кампинас, Кампинас, Сан-Паулу, Бразилия.

[2] Исследование поддержано FAPESP Thematic Project LogCons 2010/51038-0, Бразилия, и исследовательским грантом Национального совета по научному и технологическому развитию (CNPq), Бразилия.

[*] Перевод с английского языка А. А. Хамидова под редакцией Д. Б. Тискина.

Juliana Bueno-Soler, Walter Carnielli

SOUND PROBABILISTIC REASONING UNDER CONTRADICTION, INCONSISTENCY AND INCOMPLETENESS

Resume: We intend to show how probability theory can be regarded as logic-dependent, viewing probability as a branch of logic in a generalized way. A kind of meta-axiomatics permits us to define probability measures that are either classical, paraconsistent, intuitionistic, or simultaneously intuitionistic and paraconsistent, just by parameterizing on consequence relations. In particular, we discuss theories of probability built upon the paraconsistent Logic of Formal Inconsistency **Ci**, and upon the paraconsistent and paracomplete Logic of Evidence and Truth **LETj**. The logic **Ci** naturally encodes an extension of the notion of probability able to express probabilistic reasoning under an excess of information (contradictions), while **LETj** encodes an extension of the notion of probability able to express probabilistic reasoning under lack of information (incompleteness), and is thus connected to the notion of probability of evidence. We show how interesting nonstandard Bayesian updating can be defined in both cases, and further generalized to the three-valued paraconsistent logic **LFI1**. We also discuss how probability theory over non-classical logics can be immediately extended to necessity and possibility measures, and list some open problems.
Keywords: paraconsistency, probability measures, possibility and necessity measures, contradiction, consistency, logics of formal inconsistency.

1. Консистентность vs. непротиворечивость

Параконсистентность — исследование логических систем, содержащих отрицание $\neg$, такое, что не всякое противоречие вида p и $\neg p$ влечет все, что угодно. Другими словами, параконсистентная логика не страдает от тривиализации в том смысле, что противоречие не эксплодирует с необходимостью и не тривиализует дедуктивный аппарат системы. Строго говоря, даже не относящееся к делу противоречие вынуждает рассуждающего, следующего такой логике, вывести все что угодно из противоречия $\alpha, \neg\alpha$ посредством так называемого принципа эксплозивности:

(PEx) $\alpha, \neg\alpha \vdash \beta$, для произвольно взятой β,

в то время как параконсистентный логик, использующий более осмотрительный способ рассуждения, был бы свободен от бремени (PEx). Действительно, параконсистентный способ рассуждения терпим к противоречиям и позволяет рассуждающему приостановить поиск источника противоречий, вместо того чтобы упрямо выводить из них нежелательные следствия.

Здравый смысл, однако, признает, что некоторые противоречия могут оказаться действительно недопустимыми и разрушили бы сам акт рассуждения (то есть привели бы к тривиализации). Это равносильно признанию того, что не все противоречия эквивалентны. Логики формальной неконсистентности (LFIs) — это семейство параконсистентных логик, которое реализует такую интуицию. Логики LFIs предназначены для того, чтобы выразить понятие консистентности (а также неконсистентности) внутри объектного языка при помощи связки $\circ$ (запись $\circ\alpha$ читается: «α консистентно»).

Отличительной чертой LFIs является то, что принцип эксплозивности не выполняется в общем случае: этот принцип не отбрасывается в целом, но ограничивается консистентными предложениями. Поэтому теория противоречия может быть нетривиальной, за исключением случаев, когда противоречие отсылает к чему-либо консистентному.

Эта отличительная черта (LFIs) сжато может быть выражена в следующем принципе, который известен как «принцип мягкой эксплозивности»:

(PGE) $\circ\alpha, \alpha, \neg\alpha \vdash \beta$ для любого β, хотя $\alpha, \neg\alpha \nvdash \beta$ для некоторых β.

Некоторые философы уже признают, что ошибочно полагать, будто неконсистентность — то же самое, что противоречие (например, [Williams 1981: 600–602]). LFIs полностью формализуют эту интуицию, и с этой точки зрения можно построить некоторое число логических систем с различными допущениями, которые не только формализуют классический способ рассуждения, но и (ценой введения новых принципов) сводятся к классической логике. Эта работа начинается с одной логики, наделенной подходящими принципами, чтобы иметь дело с параконсистентными вероятностными мерами, не упуская из виду, однако, того обстоятельства, что другие логики могли бы дать начало специальным (более сильным или более слабым) понятиям параконсистентных вероятностных мер.

2. **Ci**, логика формальной неконсистентности

Рассмотрим следующий набор пропозициональных аксиом и правил:

Определение 2.1. Пусть Σ — пропозициональная сигнатура. Логика **Ci** (над Σ) задается следующим гильбертовским исчислением:

Схемы аксиом

Ax1. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
Ax2. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$
Ax3. $\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$
Ax4. $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$
Ax5. $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$
Ax6. $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$
Ax7. $\beta \to (\alpha \vee \beta)$
Ax8. $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))$
Ax9. $\alpha \vee (\alpha \to \beta)$
Ax10. $\alpha \vee \neg\alpha$
Ax11. $\circ\alpha \to (\alpha \to (\neg\alpha \to \beta))$
Ax12. $\neg\neg\alpha \to \alpha$
Ax13. $\alpha \to \neg\neg\alpha$
Ax14. $\neg\circ\alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha)$

Правило вывода:

1. *Modus Ponens:* $\alpha, \alpha \to \beta \,/\, \beta$

Как подробно исследовано в [Carnielli, Coniglio, Podiacki, Rodrgues 2015], **Ci** может быть расширено до первопорядковой логики **QCi** (над соответствующим расширением Σ) добавлением удобных аксиом и правил. Стоит отметить, что **Ax1–Ax9** вместе с **MP** определяют гильбертовское исчисление для позитивной пропозициональной классической логики (см. [Carnielli, Coniglio, Marcos 2007]), поэтому все законы, относящиеся к позитивной логике (такие как дистрибутивность $\wedge$ относительно $\vee$ и т. д.), будут действовать.

Полезно в качестве примера продемонстрировать полезные свойства дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции, которая выполняется ничуть не хуже, чем и в классической логике (это неудивительно, поскольку позитивная классическая логика включена в нашу параконсистентную логику). Впрочем, так как выполнимость таких правил может вызвать некоторые сомнения, для них приводится набросок доказательства (где $\alpha \equiv \beta$ означает $\alpha \equiv \beta$ $\alpha \vdash_{\mathrm{Ci}} \beta$ и $\beta \vdash_{\mathrm{Ci}} \alpha$):

Теорема 2.2.
1. $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$
2. $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$

Доказательство. Простое доказательство из аксиом оставляем читателю.

Как доказано в [Carnielli, Coniglio, Marcos 2007], логика **Ci** не может быть семантически охарактеризована финитными матрицами, но может быть охарактеризована через означивания над $\{0,1\}$, или *двузначности*. Как было также показано в [Carnielli, Coniglio, Marcos 2007], сильное (классическое) отрицание может быть определено в **Ci** как $\sim_\beta\alpha = \alpha \rightarrow \bot_\beta$, где $\bot_\beta = (\beta \wedge (\neg\beta \wedge \circ\beta))$ — формула — нижний элемент[3] для любого предложения β. Для того чтобы упростить дело, выберем одну привилегированную β, а нижний индекс в $\bot_\beta$ и $\sim_\beta$ будем в дальнейшем опускать.

Теорема 2.3. (Свойства сильного отрицания). *Сильное отрицание $\sim$ в* **Ci** *удовлетворяет всем ожидаемым свойствам классического отрицания.*

Доказательство. Все доказательства представлены в [Carnielli, Coniglio, Marcos 2007].

Так, например, имеет место следующее, где $\vdash$ означает отношение выводимости в **Ci**: $\vdash\sim\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \psi)$ для любого α и ψ; $\vdash \alpha \vee \sim\alpha$; $\vdash \alpha \rightarrow \sim\sim\alpha$; $\vdash \sim\sim\alpha \rightarrow \alpha$, и $\vdash \bot \rightarrow \alpha$.

Кроме того, в **Ci** могут быть доказаны некоторые метатеоремы, например метатеорема о дедукции.

Если теперь определить неконсистентность α как $\bullet\alpha := \neg\alpha$, аксиомы (12) и (13) (которая позволяет вводить и удалять двойное отрицание) означают, что «α не неконсистентно т. т. т., когда оно консистентно». Разумеется, по определению и тем же аксиомам о двойном отрицании также имеет место, что «α не консистентно т. т. т., когда оно неконсистентно».

Некоторые другие релевантные результаты для **Ci** перечислены ниже.

Теорема 2.4. **(**[Carnielli, Coniglio, Marcos 2007]**)**
1. $\circ\alpha \vdash \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$*, но обратное неверно*
2. $\circ\alpha \vdash \neg(\neg\alpha \wedge \alpha)$*, но обратное неверно*

[3] То есть: $\bot_\beta \vdash \psi$ *для любого* ψ.

3. $\vdash \circ\circ\alpha$ $\qquad \vdash \circ\bullet\alpha$
4. $\vdash \neg\bullet\circ\alpha$ $\qquad \vdash \neg\bullet\bullet\alpha$
5. $\vdash \circ\alpha \vee \alpha$ $\qquad \vdash\circ\, \alpha \vee \neg\alpha$
6. $\vdash\circ\alpha \vee \alpha \wedge \neg\alpha$ $\qquad \alpha \vdash \alpha \wedge (\beta \vee \neg\beta)$
7. $\alpha \wedge (\beta \vee \neg\beta) \vdash \alpha$

Теорема 2.5. ([Carnielli, Coniglio, Marcos 2007]) *Следующие формулы являются нижними элементами в* **Ci**:

1. $\alpha \wedge \neg\alpha \wedge \circ\alpha \vdash \beta$, *для любого* β
2. $\circ\alpha \wedge \bullet\alpha \vdash \beta$, *для любого* β
3. $\circ\alpha \wedge \neg\circ\alpha \vdash \beta$, *для любого* β
4. $\bullet\alpha \wedge \neg\bullet\alpha \vdash \beta$, *для любого* β

3. Консистентность, неконсистентность и параконсистентная вероятность

Как уже было вкратце упомянуто в предыдущем разделе, формальное понятие консистентности, о котором здесь идет речь, не зависит от отрицания, и логическая машинерия LFIs показывает, что консистентность можно трактовать как исходное понятие, чье значение можно понимать как «окончательно установлено как истинное (ложное)» внелогическими средствами, зависящими от предмета обсуждения. Консистентность в этом смысле — понятие, не зависящее от теоретико-модельного и теоретико-доказательных средств, и оказывается гораздо ближе к идее регулярности или чего-то противоположного изменению (более глубоко эта точка зрения рассматривается в [Bueno-Soler, Carnielli 2015]).

Здесь мы намереваемся представить новый способ определять теории вероятностей, основанные на некоторых неклассических логиках. Предыдущий подход разрабатывался в [Mares 1997], где обсуждались разновидности параконсистентного байесианства, основанного на четырехзначной параконсистентной логике. Еще более ранняя попытка кратко набросана в [Priest 1987]. Совершенно иной взгляд изложен в [Roberts 2000: 233–254], где дается вероятностная семантика для пары многозначных параконсистентных логик. Наше изложение в том, что касается вопросов вероятностей при неклассических логиках, следует [Bueno-Soler, Carnielli 2016].

Вероятностные функции обычно определяются для σ-алгебры подмножеств данного универсального множества Ω, но так же естественно определять вероятностные функции непосредственно для предложений объектного языка. Они называются, соответственно, *вероятности по множествам и вероятности по предложениям.*

Хотя оба подхода равнозначны в классической логике в соответствии с теоремами о представлении пропозициональной логики и другими свойствами булевых алгебр, для вероятности, основанной на других логиках, это не так, поскольку родство алгебр может быть утеряно для неклассических логик или же оказаться не столь непосредственным. Кроме того, вероятностные функции в теоретико-множественном подходе требуют выполнения условия счетной аддитивности, но, поскольку пропозициональный язык компактен, для вероятности по предложениям достаточно потребовать конечной аддитивности.

Определение 3.1. *Вероятностная функция для языка* $\mathcal{L}$ *логики* **L***, или функция* **L***-вероятности, — это функция* $P\colon \mathcal{L} \mapsto \mathbb{R}$*, удовлетворяющая следующим условиям, где* $\vdash_L$ *означает синтаксическое отношение выводимости* **L**:

1. *Неотрицательность:* $0 \leq P(\varphi) \leq 1$ *для всех* $\varphi \in \mathcal{L}$
2. *Тавтологичность:* *Если* $\vdash \varphi$*, то* $P(\varphi) = 1$
3. *Анти-тавтологичность:* *Если* $\varphi \vdash_L$*, то* $P(\varphi) = 0$
4. *Сравнение:* *Если* $\psi \vdash \varphi$*, то* $P(\psi) \leq P(\varphi)$
5. *Конечная аддитивность:* $P(\varphi \vee \psi) = P(\varphi) + P(\psi) - P(\varphi \wedge \psi)$

Значение таких (мета)аксиом, вдохновленных [Weatherson 2003: 111–123], можно прояснить, если заметить, что неотрицательность и конечная аддитивность — не зависимые от логики аксиомы, в то время как тавтологичность и антитавтологичность, так же как и сравнение, — зависимые от логики аксиомы. Опираясь на такое понимание, можно дать следующее определение:

Определение 3.2. *Классическая, интуиционистская, параконсистентная и основанная на свидетельствах вероятность:*

- *Если* **L** *есть* **CL***, то* **L***-вероятность является классической вероятностной функцией.*
- *Если* **L** *есть* **LJ***, то* **L***-вероятность является интуиционистской вероятностной функцией.*
- *Если* **L** *есть* **Ci***, то* **L***-вероятность является параконсистентной вероятностной функцией.*
- *Если* **L** *есть* **LETj** *(объясняется ниже), то* **L***-вероятность является основанной на свидетельстве вероятностной функцией.*

В наивной формулировке два события α и β называются *независимыми,* если $\text{P}(\alpha \vee \beta) = P(\alpha)\ P(\beta)$. Два события могут быть не зависимы относительно одной вероятностной меры и зависимы относительно другой.

Поскольку здесь это нерелевантно, мы не станем отказываться от наивной формулировки. Стоит, однако, иметь в виду, что понятие независимых событий имеет куда более глубокую мотивацию. В [Mundici 2016] было доказано, что понятие когерентности по де Финетти сохраняется при взятии произведений когерентных ставок на двух множествах независимых событий. Этот результат обосновывает правило, согласно которому вероятность конъюнкции двух независимых событий есть произведение вероятностей при условии, что игры некоторого типа когерентны. Таким образом, единственной возможностью избежать голландской ставки против заключающего пари или букмекера в когерентной игре будет опираться, для стандартных вероятностных мер, на правило для вероятности произведения. В случае же неклассических вероятностей вопрос совершенно неясен, и единственный выход (насколько нам известно) — это придерживаться наивной формулировки. Серьезная открытая проблема — получение результатов Д. Мундичи [Mundici 2016] для других логик или показать, что это невозможно.

Некоторые непосредственные следствия аксиом таковы:

Теорема 3.3.
1. *Если* δ *— любой нижний элемент в* **Ci***, то* $P(\delta) = 0$.

2. *Если ψ и φ логически эквивалентны в том смысле, что $\psi \vdash \varphi$ и $\varphi \vdash \psi$, то $P(\psi)=P(\varphi)$.*

Доказательство. Очевидно ввиду аксиом.

Следствия из предыдущей теоремы:

$P(\alpha \wedge \neg\alpha \wedge \circ\alpha) = 0$,
$P(\circ\alpha \wedge \bullet\alpha) = 0$,
$P(\circ\alpha \wedge \neg\circ\alpha) = 0$,
$P(\bullet\alpha \wedge \neg\bullet\alpha) = 0$,

для любой вероятностной функции P.

Два предложения α и β называются *логически несовместимыми*, если $\alpha, \beta \vdash \varphi$ для любого φ (или, что то же самое, если $\alpha \wedge \beta$ является нижним элементом). Некоторые простые правила вычисления представлены ниже:

Теорема 3.4.
1. *$P(\alpha \vee \beta) = P(\alpha) + P(\beta)$, если α и β логически несовместимы*
2. $P(\circ\alpha) = 2 - (P(\circ\alpha) + P(\neg\alpha))$
3. $P(\alpha \wedge \neg\alpha) = P(\alpha) + P(\neg\alpha) - 1$
4. $P({\sim}\alpha) = 1 - P(\alpha)$
5. $P(\neg\circ\alpha) = 1 - P(\circ\alpha)$

Доказательство. Только пункты (1) и (2) будут доказаны (остальные доказываются стандартно): (1): Поскольку α и β логически несовместимы, $\alpha \wedge \beta$ выступает как нижний элемент, так что результат следует непосредственно по теореме 3.3. и конечной аддитивности.

(2): Используется конечная аддитивность для предложений $\circ\alpha \vee (\alpha \wedge \neg\alpha)$ и $\circ\alpha \wedge (\alpha \wedge \neg\alpha)$.

Вероятности иногда рассматриваются как обобщенные истинностные значения. Так называемая вероятностная семантика в этом случае заменяет означивания v: $\mathscr{L} \mapsto \{0,1\}$ классической пропозициональной логики вероятностной функцией оценки, чьим множеством значений является интервал $[0,1]$, а означивания можно рассматривать как выродженные вероятностные функции. В этом смысле классическая логика рассматривается как частный случай вероятностной логики. Аналогичное свойство справедливо для **Ci**; определенное выше понятие параконсистентной вероятностной меры показано далее.

Определим $\Vdash_P$ как отношение в вероятностной семантике, чье значение таково, что $\Gamma \Vdash_P \varphi$ т. т. т., когда для каждой вероятностной функции P, если $P(\psi) = 1$ для каждого $\psi \in \Gamma$, то $P(\varphi) = 1$. Можно показать, что **Ci** (сильно) корректна и полна относительно такой вероятностной семантики:

Теорема 3.5.
$\Gamma \vdash \varphi$ т. т. т., когда $\Gamma \Vdash_P \varphi$

Доказательство. Импликация слева направо непосредственно следует из аксиомам вероятности, а именно тавтологичности и сравнения, в сочетании со свойством компактности для доказательств в **Ci.** Читателям, интересующимся импликацией в обратную сторону, рекомендуется обратиться к [Bueno-Soler, Carnielli 2015].

4. Условная вероятность и параконсистентное обновление

Возможно, самым интересным применением вероятности в параконсистентной логике является то, что она оказывается полезна в так называемой байесовской эпистемологии, или формальном представлении степеней убеждения в философии. Хорошо известное правило Байеса позволяет обновлять вероятности по мере приобретения новой информации, причем, в случае паранепротиворечивой логики, даже когда поступающая информация в некоторой степени противоречива.

Условная вероятность α при условии β для $P(\beta) \neq 0$ определяется (как обычно) так:

$$P(\alpha / \beta) = \frac{P(\alpha \wedge \beta)}{P(\beta)}$$

Традиционная теорема Байеса об обусловливании (conditionalization) говорит, что для $P(\beta) \neq 0$:

$$P(\alpha / \beta) = \frac{P(\beta / \alpha) \cdot P(\alpha)}{P(\beta)}$$

Как обычно, $P(\alpha)$ здесь обозначает априорную вероятность, т. е. вероятность α до того, как наблюдалось β. $P(\alpha/\beta)$ обозначает условную вероятность, т. е. вероятность α после того, как β наблюдалось. $P(\beta/\alpha)$ — это правдоподобность, или вероятность наблюдения β при данном α, $P(\beta)$ называется предельной правдоподобностью или «свидетельствами в модели» (model evidence).

Теперь можно сформулировать параконсистентную версию теоремы Байеса, выразив предельную вероятность $P(\beta)$ через $P(\alpha)$, $P(\neg\alpha)$ и $P(\alpha \wedge \neg\alpha)$, где $P(\alpha \wedge \neg\alpha) \neq 0$.

Теорема 4.1. *Правило параконсистентного байесовского обусловливания (PBCR):*

$$P(\alpha / \beta) = \frac{P(\beta / \alpha) \cdot P(\alpha)}{P(\beta / \alpha) \cdot P(\alpha) + P(\beta / \neg\alpha) \cdot P(\neg\alpha) - P(\beta / \alpha \wedge \neg\alpha) \cdot P(\beta / \alpha \wedge \neg\alpha)},$$

если $P(\alpha \wedge \neg\alpha) \neq 0$.

Доказательство. См. [Bueno-Soler, Carnielli 2015].

В виде лозунга (PBCR) можно резюмировать так: «Апостериорная вероятность пропорциональна произведению правдоподобности и априорной вероятности и обратно пропорциональна предельной вероятности, выраженной через свои компоненты». Некоторые примеры приложений, иccследовавшиеся в [Bueno-Soler, Carnielli 2015a], провоцируют следующую интерпретацию байесовского параконсистентного обновления: когда тест (включающий противоречия) является достаточно ненадежным, параконсистентные вероятности, как правило, *сдержанно оптимистичны,* т. е. значения, как правило, предполагают самый благоприятный исход. Напротив, когда тест (опять же включающий противоречия) более надежен, параконсистентная вероятность будет скорее *сдержанно пессимистичной* в том смысле, что будет предпочитать ожидание нежелательных исходов. Тем не менее, тест является сдержанным в любом случае.

5. Свидетельства и вероятность: логика LETj

Логика **LETj**, представленная в [Carnielli, Rodrigues 2015], — это параконсистентная и интуиционистская логика свидетельства и истинности, интуитивно мотивированная в основном следующим:

- «A имеет место» означает, что есть свидетельство, что A истинно;
- «A не имеет места» означает, что нет свидетельств, что A истинно;
- «$\neg A$ имеет место» означает, что есть свидетельство, что A ложно;
- «$\neg A$ не имеет места» означает, что нет свидетельств, что A ложно.

Стоит заметить, что ни закон исключенного третьего, ни эксплозивность не имеют места в **LETj**, поскольку свидетельства могут быть как *неполными*, так и *противоречивыми* (тогда как рассуждение о свидетельстве не обязано быть *эксплозивным*).

Аксиоматически **LETj** представляется следующим образом:

Теорема 5.1. *Система* **LETj** *состоит из:*

1. *Аксиом*

(*a*) (**PC**$^+$) *все позитивные аксиомы* **PC**, *за исключением минус* $p \vee (p \supset q)$ *(«закона Даммита»)*

(*b*) (**bC**$_1$, *или **мягкая эксплозивность***) $\circ p \supset [p \supset (\neg p \supset q)]$

(*c*) (***Классичность***) $\circ p \supset (p \vee \neg p)$

(*d*) (**DN**) $\neg\neg p \equiv p$

(*e*) (*де Морган для* $\supset$) $\neg(p \supset q) \equiv p \wedge \neg q$

(*f*) (*де Морган для* $\vee$) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

(*g*) (*де Морган для* $\wedge$) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

2. *Правила MP.*

Заметим, что $p \wedge \neg q$ не имеет места и что по сравнению с чисто параконсистентной логикой **Ci** были введены новые аксиомы. В **LETj**, помимо $\neg$, могут быть определены различные отрицания:

- Интуиционистское отрицание: $\sim\alpha =_{\text{def}} \alpha \supset [p \wedge (\neg p \vee \circ p)]$
- Сильное отрицание: $\simeq\alpha =_{\text{def}} \alpha \wedge \circ\alpha$

Хотя они эквивалентны в **Ci**, они не совпадают в **LETj**.

- $\alpha \nvdash \simeq\alpha,$ $\quad\quad$ $\simeq\alpha \vdash \sim\alpha$
- $\nvdash \alpha \vee \sim\alpha \vee \circ\alpha$ $\quad\quad$ $\nvdash (\alpha \vee \simeq\alpha \vee \circ\alpha)$
- $\alpha \vee \sim\alpha \nvdash \alpha \vee \simeq\alpha$ $\quad\quad$ $\alpha \vee \simeq\alpha \nvdash \alpha \vee \sim\alpha$

Вот некоторые замечательные характеристики **LETj** (с доказательствами читатель может ознакомиться в [Carnielli, Rodrigues 2015]):

- $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ и $(\alpha \vee \neg\alpha)$ логически эквивалентны в **LETj**, но ни одно из них логически не эквивалентно $\circ\alpha$, т. е. непротиворечие и исключенное третье совпадают, но отличаются от классичности;
- Классичность невозможно доказать: **LETj** не имеет теорем вида $\circ\alpha$;
- Классичность распространяется: если $\circ\alpha_1, \circ\alpha_2 \ldots \circ\alpha_n$ имеют место, любая формула, зависящая только от $\circ\alpha_1, \circ\alpha_2 \ldots \circ\alpha_n$ и содержащая только $\supset$, $\vee$, $\wedge$ и $\neg$, ведет себя классическим образом.

Понятие вероятности, определенное в **LETj**, особенно интересно, поскольку оно определяет вероятностные функции, которые близки к мерам свидетельств. Вот некоторые характеристики вероятностной функции в **LETj**, где α и β — формулы **LETj**:

1. $P(\alpha \vee \beta) = P(\alpha) + P(\beta)$, если α и β логически несовместимы.
2. $P({\simeq}\alpha) = 1 - P(\alpha)$
3. $P({\simeq}\alpha) \neq 1 - P(\alpha)$ в общем случае
4. $P(\circ\alpha \vee \neg(\alpha \vee \neg\alpha)) = P(\circ\alpha) + P(\neg(\alpha \vee \neg\alpha))$
5. $P(\circ\alpha) \leq P(\alpha \vee \neg\alpha) \leq 1$
6. $P(\circ\alpha) \leq P(\alpha \supset (\neg\alpha \supset \beta)) \leq 1$

Итак, свидетельство и истинность в **LETj** связаны параконсистентным и параполным образом, если брать в расчет, что в той или иной ситуации возможны следующие сценарии:

- Совсем нет свидетельств: как α, так и $\neg\alpha$ не имеют места.
- Имеется только свидетельство об истинности α: α имеет место, $\neg\alpha$ – не имеет.
- Имеется только свидетельство о ложности α: $\neg\alpha$ имеет место, α не имеет места.
- Противоречивые свидетельства: как α, так $\neg\alpha$ имеют место.

LETj разработана, чтобы выразить понятия исчерпывающего и неисчерпывающего свидетельств, а также понятие сохранения свидетельств; кроме того, она ведет себя как классическая логика по отношению к пропозициям, чьи истинностные значения установлены исчерпывающим образом. Таким образом, она также может выразить понятие сохранения истинности. Следовательно, понятие вероятности, основанное на **LETj**, описывает такие сценарии с захватывающими возможностями и перспективами.

6. Вероятности для трехзначной параконсистентной логики **LFI1**

Параконсистентная логика **LFI1** призвана быть логической системой, способной иметь дело с противоречивой информацией внутри *эволюционной базы данных*, которым было дано определение в [Carnielli, Marcos, de Amo 2000]. *Реляционная база данных* является конечным набором конечных отношений, в котором хранится информация. В общем случае, чтобы эту информацию было безопасно вводить в базу данных, она должна удовлетворять некоторым условиям, так называемым *ограничениям целостности*.

Противоречивая информация возникает на платформах баз данных из-за того, что две или более базы данных могут быть соединены, что может привести к противоречию между ними. Устранение таких противоречий требует сложных и затратных процедур: возможно, интереснее было бы придерживаться теории, которая смогла бы сохранять противоречивую информацию внутри базы данных и получать от нее выгоду. Эволюционные базы данных позволяют динамическую модификацию ограничений целостности. Исторические подробности, касающиеся **LFI1**, представлены в [Carnielli, Coniglio, Marcos 2007].

Возможно, читателю уже ясно, что определение 3.1 с легкостью можно использовать, чтобы определить меры вероятностей над трехзначной параконсистентной логикой **LFI1**, и что для **LFI1** может быть сформулирована еще одна версия теоремы Байеса. В связи с этим можно естественным образом сформулировать новую форму байесовского механизма (обновления вероятностей по мере поступления новой информации при **LFI1**).

Применяя то, что было продемонстрировано выше, можно определить понятие вероятностной семантики для **LFI1** и показать, что **LFI1** является (сильно) корректной и полной относительно такой вероятностной семантики, а кроме того, она семантически охарактеризована трехзначными таблицами этой семантики.

Помимо того, что она разработана для обращения с реляционными базами данных, **LFI1** также является и максимальной в том смысле, что она, насколько это возможно, близка к классической логике: действительно, добавление к **LFI1** любой классической тавтологии, которая не является тавтологией **LFI1**, приводит систему к вырождению в классическую логику (см. доказательство в [Carnielli, Coniglio, Marcos 2007] или [Carnielli, Coniglio 2016]). В этом смысле теория вероятностей над **LFI1** максимальна (т. е. имеет минимальное отклонение) по отношению к стандартной вероятности.

Теории вероятностей, основанные на **Ci** и на **LFI1**, соседствуют, но не совпадают. На данный момент не ясно, для какого рода применений предпочтительна та или иная. Как бы то ни было, это стимул для дальнейших исследований.

7. Функции возможности и необходимости для произвольных логик

Теория возможностей — обобщение теории вероятностей, широко используемая для представления неопределенных знаний в более качественном ключе, чем теория вероятностей, в таких областях, как пересмотр убеждений в сфере искусственного интеллекта и временные рассуждения.

Теория возможности и необходимости может рассматриваться как дополнение стандартной теории вероятностей в том смысле, что они предназначены для обработки неполной или сверхполной (противоречивой) информации и используют двойственные меры (функции возможности и необходимости) вместо лишь одной, как в случае вероятности.

Функции возможности и — как двойственная к ней — необходимости могут быть не менее естественно основаны на неклассических логиках, чем на стандартной логике. Если они основаны на параконсистентной логике, функции возможности и необходимости представляют подход, легко применимый к рассуждениям с неопределенной и противоречивой информацией. Читателю рекомендуется обратиться к [Dubois, Prade 2001] за подробностями.

Введем теперь понятия функций необходимости и возможности как зависимых от некоторой пропозициональной логики **L**.

Определение 7.1. *Функция необходимости для языка* $\mathcal{L}$ *логики* **L**, *или функция* **L**-*необходимости, — это функция* P_η: $\mathcal{L} \mapsto \mathbb{R}$, *удовлетворяющая следующим условиям, где* $\vdash_L$ *опять-таки обозначает отношение синтаксической выводимости в* **L**:

1. *Неотрицательность:* $0 \leq P_\eta(\varphi) \leq 1$ *для всех* $\varphi \in \mathcal{L}$
2. *Тавтологичность:* *Если* $\vdash \varphi$, *то* $P_\eta(\varphi) = 1$
3. *Сравнение:* *Если* $\psi \vdash \varphi$, *то* $P_\eta(\psi) \leq P_\eta(\varphi)$
4. *Конъюнкция:* $P_\eta(\varphi \wedge \psi) = \min\{P_\eta(\varphi), P_\eta(\psi)\}$

Аналогично, функция возможности для языка $\mathcal{L}$ логики **L**, или функция **L**-возможности, — это функция P_π: $\mathcal{L} \mapsto \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим условиям, где $\vdash_L$ опять-таки обозначает отношение синтаксической выводимости в **L**:

Определение 7.2.

1. *Неотрицательность:* $0 \leq P_\pi(\varphi) \leq 1$ *для всех* $\varphi \in \mathcal{L}$
2. *Тавтологичность:* *Если* $\vdash \varphi$, *то* $P_\pi(\varphi) = 1$
3. *Сравнение:* *Если* $\psi \vdash \varphi$, *то* $P_\pi(\psi) \leq P_\pi(\varphi)$
4. *Дизъюнкция:* $P_\pi(\varphi \vee \psi) = \max\{P_\pi(\varphi), P_\pi(\psi)\}$

Меры необходимости и возможности заменяют аксиому конечной аддитивности для вероятности более слабыми условиями субаддитивности. Теория возможностей обеспечивает связь между нечеткими множествами и теорией вероятностей, но концептуально отличается и от тех, и от другой.

В работе [Besnard, Lung 1994: 73] знаменитая параконсистентная логика C_1, разработанная Н. К. А. да Костой, предлагается в качестве логики, лежащей в основе функций возможности и необходимости, так, что оказываются определены теории, способные обращаться с противоречивыми рассуждениями без дедуктивной эксплозии.

Наши определения необходимости и возможности, данные выше, позволяют нам существенно расширить это определение, поскольку в нашем распоряжении есть меры необходимости и возможности для логик **LETj**, **Ci**, **LFI1** и даже для интуиционистской логики **LJ**, помимо классической логики **CL**. Разумеется, возможны и многие другие варианты.

Хотя приложения и другие детали будут рассмотрены в другом месте, этих определений уже достаточно, чтобы повысить интерес к подобным обобщениям понятия вероятности.

8. Резюме, комментарии и выводы

В этой статье сделан обзор основных положений, касающихся параконсистентности, в общих словах охарактеризована параконсистентная логика как логическая система, содержащая понятия консистентности $\circ$ и отрицания $\neg$ и свободная от тривиальности в том смысле, что противоречие, выраженное отрицанием $\neg$, не обязательно тривиализирует лежащее в основе логики отношение следования, хотя консистентные противоречия действительно эксплодируют. Была определена вероятностная мера для двух таких логик: системы **Ci** и системы **LETj** (и набросана для третьей, **LFI1**), чем использовалось удобство понятия $\circ\alpha$, интерпретируемого как консистентность в случае **Ci** и как классичность в случае **LETj**. Это открыло путь для первых шагов к новой версии паранепротиворечивого байесовского обновления.

Мы показали, что понятия вероятностной семантики для **Ci** и для **LFI1** могут быть определены таким образом, что **Ci** и **LFI1** корректны и полны относительно такой вероятностной семантики. Этот результат можно распространить и на некоторые другие логики.

Ч. Морган показал в [Morgan 1982], что каждое консистентное расширение классической логики является полным для некоторого класса вероятностных интерпретаций. В [Morgan, Leblanc 1983] было также показано, что интуиционистская логика (которая не является расширением классической логики) корректна и непротиворечива для некоторого класса вероятностных интерпретаций. Важной работой в области вероятностных интерпретаций логических исчислений является аксиоматизация понятия вероятностной валидности, данная в [Field 1977], не использующая понятия классической семантики или истинностных функций.

Тем не менее, ни **Ci**, ни **LFI1** не являются расширениями классической логики и, более того, совершенно отличны от интуиционистской логики, что ставит их вне охвата [Morgan 1982] и [Morgan, Leblanc 1983]. Наши доказательства вероятностной интерпретации **Ci** и **LFI1** опираются на семантику таких исчислений, и весьма непросто определить, может или нет достижение Х. Филда в [Field 1977] (состоящие в получении вероятностной интерпретации для классической логики, независимой от семантических понятий) быть повторены для неклассической логики. Это остается открытой проблемой.

Теория свидетельств, поскольку мы рассматриваем ее с точки зрения логики **LETj**, несомненно, связана с широко известной теорией Демпстера-Шафера, хотя для прояснений технической стороны этих связей требуются еще дальнейшие исследования. Стандартная теория свидетельств основана на двух двойственных неаддитивных мерах: мере доверия (Bel) и мере правдоподобности (plausibility) (Pl). С точки зрения теории необходимости и возможности, мера доверия Bel и мера правдоподобия Pl становятся мерой необходимости P_η и мерой возможности P_π соответственно. Все подобные отношения распространяются и на неклассические логики, и необходимы более глубокие исследования, чтобы прояснить все эти связи и интерпретировать их философски приемлемым способом.

Как могут быть проинтерпретированы параконсистентные вероятности? Одна возможная точка зрения заключается в том, чтобы интерпретировать параконсистентные вероятности как степени убеждения, которые рациональный агент приписывает событиям таким образом, что эти степени должны соответствовать следующим принципам: необходимые события (например, тавтологии) получают максимальную степень, невозможные события (например, нижние элементы) получают низшую степень, вероятности не нарушают отношение логического следования, и гарантируется конечная аддитивность. Последнее условие кажется менее очевидным, но так называемые аргументы от голландской ставки обеспечивают, по крайней мере в классическом случае, способ обосновать требование конечной аддитивности. Следует учитывать, что лежащая у нас в основе логика **Ci** *расширяет* классические сценарии в важных направлениях; поэтому, например, даже если невозможное событие должно иметь нулевую степень у рационального агента, ни события, имеющие нулевую степень, не являются невозможными с точки зрения рационального агента, ни противоречие не является невозможным событием (хотя консистентное противоречие является невозможным, как было сказано выше).

Ввиду этого, если рассуждающий вероятностным способом утверждает, что, чтобы быть идеально рациональным, распределение степеней убеждения должно быть вероятностным, т. е. удовлетворять аксиомам вероятности, то мы должны утверждать, что вероятностные аксиомы не уникальны и что неклассические формулировки субъективной и объективной вероятности не менее рациональны, чем их стандартный аналог.

Основным вопросом является не то, должны ли законы вероятностей быть квалифицированы как законы логики, но то, как логика и теория вероятностей могут быть объединены, чтобы усовершенствовать рассуждения. В этом отношении, принимая во внимание то, что теория вероятности, так же как и параконсистентная логика, отличается от классической логики в различных своих аспектах, и то, что обе они устойчивы к противоречиям, неточностям (inexactness) и т. д., их соединение предлагает новую и захватывающую парадигму рассуждений.

Литература

Besnard, Lung 1994 — *Besnard P., Lung J.* Possibility and necessity functions over nonclassical logic // Proceedings of the Tenth International Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence, Morgan Kaufmann Publishers Inc., UAI'94, San Francisco, CA, USA, 1994. P. 69–76.

Bueno-Soler, Carnielli 2015 — *Bueno-Soler J., Carnielli W. A.* Experimenting with consistency // The Logical Legacy of Nikolai Vasiliev and Modern Logic / V. Markin and D. Zaitsev (Eds.). P. In print. 2015.

Bueno-Soler, Carnielli 2016 — *Bueno-Soler J., Carnielli W. A*. Paraconsistent probabilities: Consistency, contradictions and bayes theorem // Entropy. Vol. 18(9), 2016.

Carnielli, Coniglio 2016 — *Carnielli W. A., Coniglio M. E.* Paraconsistent Logic: Consistency, Contradiction and Negation. // Logic, Epistemology, and the Unity of Science. Springer International Publishing, 2016.

Carnielli, Coniglio, Marcos 2007 — *Carnielli W. A., M. E. Coniglio, Marcos J*. Logics of formal inconsistency // D. Gabbay, F. Guenthner, (Eds.). Handbook of Philosophical Logic. Amsterdam, SpringerVerlag. Vol. 14, 2007. P. 1–93.

Carnielli, Coniglio, Podiacki, Rodrgues 2015 — *Carnielli W. A., M. E. Coniglio, Podiacki R., Rodrgues T.* On the way to a wider model theory: Completeness theorems for first-order logics of formal inconsistency // Review of Symbolic Logic. Vol. 3, 2015. P. 548–578.

Carnielli, Marcos, de Amo 2000 — *Carnielli W. A., Marcos J., de Amo S*. Formal inconsistency and evolutionary databases // Logic and Logical Philosophy. Vol. 8, 2000. P. 115–152.

Carnielli, Rodrgues 2015 — *Carnielli W. A., Rodrigues A.* A logic for evidence and truth // CLE e-prints, 15(5), 2015. ftp://ftp.cle.unicamp.br/pub/e-prints/ vol.15,n_5,2015.pdf.

Dubois, Prade 2001 — *Dubois D., Prade H*. Possibility theory, probability theory and multiple-valued logics: A clarification // Annals of Mathematics and Artificial Intelligence. Vol. 32, 2001. P. 35–66.

Field 1977 — *Field H.* Logic, meaning, and conceptual role // The Journal of Philosophy. Vol. 84(7), 1977. P. 379–409.

Mares 1997 — *Mares E*. Paraconsistent probability theory and paraconsistent Bayesianism // Logique et Analyse. Vol. 160, 1997. P. 375–384.
Morgan, Leblanc 1983 — *Morgan C., Leblanc H*. Probabilistic semantics for intuitionistic logic // Notre Dame Journal of Formal Logic. Vol. 24(2), 1983. P. 161–180.
Morgan 1982 — *Morgan C*. There is a probabilistic semantics for every extension of classical sentence logic // Journal of Philosophical Logic. Vol. 11, 1982. P. 431–442.
Mundichi 2016 — *Mundici D.* Coherence of de Finetti coherence // Synthese. doi:10.1007/s11229-016-1126-9, 2016.
Priest 1987 — *Priest G.* In Contradiction: A Study of the Transconsistent. Amsterdam: Martinus Nijhoff, 1987.
Roberts 2000 — *Roberts L*. Maybe, maybe not: Probabilistic semantics for two paraconsistent logic // Frontiers of Paraconsistent Logic: Proceedings of the I World Congress on Paraconsistency / Batens D., Mortensen C., Priest G., van Bendegem J. P. (Eds.). Logic and Computation, SeriesP. Baldock: Research Studies Press, King's College Publications, 2000. P. 233–254.
Weatherson 2003 — *Weatherson B*. From classical to intuitionistic probability // Notre Dame Journal of Formal Logic. Vol. 44, 2003. P. 111–123.
Williams 1981 — *Williams J. N*. Inconsistency and contradiction // Mind. Vol. 90, 1981. P. 600–602.