В. И. Маркин[1]

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИЛЛОГИСТИКА И РЕЛЕВАНТНОЕ СЛЕДОВАНИЕ

Резюме: В работе предлагается нестандартная семантика языка позитивной силлогистики, в которой значимость атомарных формул определяется в терминах релевантного следования. Данная идея реализуется в рамках предложенного В. И. Шалаком подхода к построению семантики силлогистики: субъектам и предикатам категорических высказываний приписываются формулы языка пропозициональной логики, а определения значимости силлогистических формул базируются на отношении классической выводимости. Данное отношение заменяется на отношение следования релевантной системы FDE. Строится семантика для фундаментальной позитивной силлогистики, доказывается метатеорема о непротиворечивости и полноте.
Ключевые слова: силлогистика, семантика, категорические высказывания, релевантное следование, теорема о непротиворечивости и полноте.

Vladimir Markin

FUNDAMENTAL SYLLOGISTIC AND RELEVANT ENTAILMENT

Resume: We state a non-standard semantics of positive syllogistic language, the validity of atomic formulas (the forms of categorical propositions) is defined in terms of relevant entailment. This idea is realized within the bounds of V. I. Shalack's approach to the construction of syllogistic semantics: the formulas of propositional logic are assigned to the subjects and the predicates as their meanings, and the validity definitions for syllogistic formulas base on the relation of classical deducibility. We change this relation for the entailment relation of relevant system FDE. We construct the adequate semantics for the «fundamental» positive syllogistic and prove soundness and completeness.
Keywords: syllogistic, semantics, categorical propositions, relevant entailment, soundness theorem, completeness theorem.

В традиционной и в современной логике доминирует идущая от Аристотеля и отчетливо выраженная схоластами трактовка силлогистики как теории, которая исследует связи, возникающие в сфере *объемных* отношений между общими терминами. Силлогистические константы обычно рассматриваются как выражающие

[1] *Маркин Владимир Ильич*, доктор философских наук, профессор, кафедра логики, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова.

Vladimir Markin, Dr. Sc., Professor, Department of Logic, Lomonosov Moscow State University. vladimirmarkin@mail.ru

экстенсиональные отношения между двумя множествами (объемами понятий): константа *a* репрезентирует отношение теоретико-множественного включения класса в класс, константа *i* — наличие общих элементов у двух классов и т. д.

Эта трактовка может быть точно выражена средствами формальной семантики. *Моделью* является пара $\langle D, \varphi \rangle$, в которой D есть произвольное непустое множество (трактуемое как множество индивидов), а φ — функция, сопоставляющая терминам силлогистического языка подмножества из D (т. е. классы индивидов). Определим *функцию* $|\ |^{\mathbf{D}}_{\varphi}$ (или сокращенно — $|\ |_{\varphi}$) *означивания формул* в модели $\langle D, \varphi \rangle$ — функцию, отображающую множество силлогистических формул на множество истинностных значений $\{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$ при фиксированных D и φ:

$|SaP|_{\varphi} = 1$, е.т.е. $\varphi(S) \subseteq \varphi(P)$,
$|SiP|_{\varphi} = 1$, е.т.е. $\varphi(S) \cap \varphi(P) \neq \varnothing$,
$|SeP|_{\varphi} = 1$, е.т.е. $\varphi(S) \cap \varphi(P) = \varnothing$,
$|SoP|_{\varphi} = 1$, е.т.е. $\varphi(S) \setminus \varphi(P) \neq \varnothing$,

Условия истинности (значимости) сложных формул стандартные.

Класс общезначимых формул (формул, принимающих значение 1 в любой модели) аксиоматизируется силлогистическим исчислением ФС, дедуктивно эквивалентным системе Дж. Шефердсона [Shepherdson 1956]. ФС формализует позитивный фрагмент так называемой «фундаментальной» силлогистики. Её дедуктивными постулатами являются схемы аксиом:

A0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний.
A1. $(MaP \wedge SaM) \supset SaP$
A2. $(MeP \wedge SaM) \supset SeP$
A3. $SeP \supset PeS$
A4. SaS
A5. $SiP \supset SiS$
A6. $SoP \supset SiS$
A7. $SiP \equiv \neg SeP$
A8. $SoP \equiv \neg SaP$

и единственное правило вывода — *modus ponens*. Понятие доказательства обычное.

Если на функцию φ, сопоставляющую терминам подмножества предметной области D в модели $\langle D, \varphi \rangle$, наложить дополнительное ограничение — $\varphi(S) \neq \varnothing$ для любого *S* (т. е. потребовать, чтобы общие термины были непустыми), получим адекватную семантику для силлогистики Я. Лукасевича (системы C4 в классификации В. А. Смирнова). C4 может быть получена из ФС за счет добавления следующей схемы аксиом:

$SaP \supset SiP$

В истории логики имелся и иной — альтернативный экстенсиональному — подход к интерпретации категорических суждений. Суть этого подхода заключается в трактовке субъекта и предиката высказывания как понятийных конструкций и их анализа с точки зрения *содержательных*, а не объемных характеристик. Силлогистические константы при этом рассматриваются как знаки отношений между понятиями по содержанию. По-видимому, впервые идея интенсиональной интерпретации силлогистики в отчетливом виде была высказана Г. Лейбницем, который прямо противопоставлял «содержательную» трактовку категорических суждений «объемной», схоластической. Попытка решения данной задачи была предпринята им в ряде работ, среди которых особо выделяется работа «Элементы исчисления», датированная 1679 г. [Лейбниц 1984: 514–522]. Лейбниц предложил связывать с терминами категорических суждений не классы индивидов (объемы понятий), а совокупности признаков, т. е. содержания понятий (в их традиционном понимании).

Тогда высказывание *SaP* выражает утверждение не о включении объема субъекта в объем предиката, а о *включении содержания предиката в содержание субъекта*: «…всякое истинное общеутвердительное категорическое предложение означает не что иное, как некую связь предиката и субъекта …, что предикат находится в субъекте, или содержится в субъекте …» [Лейбниц 1984: 516].

Лейбниц трактует высказывания типа *SiP* так: «…в *частноутвердительном предложении* нет необходимости, чтобы предикат присутствовал в субъекте, … но достаточно предикату содержаться в каком-то виде субъекта, т. е. *чтобы понятие какого-то вида субъекта содержало понятие предиката*…» [Лейбниц 1984: 521]. Заметим, что *вид*, по Лейбницу, — более богатое по содержанию понятие, результат добавления одного или нескольких признаков к содержанию исходного понятия. Таким образом, согласно Лейбницу, высказывание типа *SiP* истинно, если к содержанию его субъекта можно добавить признаки так, что в полученную совокупность будет включаться содержание предиката; иными словами, *субъект и предикат имеют общий вид*.

Мною была построена формальная семантика, адекватно эксплицирующая лейбницевскую интенсиональную интерпретацию силлогистики [Маркин 2001].

Рассмотрим множество *литералов* L = $\{p_1, \sim p_1, p_2, \sim p_2, \ldots\}$. Литералы, не содержащие символа «~», представляют *положительные признаки*, а содержащие данный символ — *отрицательные признаки*.

Непротиворечивым понятием (рассматриваемым в аспекте его интенсиональной характеристики — содержания) назовем произвольное непустое и непротиворечивое подмножество L, т. е. множество $\alpha \subseteq L$, удовлетворяющее следующим условиям:

(i) $\alpha \neq \varnothing$;
(ii) не существует p_i, такого что $p_i \in \alpha$ и $\sim p_i \in \alpha$.

Пусть H — множество всех непротиворечивых понятий. Определим на H операцию *, сопоставляющую каждому понятию α *противоположное* ему понятие α^*:

$$p_i \in \alpha^*, \text{ е.т.е. } \sim p_i \in \alpha, \text{ и } \sim p_i \in \alpha^*, \text{ е.т.е. } p_i \in \alpha.$$

Определим *интерпретирующую функцию* d, приписывающую каждому общему термину в качестве значения некоторое (интенсионально трактуемое) понятие: $d(P) \in H$. Зададим понятие *значимости* формулы языка позитивной силлогистики при интерпретации d (выражение «$d \vDash A$» читается как «формула A значима при интерпретации общих терминов d»):

d $\vDash$ *SaP*, е.т.е. d(P) $\subseteq$ d(S);
d $\vDash$ *SiP*, е.т.е. d(P)* $\cap$ d(S) = $\varnothing$;
d $\vDash$ *SeP*, е.т.е. d(P)* $\cap$ d(S) $\neq \varnothing$;
d $\vDash$ *SoP*, е.т.е. d(P) \ d(S) $\neq \varnothing$.

Условия значимости сложных формул обычные.

Лейбницевская трактовка высказываний *SaP* в точности соответствует условию их значимости в сформулированной нами семантике.

Условие значимости высказываний *SiP* равносильно следующему:

$$\mathrm{d} \vDash SiP, \text{ е.т.е. } \dot{\exists}\, \alpha \in \mathrm{M}\ (\mathrm{d}(S) \subseteq \alpha\ \dot{\wedge}\ \mathrm{d}(P) \subseteq \alpha).$$

Последнее также соответствует лейбницевской интерпретации: субъект и предикат истинного частноотрицательного высказывания должны иметь общий вид.

Класс общезначимых (значимых при любой интерпретации d) формул совпадает с множеством теорем силлогистики Я. Лукасевича (системы C4).

Для того чтобы получить семантики, адекватные другим системам силлогистики, естественно отказаться от исходной предпосылки о непротиворечивости понятий, т. е. ввести в рассмотрение *противоречивые* понятия, содержания которых одновременно включают признаки p_i и $\sim p_i$ для некоторого p_i.

Пусть П — множество всех понятий. Положим, что d(P) $\in$ П, но сами условия значимости силлогистических формул не меняются. Естественной выглядит гипотеза, что модифицированная интенсиональная семантика адекватна системе фундаментальной силлогистики ФС. Однако это не так. Аксиомы A5 (*SiP* $\supset$ *SiS*) и A6 (*SoP* $\supset$ *SiS*) не являются в ней общезначимыми.

Адекватно формализует эту семантику более слабое исчисление, получающееся из ФС отбрасыванием схем A5 и A6 и названное мною ранее системой ИФС [Маркин 2002].

Вместе с тем, и для ФС имеется адекватная интенсиональная семантика. В ней d(P) $\in$ П, но постулируются иные условия значимости силлогистических формул:

d $\vDash$ *SaP*, е.т.е. d(P) $\subseteq$ d(S) $\dot{\vee}$ d(S) $\notin$ Н;
d $\vDash$ *SiP*, е.т.е. d(S) $\cup$ d(P) $\in$ Н;
d $\vDash$ *SeP*, е.т.е. d(S) $\cup$ d(P) $\notin$ Н;
d $\vDash$ *SoP*, е.т.е. d(P) \ d(S) $\neq \varnothing$ $\dot{\wedge}$ d(S) $\in$ Н.

Недавно В. И. Шалак предложил оригинальный подход к построению семантик для систем позитивной силлогистики [Шалак 2015]. Его суть состоит в том, что в качестве значений общим терминам силлогистического языка сопоставляются не классы индивидов и не совокупности признаков, а *формулы языка классической пропозициональной логики*. Условия значимости атомарных формул силлогистики *SaP*, *SeP*, *SiP* и *SoP* определяются с использованием отношения выводимости между пропозициональными формулами, приписанными в качестве значений терминам *S* и *P*. Свою интерпретацию силлогистического языка он назвал «синтаксической».

Основной результат работы [Шалак 2015] — построение адекватной семантики для исчисления ФС, формализующего чистый позитивный фрагмент «фундаментальной» силлогистики.

Изложим семантику В. И. Шалака для ФС в несколько модифицированном виде: вместо отношения классической выводимости будем использовать его семантический аналог — отношение классического логического следования ($\vDash$) и переформулируем эквивалентным образом условия значимости формул *SeP* и *SoP*.

Интерпретирующая функция δ сопоставляет каждому общему термину формулу языка классической логики высказываний, не содержащую иных пропозициональных связок, кроме $\neg$, $\wedge$ и $\vee$. Условия значимости атомарных формул силлогистики ФС при некоторой интерпретации δ определяются так:

$V(SaP, \delta)$, е.т.е. $\delta(S) \vDash \delta(P)$,
$V(SiP, \delta)$, е.т.е. $\delta(S) \nvDash \neg\delta(P)$,
$V(SeP, \delta)$, е.т.е. $\delta(S) \vDash \neg\delta(P)$,
$V(SoP, \delta)$, е.т.е. $\delta(S) \nvDash \delta(P)$,

где $V(A, \delta)$ — «формула A значима при интерпретации δ».

Условия значимости сложных формул стандартные. Назовем формулу A V-общезначимой, е.т.е. $V(A, \delta)$ при любой интерпретации δ. Доказано, что множество V-общезначимых формул совпадает с множеством теорем силлогистики ФС [Шалак 2015].

В. И. Шалак показал также, что адекватная «синтаксическая» семантика для силлогистики Я. Лукасевича получается при наложении следующего ограничения: $\delta(S)$ — классически непротиворечивая формула пропозиционального языка.

В работе [Маркин 2016] мною был поставлен вопрос о возможности использования при определении условий значимости формул силлогистики не *классического* отношения логического следования ($\vDash$), а *релевантного* следования, а именно, отношения первоуровневого следования релевантной логики FDE ($\vDash_{rel}$). Семантика силлогистического языка модифицируется следующим образом:

$V'(SaP, \delta)$, е.т.е. $\delta(S) \vDash_{rel} \delta(P)$,
$V'(SiP, \delta)$, е.т.е. $\delta(S) \nvDash_{rel} \neg\delta(P)$,
$V'(SeP, \delta)$, е.т.е. $\delta(S) \vDash_{rel} \neg\delta(P)$,
$V'(SoP, \delta)$, е.т.е. $\delta(S) \nvDash_{rel} \delta(P)$.

$V'(A, \delta)$, когда A — сложная формула, определяется в «классическом» метаязыке стандартным образом.

В [Маркин 2016] доказано, что класс V′-общезначимых в этой «релевантизированной» семантике формул (т. е. $\{A\colon V'(A, \delta)$ при любой интерпретации $\delta\}$) аксиоматизируется силлогистическим исчислением ИФС. Таким образом, в данном случае замена классического логического следования на релевантное в условиях значимости формул *SaP*, *SeP*, *SiP* и *SoP* сужает класс законов силлогистики.

Возникает вопрос, можно ли построить адекватную семантику для фундаментальной силлогистики (ФС), используя в условиях значимости *релевантное* следование. Для решения данной задачи необходимо видоизменить их так:

$V'_1(SaP, \delta)$, е.т.е. $\delta(S) \vDash_{rel} \delta(P) \mathbin{\dot\vee} \delta(S) \vDash_{rel} \neg\delta(S)$,
$V'_1(SiP, \delta)$, е.т.е. $\delta(S) \nvDash_{rel} \neg\delta(P) \mathbin{\dot\wedge} \delta(S) \nvDash_{rel} \neg\delta(S) \mathbin{\dot\wedge} \delta(P) \nvDash_{rel} \neg\delta(P)$,
$V'_1(SeP, \delta)$, е.т.е. $\delta(S) \vDash_{rel} \neg\delta(P) \mathbin{\dot\vee} \delta(S) \vDash_{rel} \neg\delta(S) \mathbin{\dot\vee} \delta(P) \vDash_{rel} \neg\delta(P)$,
$V'_1(SoP, \delta)$, е.т.е. $\delta(S) \nvDash_{rel} \delta(P) \mathbin{\dot\wedge} \delta(S) \nvDash_{rel} \neg\delta(S)$.

Основной целью данной работы является доказательство того, что *все теоремы исчисления* ФС *и только они общезначимы при данных условиях* (V'_1-*общезначимы*).

При обосновании этого метаутверждения существенную роль будет играть (имеющий самостоятельное значение) результат о погружаемости системы ФС в свою подсистему ИФС посредством следующего перевода ψ:

$\psi(SaP) = SaP \vee SeS$,
$\psi(SiP) = SiP \wedge SiS \wedge PiP$,
$\psi(SeP) = SeP \vee SeS \vee PeP$,
$\psi(SoP) = SoP \wedge SiS$,
$\psi(\neg A) = \neg\psi(A)$,
$\psi(A \nabla B) = \psi(A) \nabla \psi(B)$,

где ∇ — произвольная бинарная связка.

***Теорема* 1.** Перевод ψ погружает ФС в ИФС, т. е. $\dot{\forall} A$(ФС $\vdash A$, е.т.е. ИФС $\vdash \psi(A)$).

При доказательстве этой теоремы будем использовать известный критерий погружаемости одного исчисления в другое, сформулированный В. А. Смирновым [Смирнов 2002: 159]. Во-первых, продемонстрируем, что ψ-переводы всех теорем системы ФС доказуемы в исчислении ИФС. Во-вторых, укажем функцию χ такую, что (a) χ-переводы всех теорем ИФС доказуемы в ФС и (b) для любой формулы A верно, что $A \equiv \chi(\psi(A))$ доказуема в исчислении ФС.

Предварительно нам потребуется обосновать доказуемость в системе ИФС формул следующего типа:

T1. $(MeM \wedge SaM) \supset SeS$

1. $(MeM \wedge SaM) \supset SeM$	A2
2. $SeM \supset MeS$	A3
3. $(MeS \wedge SaM) \supset SeS$	A2
4. $(MeM \wedge SaM) \supset SeS$	1–3 ЛВ (логика высказываний).

Покажем справедливость первой части критерия погружаемости, а именно,

$\dot{\forall} A$ (ФС $\vdash A \; \dot{\supset}$ ИФС $\vdash \psi(A)$).

Для обоснования этого утверждения достаточно доказать, что ψ-переводы всех аксиом ФС доказуемы в ИФС, и что если ψ-переводы посылок правила *modus ponens* доказуемы в ИФС, то в этой системе доказуем и ψ-перевод его заключения.

A0. Переводы аксиом классического исчисления высказываний также являются пропозициональными тавтологиями и поэтому доказуемы в ИФС.

A1. $\psi((MaP \wedge SaM) \supset SaP) = ((MaP \vee MeM) \wedge (SaM \vee SeS)) \supset (SaP \vee SeS)$

1. $(MaP \wedge SaM) \supset SaP$	A1
2. $(MeM \wedge SaM) \supset SeS$	T1
3. $SeS \supset (SaP \vee SeS)$	A0
4. $((MaP \vee MeM) \wedge (SaM \vee SeS)) \supset (SaP \vee SeS)$	1–3 ЛВ.

A2. $\psi((MeP \wedge SaM) \supset SeP)$
$= ((MeP \vee MeM \vee PeP) \wedge (SaM \vee SeS)) \supset (SeP \vee SeS \vee PeP)$

1. $(MeP \wedge SaM) \supset SeP$	A2
2. $(MeM \wedge SaM) \supset SeS$	T1
3. $PeP \supset (SeP \vee SeS \vee PeP)$	ЛВ
4. $SeS \supset (SeP \vee SeS \vee PeP)$	ЛВ
5. $((MeP \vee MeM \vee PeP) \wedge (SaM \vee SeS)) \supset (SeP \vee SeS \vee PeP)$	1–4 ЛВ.

A3. $\psi(SeP \supset PeS) = (SeP \vee SeS \vee PeP) \supset (PeS \vee PeP \vee SeS)$
Выводится непосредственно из A3 ($SeP \supset PeS$) с использованием законов ЛВ.

A4. $\psi(SaS) = SaS \vee SeS$
Выводится непосредственно из A4 (SaS) с использованием законов ЛВ.

A5. $\psi(SiP \supset SiS) = (SiP \wedge SiS \wedge PiP) \supset (SiS \wedge SiS \wedge SiS)$
Пропозициональная тавтология (A0).

A6. $\psi(SoP \supset SiS) = (SoP \wedge SiS) \supset (SiS \wedge SiS \wedge SiS)$
Пропозициональная тавтология (A0).

A7. $\psi(SiP \equiv \neg SeP) = (SiP \wedge SiS \wedge PiP) \equiv \neg(SeP \vee SeS \vee PeP)$

1. $SiP \equiv \neg SeP$	A7
2. $SiS \equiv \neg SeS$	A7
3. $PiP \equiv \neg PeP$	A7
4. $(SiP \wedge SiS \wedge PiP) \equiv \neg(SeP \vee SeS \vee PeP)$	1–3 ЛВ.

A8. $\psi(SoP \equiv \neg SaP) = (SoP \wedge SiS) \equiv \neg(SaP \vee SeS)$

1. $SoP \equiv \neg SaP$	A8
2. $SiS \equiv \neg SeS$	A7
3. $(SoP \wedge SiS) \equiv \neg(SaP \vee SeS)$	1, 2 ЛВ.

M. P. Допустим, что $\psi(A \supset B)$ и $\psi(A)$ доказуемы в ИФС. Поскольку $\psi(A \supset B) = \psi(A) \supset \psi(B)$, формула $\psi(A) \supset \psi(B)$ является теоремой ИФС. Но $\psi(A)$ — тоже теорема этой системы. Следовательно, $\psi(B)$ доказуема в ИФС.

Итак, мы показали, что ψ-переводы всех теорем системы ФС доказуемы в ИФС.

Перейдем к доказательству второй части критерия погружаемости. В качестве обратной функции (перевода из ИФС в ФС) рассмотрим тождественное преобразование χ: $\chi(A) = A$.

Поскольку ИФС является подсистемой ФС, χ-переводы всех теорем ИФС доказуемы в ФС:

$$\dot{\forall} A\ (\text{ИФС} \vdash A \ \dot{\supset}\ \text{ФС} \vdash \chi(A)).$$

Остается обосновать следующее утверждение:

$$\dot{\forall} A\ (\text{ФС} \vdash A \equiv \chi(\psi(A)).$$

Его доказательство осуществляем индукцией по числу пропозициональных связок в силлогистической формуле A.

Базис включает четыре случая.

I. $A \eqcirc SaP$. Тогда $\chi(\psi((A)) = \psi(SaP) = SaP \vee SeS$.

1. $SaP \supset (SaP \vee SeS)$	A0
2. $SoP \supset SiS$	A6
3. $SoP \equiv \neg SaP$	A8
4. $SiS \equiv \neg SeS$	A7
5. $SeS \supset SaP$	2–4 ЛВ
6. $SaP \equiv (SaP \vee SeS)$	1, 5 ЛВ.

II. $A \eqcirc SeP$. Тогда $\chi(\psi((A)) = \psi(SeP) = SeP \vee SeS \vee PeP$.

1. $SeP \supset (SeP \vee SeS \vee PeP)$	A0
2. $SiP \supset SiS$	A5
3. $SiP \equiv \neg SeP$	A7
4. $SiS \equiv \neg SeS$	A7
5. $SeS \supset SeP$	2–4 ЛВ
6. $PiS \supset PiP$	A5
7. $PiS \equiv \neg PeS$	A7
8. $PiP \equiv \neg PeP$	A7
9. $PeP \supset PeS$	6–8 ЛВ
10. $PeS \supset SeP$	A3
11. $PeP \supset SeP$	9, 10 ЛВ
12. $SeP \equiv (SeP \vee SeS \vee PeP)$	1, 5, 11 ЛВ.

III. $A \eqcirc SiP$. Тогда $\chi(\psi((A)) = \psi(SiP) = SiP \wedge SiS \wedge PiP$.

IV. $A \eqcirc SoP$. Тогда $\chi(\psi((A)) = \psi(SoP) = SoP \wedge SiS$.

Сводятся, соответственно, к случаям II и I в силу схем аксиом A7 и A8.

При обосновании индуктивного перехода принимаем допущение, что для любой формулы B, содержащей меньше пропозициональных связок, чем A, верно, что $B \equiv \chi(\psi((B))$ доказуема в системе ФС.

V. $A \eqcirc \neg B$

Согласно индуктивному допущению, ФС $\vdash B \equiv \chi(\psi(B))$. По законам логики высказываний отсюда вытекает: ФС $\vdash \neg B \equiv \neg\chi(\psi(B))$. По определению переводов ψ и χ, имеем: $\chi(\psi(\neg B)) = \chi\ (\neg\psi\ (B)) = \neg\chi(\psi(B))$. Следовательно, ФС $\vdash \neg B \equiv \chi(\psi(\neg B))$.

VI. $A \eqcirc B \supset C$

Согласно индуктивному допущению, формулы $B \equiv \chi(\psi(B))$ и $C \equiv \chi(\psi(C))$ доказуемы в ФС. Отсюда по законам логики высказываний вытекает, что и формула $(B \supset C) \equiv \chi(\psi(B)) \supset \chi(\psi(C))$ доказуема в этой системе. Но, по определению переводов ψ и χ, $\chi(\psi(B \supset C)) = \chi(\psi(B) \supset \chi(C)) = \chi(\psi(B)) \supset \chi(\psi(C))$. Следовательно, ФС $\vdash (B \supset C) \equiv \chi(\psi(B \supset C))$.

Другие случаи, когда A есть сложная формула, рассматриваются сходным образом.

Теорема 1 доказана.

Следующий этап в доказательстве адекватности предложенной выше «релевантизированной» семантики исчислению ФС состоит в обосновании семантического аналога только что доказанной теоремы:

Теорема 2. Произвольная силлогистическая формула A V'_1-общезначима, е.т.е. её перевод $\psi(A)$ V'-общезначим.

Рассмотрим произвольную функцию δ, сопоставляющую общим терминам формулы пропозиционального языка в сигнатуре $\{\neg, \wedge, \vee\}$. Покажем, что $\mathrm{V}'_1(A, \delta)$, е.т.е. $\mathrm{V}'(\psi(A), \delta)$ для любой формулы A языка силлогистики.

Снова будем использовать возвратную индукцию по числу пропозициональных связок в составе A.

I. $A \eqcirc SaP$.

$\mathrm{V}'_1(SaP, \delta)$, е.т.е. (по определению V'_1) $\delta(S) \vDash_{rel} \delta(P) \ \dot\vee\ \delta(S) \vDash_{rel} \neg\delta(S)$, е.т.е. (по определению V') $\mathrm{V}'(SaP, \delta) \ \dot\vee\ \mathrm{V}'(SeS, \delta)$, е.т.е. (по определению V') $\mathrm{V}'(SaP \vee SeS, \delta)$, е.т.е. (по определению ψ) $\mathrm{V}'(\psi(SaP), \delta)$.

II. $A \eqcirc SeP$.

$\mathrm{V}'_1(SeP, \delta)$, е.т.е. (по определению V'_1) $\delta(S) \vDash_{rel} \neg\delta(P) \ \dot\vee\ \delta(S) \vDash_{rel} \neg\delta(S) \ \dot\vee\ \delta(P) \vDash_{rel} \neg\delta(P)$, е.т.е. (по определению V') $\mathrm{V}'(SeP, \delta) \ \dot\vee\ \mathrm{V}'(SeS, \delta) \ \dot\vee\ \mathrm{V}'(PeP, \delta)$, е.т.е. (по определению V') $\mathrm{V}'(SeP \vee SeS \vee PeP, \delta)$, е.т.е. (по определению ψ) $\mathrm{V}'(\psi(SeP), \delta)$.

III. $A \eqcirc SiP$.

IV. $A \eqcirc SoP$.

Сводятся, соответственно, к случаям II и I в силу того, что условия их V'_1-значимости и V'-значимости противоречат условиям значимости атомарных формул SeP и SaP.

Далее рассматриваем случаи, когда A — сложная формула. Используем индуктивное допущение: для любой формулы B с меньшим, чем у A, числом пропозициональных связок верно, что $\mathrm{V}'_1(B, \delta)$, е.т.е. $\mathrm{V}'(\psi(B), \delta)$.

V. $A \eqcirc \neg B$.

$\mathrm{V}'_1(\neg B, \delta)$, е.т.е. (по определению V'_1) $\dot\neg\ \mathrm{V}'_1(B, \delta)$, е.т.е. (по индуктивному допущению) $\dot\neg\ \mathrm{V}'(\psi(B), \delta)$, е.т.е. (по определению V') $\mathrm{V}'(\neg\psi(B), \delta)$, е.т.е (по определению ψ) $\mathrm{V}'(\psi(\neg B), \delta)$.

VI. $A \eqcirc B \supset C$.

$\mathrm{V}'_1(B \supset C, \delta)$, е.т.е. (по определению V'_1) $\dot\neg\,\mathrm{V}'_1(B, \delta) \ \dot\vee\ \mathrm{V}'_1(C, \delta)$, е.т.е. (по индуктивному допущению) $\dot\neg\ \mathrm{V}'(\psi(B), \delta) \ \dot\vee\ \mathrm{V}'(\psi(C), \delta)$, е.т.е. (по определению V') $\mathrm{V}'(\psi(B) \supset \psi(C), \delta)$, е.т.е. (по определению ψ) $\mathrm{V}'(\psi(B \supset C), \delta)$.

Остальные случаи индуктивного перехода рассматриваются аналогично.

Таким образом, мы обосновали следующее метаутверждение:

$\dot\forall A\ \dot\forall \delta\ (\mathrm{V}'_1(A, \delta)$, е.т.е. $\mathrm{V}'(\psi(A), \delta))$.

Из него, по законам первопорядковой логики, следует:

$$\dot{\forall} A\ (\dot{\forall}\ \delta\ \mathrm{V}'_1(A, \delta), \text{ е.т.е. } \dot{\forall}\ \delta\ \mathrm{V}'(\psi(A), \delta)).$$

Последнее означает, что произвольная формула A V'_1-общезначима в том и только в том случае, когда V'-общезначим её перевод $\psi(A)$.

Теорема 2 доказана.

Последнее утверждение, которое нам потребуется для доказательства адекватности сформулированной выше семантики исчислению ФС, таково:

Теорема 3. Для произвольной силлогистической формулы A верно, что $\psi(A)$ доказуема в ИФС, е.т.е. $\psi(A)$ — V'-общезначимая формула.

В работе [Маркин 2016] были продемонстрированы семантические непротиворечивость и полнота силлогистики ИФС: произвольная формула языка силлогистики доказуема в данной системе, е.т.е. она V'-общезначима. Поскольку ψ-перевод любой формулы силлогистического языка также принадлежит этому языку, то указанная равносильность (доказуемости и общезначимости) имеет место и для него.

Теорема 3 доказана.

Основная теорема является элементарным следствием из трех предыдущих.

Теорема 4. Произвольная силлогистическая формула A доказуема в исчислении ФС, е.т.е. A V'_1-общезначима.

Согласно Теореме 1, доказуемость произвольной формулы A в системе ФС равносильна доказуемости ее перевода $\psi(A)$ в системе ИФС. Согласно Теореме 3, доказуемость $\psi(A)$ в ИФС равносильна V'-общезначимости $\psi(A)$. Наконец, согласно Теореме 2, V'-общезначимость $\psi(A)$ равносильна V'_1-общезначимости формулы A.

Теорема 4 доказана.

Таким образом, мы продемонстрировали, что позитивная фундаментальная силлогистика, формализуемая исчислением ФС, имеет адекватную семантику, в которой общим терминам в качестве значений приписываются формулы пропозиционального языка, а условия значимости силлогистических формул задаются с использованием отношения релевантного следования. Подобный результат может быть получен также применительно к некоторым другим известным системам позитивной силлогистики.

Литература

Лейбниц 1984 — *Лейбниц Г. В.* Сочинения в 4-х томах. Т. 3. М.: Мысль, 1984.

Маркин 2001 — *Маркин В. И.* Интенсиональная семантика традиционной силлогистики // Логические исследования. 2001. Вып. 8. С. 82–91.

Маркин 2002 — *Маркин В. И.* Фундаментальная силлогистика с интенсиональной точки зрения // Логические исследования. 2002. Вып. 9. С. 119–130.

Маркин 2016 — *Маркин В. И.* Интерпретация категорических высказываний в терминах релевантного следования // Логические исследования. 2016. Т. 22. № 1. С. 70–81.

Смирнов 2002 — *Смирнов В. А.* Логические методы анализа научного знания. М.: Эдиториал УРСС. 2002.

Шалак 2015 — *Шалак В. И.* Синтаксическая интерпретация категорических атрибутивных высказываний // Логические исследования. 2015. Т. 21. № 1. С. 60–78.

Shepherdson 1956 — *Shepherdson J. C.* On the Interpretation of Aristotelian Syllogistic // Journal of Symbolic Logic. 1956. Vol. 21. No. 2. P. 137–147.