К. Г. Фролов[1]

ОСМЫСЛЕННОСТЬ. ПОЗНАВАЕМОСТЬ. ПРОВЕРЯЕМОСТЬ

Резюме. В статье подвергнуты анализу взаимоотношения между понятиями осмысленности, проверяемости и познаваемости. На конкретном примере одной из алгоритимически неразрешимых задач мы рассматриваем те семантические затрудения, с которыми сталкивается позиция верификационизма, строго увязывающего осмысленность с проверяемостью. В качестве примера такого рода была выбрана так называемая проблема смертности матриц.
В заключении делается вывод о том, что разграничение осмысленных и бессмысленных выражений следует проводить не на формальной основе неких строгих критериев, а на тех же принципах, на которых ныне проводится выделение класса грамматически корректных высказываний. Таким образом, в основе подобной методологии должен лежать эмпирический материал в форме отчетов носителей языка.

Ключевые слова: осмысленность, верификационизм, семантика, алгоритмическая неразрешимость, смертность матриц, число Чамперноуна.

Konstantin Frolov

MEANINGFULNESS. KNOWABILITY. VERIFIABILITY

Abstract. The article analyses the relations between the concepts of meaningfulness, verifiability and knowability. We start from the position of verificationism, which identifies meaningfulness and verifiability. To point out some semantic difficulties of this position, we appeal to so-called matrix mortality problem, which is known as algorithmically unsolvable. Thus, we deal with statements which are unverifiable but still meaningful.
In conclusion, we claim that the distinction between meaningful and meaningless expressions should be based not on certain strict criteria but on the same principles as those on which the class of grammatically correct statements is nowadays selected. Therefore, the methodology of this distinction should be based on reports of native speakers.

Keywords: meaningfulness, verificationism, semantics, algorithmically unsolvability, matrix mortality problem, Champernowne constant.

Под осмысленностью в контексте данной статьи мы будем понимать способность того или иного высказывания быть истинным или ложным. Соответственно, минимальным требованием для осмысленности является грамматическая корректность рассматриваемого выражения, которой однако отнюдь не достаточно. Как следствие, задача разделения всех возможных последовательностей символов на два

[1] *Фролов Константин Геннадьевич*, кандидат философских наук, ассистент кафедры философии Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ».
Konstantin Frolov, assistant lecturer, St. Petersburg Electrotechnical University.
konstantin-frolov@yandex.ru

класса — осмысленных и бессмысленных выражений — оказывается далекой от тривиальности. Ее решение должно предполагать существование некоего эффективного критерия для подобного разграничения.

В качестве исходного пункта рассуждений в данном случае уместно взять позицию верификационизма, согласно которому «предложение осмысленно, если и только если его истинность могла бы повлиять на наш на наш опыт; экспериментально принципиально неподтверждаемое предложение является бессмысленным. Более того, смыслом (meaning) всякого предложения являются условия его истинности — условия, при которых возможный опыт свидетельствовал бы о том, что утверждение истинно» [Lycan 2000: 98].

Первое утверждение из вышеприведенного фрагмента практически неотличимо от так называемого принципа познаваемости. В таком случае имеем: «предложение осмысленно если и только если его истинность влечет его познаваемость», что символически можно выразить следующим образом:

$$p \text{ осмысленно} \Leftrightarrow p \rightarrow \diamond Kp$$

Сторонников такого процедурного понимания смысла нетрудно найти и в рамках отечественной логико-философской традиции. Так, И. Б. Микиртумов пишет: «Анализируя высказывания Фреге, можно сделать вывод о том, что смысл в определенном отношении задает денотат, иными словами, что знание смысла предложения есть знание условий его истинности (еще одно определение Черча [Черч 1960: 31–32]), так что остается только удостовериться в том, выполняются они или нет. Так можно интерпретировать мысль Фреге о пути от смысла к денотату, по которому мы идем, стремясь к истине [там же: 235]. И это делает правдоподобной еще одну трактовку отношения смысла и денотата, которую можно назвать конструктивной: смысл есть процедура проверки предложения, т. е. процедура установления его денотата» [Микиртумов 2011: 138]. И далее: «Суть конструктивного подхода к семантике выражают слова Н. А. Шанина: «При вполне финитарной ситуации человек, формулирующий с утвердительной интонацией какое-либо суждение в качестве своего знания о некоторых связях между объектами, о которых идет речь в суждениях, фактически сообщает следующее: вот зашифрованное описание определенного эксперимента, и его ожидаемым результатом является определенный „сигнал“ — булева константа „И“ (или слово „истина“)» [Шанин 1992: 15].

Упоминание Н. А. Шаниным условия финитарности весьма примечательно, поскольку выходя за пределы такого рода ограничений получающийся тезис (а также и тесно связанный с ним принцип познаваемости) оказывается чрезвычайно силен. Ведь даже в пределах одних лишь математических проблем хорошо известен класс алгоритмически неразрешимых задач.

В качестве примера связанных с ними затруднений рассмотрим проблему «смертности» пары матриц: для данной пары матриц A_1, A_2 размерности 15×15 с произвольными целыми коэффициентами требуется определить, существует ли конечное число k, такое что произведение k штук этих матриц в каком-либо порядке дает нулевую матрицу. Тот же вопрос можно поставить в несколько иной форме: принадлежит ли нулевая матрица соответствующей размерности замыканию множества $\{A_1, A_2\}$ над операцией умножения (т.е. принадлежит ли она полугруппе, порождаемой множеством $\{A_1, A_2\}$).

Известно, что данная задача является алгоритмически неразрешимой [Bell, Potapov 2008]. Что это значит? Это значит, что если мы рассуждаем в рамках классической логики, то для каждой пары матриц указанной размерности соответствующее число k либо существует, либо нет. Если оно существует, то, разумеется, в силу рекурсивной перечислимости всякого такого замыкания, перебирая все его элементы, упорядоченные по длине цепи множителей, мы рано или поздно найдем желаемое k. Даже если оно равно, скажем, $10^{10^{10}}$ и, соответственно, даже если физически эмпирическая процедура проверки ничем не отличается от ситуации отрицательного ответа (машина не останавливается в течение разумного срока жизни человечества даже с учетом реалистичного прогресса вычислительных мощностей), для принципа познаваемости достаточно лишь возможности потенциальной проверки опытом. То есть достаточно возможности непротиворечивого описания мысленного эксперимента, апеллирующего к мирам с иными физическими законами и ограничениями.

Однако если такого конечного k не существует, то доказать этот факт в общем случае не представляется возможным. Таким образом, всякое такое замыкание является нерекурсивным, хотя и рекурсивно перечислимым множеством. Соответственно, если мы возьмем в качестве примера высказывание

($*$) Для данной пары матриц A_1 и A_2 не существует такого k, что произведение их k штук равно нулевой матрице,

то никакой эксперимент не сможет на выходе дать сигнал «Истина».

В то же время высказывание ($*$) выглядит вполне осмысленным в том отношении, что оно понятно любому носителю русского языка, знакомому с соответствующей несложной терминологией. А это, в свою очередь, противоречит (с известными оговорками о нефинитарном характере данного утверждения) вышеприведенному тезису Шанина — произнося ($*$) с утвердительной интонацией, мы тем самым вовсе не имеем в виду «вот зашифрованное описание определенного эксперимента, и его ожидаемым результатом является определенный сигнал „Истина“». Ведь мы знаем, что такого гипотетического эксперимента не существует. Значит ли это, что мы не можем произносить ($*$) с утвердительной интонацией? Едва ли. Ведь мы можем верить в его истинность. Так, некоторые люди обладают ощущением того, что те или иные числа являются простыми. Наличие такого ощущения, разумеется, не является доказательством, однако оно вполне может быть *основанием* для личного убеждения (возможно, ошибочного).

Итак, мы вполне можем верить в истинность того, что не может быть проверено. При каких же условиях $(*)$ является истинным? $(*)$ является истинным, если нулевая матрица не принадлежит замыканию множества $\{A_1, A_2\}$ по умножению. Как это можно проверить? Никак. Условия истинности $(*)$ существуют, но не являются эмпирическими.

Значит ли это, что мы должны отвергнуть осмысленность $(*)$ как лишь кажущуюся, иллюзорную? Что ж, если мы так поступим, то попадем в весьма неприятную ситуацию доказуемости того, что существуют утверждения, являющиеся истинными (т. е. такими, что условия их истинности выполняются), но при этом все же бессмысленными в силу их неверифицируемости. Для этого достаточно лишь доказать, что нулевая матрица принадлежит не всякому замыканию пары матриц соответствующей размерности над операцией умножения. Такое доказательство вовсе не обязательно потребует предъявления конкретной фальсифицирующей пары. В таком случае мы, возможно, можем знать, что существуют такие A_1 и A_2, при подстановке которых в высказывание $(*)$ получается истинное утверждение, при том что высказывание $(*)$ для любых A_1 и A_2 является неверифицируемым, а следовательно процедурно бессмысленным.

Таким образом, естественные платонистские интуиции склоняют к возможности ситуации, когда «на самом деле» ответ отрицателен, хотя узнать об этом, то есть получить достаточные эмпирические основания для такого убеждения, не представляется возможным.

Иной пример. Определим множество M следующим образом: оно состоит из всех конечных последовательностей цифр, встречающихся в десятичной записи числа π. Нетрудно показать, что такое множество рекурсивно-перечислимо. Алгоритм, последовательно выдающий все его элементы, строится следующим образом. На i-том шаге вычисляется очередная, i-тая цифра десятичной записи числа π: a_i.

Тогда положим:

$$M_i = M_{i-1} \cup \{a_i,\ a_{i-1}a_i,\ a_{i-2}a_{i-1}a_i,\ \ldots,\ a_1a_2 ... a_{i-2}a_{i-1}a_i\}$$

Например, $M_5 = \{1, 4, 14, 41, 141, 5, 15, 415, 1415\} \cup \{9, 59, 159, 4159, 14159\}$

$$M_6 = \{1, 4, 14, 41, 141, 5, 15, 415, 1415, 9, 59, 159, 4159, 14159\} \cup$$
$$\cup \{2, 92, 592, 1592, 41592, 141592\}$$
$$M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$$

Хорошо известен тот факт, что элемент[2] 999999 принадлежит множеству M. Десятичная позиция $i = 762$, начиная с которой идет данная последовательность, называется точкой Фейнмана. Последовательность 123456789 также принадлежит

[2]Не стоит считать элементы множества M числами, поскольку среди них имеются такие последовательности, как 00, 01, 021 и пр.

M. Но что происходит в общем случае? Является ли проблема принадлежности произвольного, заданного элемента n к M разрешимой?

Ответ на данный вопрос в существенной мере зависит от того, как устроено множество M, что в свою очередь тесно связано с проблемой нормальности числа π. Напомним, что действительное число называется нормальным в десятичной системе счисления, если каждая группа из k последовательных цифр встречается в его десятичной записи с асимптотической плотностью 10^{-k}. Так, каждая из десяти цифр должна встречаться с асимптотической плотностью $1/10$, каждая из последовательностей 00–99 с асимптотической плотностью $1/100$, и так далее для последовательностей любой длины k[3].

Соответственно, в нормальном числе последовательность из тысячи девяток встречается с асимптотической плотностью $1/10^{1000}$, что с учетом бесконечного числа знаков после запятой означает, что она встречается там бесконечное число раз. Таким образом, для всякой последовательности конечной длины k существует отличная от нуля асимптотическая плотность, а значит множество M совпадает с множеством всех возможных конечных последовательностей. В таком случае, если когда-либо будет доказано, что число π является нормальным, то разрешающий алгоритм для исходной проблемы разрешимости окажется тривиален — он просто должен выдавать утвердительный ответ (единицу, истину) на всякий корректный запрос. Таким образом, множество M может оказаться разрешимым даже в том случае, если функциональная проблема вычисления $i(n)$ (то есть, вычисления ближайшей десятичной позиции, с которой начинается последовательность n) не имеет алгоритмического решения.

Заметим, что в случае проблемы смертности пары матриц такой обходной путь оказывается недоступен. В самом деле, множество M в этом случае является замкнутым относительно умножения — для любых его элементов (которые являются результатами произведений исходных двух матриц в некотором порядке) их произведение также принадлежит множеству M. При этом нет никаких оснований полагать, что в общем случае оно совпадает с множеством всех возможных матриц соответствующей размерности с целочисленными коэффициентами (и, соответственно, что наш разрешающий алгоритм окажется тривиален). Ведь в подавляющем большинстве случаев может быть строго доказано, что множеству M, по крайней мере, не принадлежит единичная матрица E, поскольку факт такой принадлежности означал бы целочисленную обратимость одной из двух исходных матриц, необходимым и достаточным условием чего является равенство опреде-

[3]Существование чисел, нормальных в десятичной записи — доказанный факт. Пример такого рода — число Чамперноуна [Champernowne 1933], получающееся последовательной конкатенацией после запятой всех натуральных чисел: $C_{10} = 0,12345678910111213141516\ldots$. Существование чисел, не являющихся нормальным, также не вызывает сомнений. Достаточно взять любое нормальное число (например, вышеуказанное) и произвести замену всех встречающихся в нем нулей на единицы, после чего условие, налагаемое на асимптотические плотности, будет нарушено.

лителя такой матрицы 1 или -1 [Фаддеев 1984: 136].

Создают ли подобные примеры непреодолимые трудности для тезиса о познаваемости всех истин? Вообще говоря, подходить к такому вопросу можно по-разному. Можно, исходя из платонистских воззрений, говорить о том, что бесконечное замкнутое множество матриц M, данное со всей актуальной бесконечностью своих элементов, не принадлежит предметной области актуального мира. Поэтому некоторые факты, имеющие место в таком платонистском реалме, вполне могут быть непознаваемыми, что нисколько не умаляет исходный тезис, так как его следует применять лишь к фактам мира физического, в котором (возможно) нет места бесконечности и сопряженным с этим понятием известным трудностям. Исходя же из радикально номиналистских воззрений, можно и вовсе отрицать, что утверждения о математических объектах выражают какие-либо факты. В частности, представителем такой крайней позиции был, как известно, Л. Витгенштейн, утверждавший в своем «Трактате»: «6.21. Предложение математики не выражает никакой мысли»[4] [Wittgenstein 1961: 133]. Наконец, можно на основании интуиционистских воззрений отрицать само существование какого-либо недостижимого «на самом деле» применительно к математическим утверждениям, подразумевая под этим, что всякий математический факт может быть дан в интеллектуальном опыте потенциально конструктивным образом. Таким образом, мы прямо и непосредственно постулируем познаваемость всех математических истин: что не может быть познано (вычислено, построено), в отношении того не могут выполняться никакие утверждения. Любой разговор о таких объектах лишен всякого смысла.

Вообще говоря, именно вопрос о том, где следует проводить границы осмысленности, и является ключевым при анализе рассматриваемых нами проблем. Так, выше мы видели, что доказательство нормальности числа π может позволить охарактеризовать множество M как разрешимое. Предположим, что такое условие оказалось выполнено. Расширим тогда множество M, пополнив его счетным количеством бесконечных последовательностей цифр, встречающихся в числе π. На первом шаге добавим к M элемент π_1 — всю дробную часть числа π. На втором шаге добавим элемент π_2 — ту же последовательность, но начинающуюся со второго десятичного знака (т. е. с четверки). Затем начинающуюся с третьего, и так далее. Назовем получившееся в итоге множество M_ω, после чего сформулируем следующее утверждение:

(∗∗) Дробная часть числа Чамперноуна, C_{10} (т.е. последовательная конкатенация всех чисел натурального ряда), не принадлежит множеству M_ω.

Очевидно, что доказать его истинность, опираясь на одно лишь свойство нор-

[4] А также в другом месте: «5.43. И не менее удивительно, что бесконечное количество предложений логики (математики) следует из полдюжины „исходных предложений“. Но все предложения логики говорят одно и то же. А именно ничего» [Wittgenstein 1961: 89].

мальности, не получится. Нормальность C_{10}, доказанная еще в 1933 году [Champernowne 1933], гарантирует, что его наличие в качестве подпоследовательности десятичной записи не скажется на нормальности π. При этом хотя C_{10} и будет иметь нулевую асимптотическую плотность, но, тем не менее, сочетание такой плотности с бесконечным количеством элементов во множестве M_ω не позволяет прийти к какому-либо итоговому ответу на счет истинности утверждения $(**)$.

Примечательно, что множеством M_ω по-прежнему является рекурсивно перечислимым! Нужно лишь слегка видоизменить уже описанный выше алгоритм, перечисляющий элементы M, включив в него бесконечные последовательности таким образом, чтобы они шли сразу вслед за конечным элементом, дополнением которого они являются до всей дробной части числа π. Например:

$$M_5 = \{\pi_1, 1, \pi_2, 4, 14, \pi_3, 41, 141, \pi_4, 5, 15, 415, 1415, \pi_5\} \cup \{9, 59, 159, 4159, 14159, \pi_6\}$$

$$M_6 = \{\pi_1, 1, \pi_2, 4, 14, \pi_3, 41, 141, \pi_4, 5, 15, 415, 1415, \pi_5, 9, 59, 159, 4159, 14159, \pi_6\} \cup \\ \cup \{2, 92, 592, 1592, 41592, 141592, \pi_7\}$$

$$M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$$

Таким образом, рекурсивная перечислимость множества M_ω свидетельствует о том, что если дробная часть числа Чамперноуна встречается в дробной части числа π (т.е. если число π «заканчивается» числом Чамперноуна), то рано или поздно на некотором шаге мы ее обнаружим. Разумеется, интуиции говорят о том, что истинность данного утверждения обеспечивается ложностью его антецедента. Разумеется, также встает вопрос о невозможности полного сличения любого кандидата π_n с C_{10}. Сколько бы ни совпадало у них первых цифр, всегда остается возможность их расхождения в дальнейшем.

Но главное — оперирование с подобными гипотезами сталкивается с серьезным сопротивлением интуиции относительно осмысленности рассматриваемых проблем и их связи с действительностью. С одной стороны, число Чамперноуна — безусловно корректно определенный математический объект, в отношении десятичной записи которого доказан строгий математический результат. Число π также является привычным объектом математического универсума рассуждений. И даже его десятичная запись — не более чем обычная бесконечная числовая последовательность. Однако вопрос о том, является ли одна бесконечная последовательность подпоследовательностью другой бесконечной последовательности, неожиданно оказывается кандидатом в строго бессмысленные. Интуитивно ожидаемый отрицательный ответ не может быть подкреплен никакими доказательствами, вычислениями или эмпирическими свидетельствами. Можно говорить о том, что истинность или ложность утверждения $(**)$ никак не способна повлиять на наш опыт.

Подводя некоторые итоги, следует заметить, что оба описанных сюжета — и тот, что касается смертности матриц, и тот, что посвящен рассмотрению последовательностей в десятичной записи числа π, — в конечном итоге отсылают нас к особой «естественной семантике» понятия «никогда». Поэтому в заключение обратимся к их аналогу, не относящемуся к сфере математики:

(∗∗∗) Никогда не будет существовать шара из чистого золота диаметром в 1 километр [van Fraassen 1989: 27].

Что можно сказать о таком выражении?

С одной стороны, в той мере, в какой существование подобной золотой сферы не противоречит известным нам сегодня законам природы, подобное утверждение может быть эмпирически лишь опровергнуто, но не доказано. Таким образом, его произнесение с утвердительной интонацией не предполагает ничего вроде «зашифрованного описания определенного эксперимента, с ожидаемым результатом „Истина“».

С другой стороны, верить в истинность (∗∗∗) вполне допустимо и рационально, что, в свою очередь, подрывает целесообразность отнесения его к числу бессмысленных выражений.

Эти обстоятельства вынуждают нас отклонить верификационистский критерий осмысленности предложений.

Но что в данной ситуации можно предложить взамен? На наш взгляд, было бы целесообразно доверить разграничение между осмысленными и бессмысленными выражениями тому же эксперту, которому мы доверяем определение грамматичности, — то есть носителю языка. Осмысленность в данном случае тесно увязывается с понятностью. Понятность же, в свою очередь, предлагается связывать не со способностью *иметь*, а со способностью *передавать* значение, где само понятие значения следует трактовать в типично грайсианском ключе: «x означает нечто» истинно, если произнесение x имело целью породить у аудитории некоторое убеждение, причем формирование такого убеждения должно происходить «путем распознавания со стороны аудитории намерения говорящего» [Grice 1957: 383]. Стоит заметить, что фактического порождения убеждения здесь не требуется, аудитория вполне может не согласиться с говорящим, не поверить ему. Важно лишь, чтобы слушатели (читатели) распознали, что именно он пытался до них донести. Разумеется, в спорных случаях отчеты разных носителей могут расходиться между собой. Тем не менее, подобный перенос проблемы осмысленности в эмпирическую, строго лингвистическую плоскость позволяет сформулировать общую методологию исследования, не только справляющуюся с разного рода нечеткостью границ, но и не сталкивающуюся с непреодолимыми эпистемологическими и метафизическими затруднениями.

Литература

Микиртумов 2011 — *Микиртумов, И. Б.* Аспекты значения и «праща» Дэвидсона // Логическая семантика: перспективы для философии языка и эпистемологии. М.: Креативная экономика. С. 126–142.

Фаддеев 1984 — *Фаддеев, Д. К.* Лекции по алгебре. М.: Наука. 415 с.

Черч 1960 — *Черч, А.* Введение в математическую логику. М.: Издательство иностранной литературы. 484 с.

Шанин 1992 — *Шанин, Н. А.* Некоторые черты математического подхода к проблемам логики // Вестник СПбГУ. Сер. 6. № 4. С. 10–20.

Bell, Potapov 2008 — *Bell, P., Potapov, I.* On undecidability bounds for matrix decision problems // Theoretical Computer Science 391. Pp. 3–13.

Champernowne 1933 — *Champernowne, D. G.* The construction of decimals normal in the scale of ten // Journal of the London Mathematical Society 8. Pp. 254–260.

van Fraassen 1989 — *van Fraassen, B.* Laws and Symmetry. Oxford: Clarendon Press.

Grice 1957 — *Grice, H. P.* Meaning // The Philosophical Review 66. Pp. 377–388.

Wittgenstein 1961 — *Wittgenstein, L.* Tractatus Logico-Philosophicus. London: Routledge and Kegan Paul. 166 p.