С. И. Башмаков

Институт математики и фундаментальной информатики СФУ

УНИФИКАЦИОННАЯ ПРОБЛЕМА В ПРЕДТАБЛИЧНОЙ МОДАЛЬНОЙ ЛОГИКЕ PM2

Теория унификации Унификационная проблема, чаще формулируемая в виде возможности преобразовать формулу в теорему после замены переменных, имеет важное значение в области неклассических логик, теории информации, компьютерных науках, а также многочисленные связи с фундаментальными основами алгебраических, топологических, эквациональных систем и теорией категорий.

Формула $\varphi(p_1, \dots, p_s)$ называется *унифицируемой* в логике $\mathcal{L}$ тогда и только тогда, когда существует подстановка (*унификатор*) $\sigma : p_i \mapsto \sigma_i$ для каждой p_i такая, что $\varphi(\sigma_1, \dots, \sigma_s) \in \mathcal{L}$. Будем называть *основным* (или *граунд*) унификатор, полученный путем подстановки констант $\{\top, \bot\}$ вместо переменных.

Унификатор σ формулы $\varphi(p_1, \dots, p_s)$ называется *более общим* чем другой σ^1 в $\mathcal{L}$ ($\sigma^1 \preceq \sigma$), если существует подстановка σ^2 такая, что для любой переменной $p_i \in Var(\varphi)$: $\sigma^1(p_i) \equiv \sigma^2(\sigma(p_i)) \in \mathcal{L}$.

Унификатор σ формулы $\varphi(p_1, \dots, p_s)$ называется *максимальным*, если для любого другого σ^i, $\sigma^i \preceq \sigma$. Если формула имеет единственный максимальный унификатор, то он называется *наиболее общим* (кратко НОУ). Набор унификаторов CU для формулы φ называется *полным* в $\mathcal{L}$, если для любого унификатора σ формулы φ найдется $\sigma_1 \in CU$: $\sigma \preceq \sigma^1$.

Логика имеет *унитарный* тип унификации, если для любой унифицируемой формулы в логике существует НОУ. Если найдутся унифицируемые формулы, не имеющие НОУ, то логика может обладать следующими типами унификации: *финитарный*, при существовании только конечных наборов максимальных унификаторов для каждой такой формулы в логике; *инфинитарный*, если найдутся формулы имеющие бесконечное число максимальных унификаторов; *нульарный*, если некоторые унифицируемые формулы не имеют максимальных унификаторов, [1].

Подстановка τ называется *проективным унификатором* для формулы $\alpha(p_1, \dots, p_s)$ в логике $\mathcal{L}$, если выполняются оба следующих условия:

1. $\tau(\alpha) \in \mathcal{L}$ (т.е. τ – унификатор для α);
2. $\Box\alpha \to [p_i \equiv \tau(p_i)] \in \mathcal{L}$ для любой переменной $p_i \in Var(\alpha)$.

С. Гиларди исследовал целый ряд нестандартных логик, таких как $\mathcal{I}nt$, $\mathcal{K}4$, $\mathcal{S}4$, $\mathcal{S}4\mathcal{G}rz$, $\mathcal{GL}$, для которых установил финитарную унификацию [1]. Особое место в теории унификации занимает его подход через проективные формулы, позволивших описывать полные наборы унификаторов для формул, а также исследовать тип унификации в логике. Многие последующие работы так или иначе используют идеи С. Гиларди и развивают их. В. Джик доказал унитарный тип унификации для известных систем $\mathcal{S}4.3$, $\mathcal{S}5$, модифицировал подход через дискриминаторные многообразия С. Бурриса. Значительный вклад в теорию унификации ряда известных логик внес В.В. Рыбаков, исследовавший $\mathcal{K}4$, $\mathcal{S}4$, $\mathcal{S}4.3$, $\mathcal{I}nt$ (напр., [2, 3]), а также многие временные и многоагентные логики.

Известны результаты для некоторых «плохих» относительно унификации систем. В частности, Э. Ерабека, доказавшего нульарный тип для минимальной нормальной логики $\mathcal{K}$, Ф. Вольтера и М.В. Захарьящева, доказавших неразрешимость унификации в $\mathcal{K}$ с дополнительной универсальной модальностью, Ф. Баадера и Б. Моравска, показавших нульарный тип для дескрипционной логики $\mathcal{EL}$.

Предтабличная нормальная модальная логика $\mathbf{PM2}$ Рассматриваемая логика $\mathbf{PM2}$ является одним из 5-ти предтабличных расширений нормальной модальной логики $\mathcal{S}4$, описанных Л.Л. Максимовой [4], Л.Л. Эсакиа и В.Ю. Месхи [5].

$$\mathbf{PM2} = \mathcal{G}rz + [\Box p \vee \Box(\Box p \to \Box q \vee \Box\Diamond\neg q)].$$

Хорошо известно [4], что предтабличной логике $\mathbf{PM1}$ соответствует известная модальная система $\mathcal{S}4.3$, логике $\mathbf{PM5}$ – модальная $\mathcal{S}5$. Поэтому проективность унификации (и, как следствие, унитарный тип) в данных логиках следует из результатов В. Джика и В.В. Рыбакова. Случаи $\mathbf{PM2}, \mathbf{PM3}$ и $\mathbf{PM4}$ остаются открытым и интересным вопросом.

Логика $\mathbf{PM2}$ полна по Крипке и характеризуется классом всех частично упорядоченных фреймов не содержащих 3-элементных цепей [6] или всех конечных «вееров» [5]

$\mathbb{V}_n = \langle V_n, R \rangle$, где $V_n = \{0, 1, \dots, n\}$, и $xRy \Leftrightarrow (x = 0 \vee x = y)$.

Таким образом, удобно определить логику $\mathbf{PM2}$ как множество всех формул языка $L^{\mathcal{S}4}$ истинных на всех фреймах $\mathbb{V}_n$.

Лемма 1. *Унифицируемость произвольной формулы $\varphi(p_1, \dots, p_s)$ в $\mathbf{PM2}$ может быть эффективно установлена при помощи подстановок $\sigma(\varphi) : \forall p_i \in Var(\varphi)\ \sigma(p_i) \in \{\top, \bot\}$.*

Как известно из Леммы Гиларди [1], если логика обладает проективной унификацией, то любая унифицируемая формула в этой логике обладает НОУ, а значит сама логика имеет унитарный тип унификации. Однако, для логики $\mathbf{PM2}$ в работе доказывается

Лемма 2. *В логике $\mathbf{PM2}$ существуют унифицируемые формулы не обладающие проективной унификацией.*

Из Леммы 2 не следует отсутствие унитарного типа логики, однако, используя технику Гиларди [1] для логик с дизъюнктивным свойством, доказана

Лемма 3. *Логика $\mathbf{PM2}$ не имеет унитарной унификации.*

В работе доказывается, что $\mathbf{PM2}$ обладает финитарным типом, предлагается описание конечных полных наборов унификаторов.

Работа выполнена при финансовой поддержке «Фонда поддержки молодых ученых «Конкурс Мёбиуса».

Литература

[1] Ghilardi S. Best solving modal equations. *Annals of Pure and Applied Logic* 102(3), 2000, pp. 183–198.

[2] Rybakov V. V. Best unifiers in transitive modal logics. *Studia Logica* 99(1–3), 2011, pp. 321–336.

[3] Bashmakov S. I., Kosheleva A. V., Rybakov V. Unification for multi-agent temporal logics with universal modality. *IfCoLog J. of Logics and their Application* 4(4): Issue Dedicated to the Memory of G. Mints, 2017, pp. 939–954.

[4] Максимова Л. Л. Предтабличные расширения логики S4 Льюиса. *Алгебра и логика* 14(1), 1975, с. 28–55.

[5] Esakia L., Meskhi V. Five critical modal systems. *Theoria* 43(1), 1977, pp. 52–60.

[6] Maksimova L. LC and its pretabular relatives. *J. Michael Dunn on Information Based Logics. Outstanding Contributions to Logic* Vol. 8. Springer, Cham., 2016, pp. 81–91.