

Л. Ю. Девяткин, ИФ РАН

## О КВАЗИМАТРИЧНЫХ СЕМАНТИКАХ

В исследованиях по многозначным логикам важную роль играет метод логических матриц. В литературе известно несколько модификаций и обобщений матричного подхода: разветвленные (*ramified*) матрицы [6, Ch. 3],  $q$ -матрицы [4], матрицы с обобщенными значениями истинности [5], а также матрицы, построенные на базе мультиалгебр, которые называют квазиматрицами [3] или недетерминистическими матрицами [1]. Для матричных семантик получено множество полезных результатов. Предметом этого доклада является обобщение некоторых из них для квазиматриц.

Пропозициональный язык  $\mathcal{L} = \langle L, F \rangle$  определяем как абсолютно свободную алгебру, свободные порождающие  $\mathcal{L}$  образуют счетное множество  $Var = \{p_1, p_2, \dots\}$ . Называем *отношением следования* рефлексивное, монотонное и транзитивное отношение  $C$  на  $\mathcal{L}$ . Если  $C$  — структурное отношение следования на  $\mathcal{L}$ , называем систему  $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, C \rangle$  *пропозициональной логикой*.

Называем *логической матрицей* систему  $M = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ , где  $\mathcal{A} = \langle A, F \rangle$  — алгебра, и  $D \subseteq A$ . Называем  $M$  *матрицей для  $\mathcal{L}$* , если и только если  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{A}$  подобны. Тогда гомоморфизм  $h$  из  $\mathcal{L}$  в  $\mathcal{A}$  называем *оценкой* формулы языка  $\mathcal{L}$  в матрице  $M$ . *Матричное следование* на  $\mathcal{L}$ , порождаемое  $M$ , определяем как множество  $Cn(M) = \{\langle X, \alpha \rangle \mid \forall h (h(X) \subseteq D \implies h(\alpha) \in D)\}$ . Пусть  $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, C \rangle$  — пропозициональная логика, а  $M$  — матрица для  $\mathcal{L}$ . Определяем  $Matr(C)$  следующим образом:  $M \in Matr(C) \iff C \subseteq Cn(M)$ .

Называем *мультиоперацией* отображение вида  $A^n \rightarrow \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ ; *мультиалгеброй* — систему  $\mathcal{A} = \langle A, F \rangle$ , где  $A$  — непустое множество, а  $F$  — семейство мультиопераций на  $A$ ; *квазиматрицей* — систему  $M = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ , где  $\mathcal{A}$  — мультиалгебра, а  $D$  — подмножество множества-носителя  $\mathcal{A}$ . Если мультиалгебра  $\mathcal{A}$  и пропозициональный язык  $\mathcal{L}$  подобны, называем *оценкой* формулы языка  $\mathcal{L}$  в квазиматрице  $M$  отображение  $h : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{A}$ , такое что  $h(f_L(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) \in f_A(h(\alpha_1), \dots, h(\alpha_n))$ . *Квазиматричное следование* на  $\mathcal{L}$ , порождаемое  $M$ , определяем как множество  $Cn^*(M) = \{\langle X, \alpha \rangle \mid \forall h (h(X) \subseteq D \implies h(\alpha) \in D)\}$ . Пусть  $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, C \rangle$  — пропозициональная логика, а  $M$  — квазиматрица для  $\mathcal{L}$ . Определяем  $NMatr(C)$  следующим образом:  $M \in NMatr(C) \iff C \subseteq Cn^*(M)$ .

Если область значений операций в квазиматрице ограничена одноэлементными подмножествами носителя, она есть матрица. Поэтому  $Matr(C) \subseteq NMatr(C)$ .

Пусть  $M = \langle \mathcal{A}, F, D \rangle$  — квазиматрица. Называем  $M' = \langle \mathcal{A}', F', D' \rangle$  *подсистемой*  $M$ , если и только если  $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ , семейство операций  $F'$  получено из  $F$  сужением области определения каждого элемента до  $\mathcal{A}'$ , и множество  $\mathcal{A}'$  замкнуто относительно  $F'$ .

Пусть  $\mathcal{A} = \langle A, F \rangle$  — мультиалгебра, и  $\theta \subseteq A \times A$ . Будем называть  $\theta$  *мультиконгруэнцией* тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:  $\theta$  есть отношение эквивалентности; если  $f$  —  $n$ -местная мультиоперация и даны  $\vec{a}, \vec{b} \in A^n$ , где  $\langle a_i, b_i \rangle \in \theta$  для всех  $1 \leq i \leq n$ , то для каждого  $a \in f(\vec{a})$  найдется  $b \in f(\vec{b})$ , такое что  $\langle a, b \rangle \in \theta$ . Если  $M = \langle \mathcal{A}, D \rangle$  — квазиматрица,  $\theta$  — мультиконгруэнция на  $\mathcal{A}$ , и  $\langle a, b \rangle \in \theta$ ,  $a \in D$  влечет  $b \in D$ , будем называть мультиконгруэнцию  $\theta$  *квазиматричной*. Пусть  $\theta$  — квазиматричная мультиконгруэнция на  $M = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ . Называем *фактор квазиматрицей* по  $\theta$  систему  $M/\theta = \langle \mathcal{A}/\theta, D/\theta \rangle$ , где для любых  $f$  и  $\{a_1/\theta, \dots, a_n/\theta\} \in (A/\theta)^n$  выполняется:  $f_{A/\theta}(a_1/\theta, \dots, a_n/\theta) = \{a/\theta \mid a \in f_A(\vec{a})\}$ .

Пусть  $\{M_i\}$ ,  $i \in I$  — семейство попарно подобных квазиматриц. Обозначим эле-

менты декартова произведения их множеств-носителей  $\prod_I A_i$  как  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ . Обозначим как  $\pi_i(\vec{a})$  каноническую проекцию  $A \rightarrow A_i$  для каждого  $i \in I$ . Называем (прямым) *произведением* квазиматриц из  $\{M_i\}$  систему  $M = \langle A, F, D \rangle$ , где  $A = \prod_I A_i$ ,  $D = \prod_I D_i$ , и для каждой мультиоперации  $f_A \in F$  верно, что  $f_A(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k) = \prod_I f_{A_i}(\pi_i(\vec{a}_1), \dots, \pi_i(\vec{a}_k))$ . Пусть  $S$  — множество. Называем *фильтром* на  $S$  набор  $F$  его подмножеств, удовлетворяющий следующим условиям:  $S \in F$ ; если  $A \in F$  и  $A \subseteq B \subseteq S$ , то  $B \in F$ ; если  $A \in F$  и  $B \in F$ , то  $A \cap B \in F$ . Пусть  $M = \langle A, D \rangle$  — произведение квазиматриц  $\{M_i\}$ ,  $i \in I$ , и  $\nabla$  фильтр на  $I$ . Определим мультиконгруэнцию  $\equiv_{\nabla}$  на  $\mathcal{A}$ :  $\vec{a} \equiv_{\nabla} \vec{b} \iff \{i \in I \mid \pi_i(\vec{a}) = \pi_i(\vec{b})\} \in \nabla$ . Фактор квазиматрицу  $M/\nabla$  в этом случае называем *фильтрованным по  $\nabla$  произведением*  $\{M_i\}$ .

Пусть  $\mathcal{A} = \langle A, F \rangle$  и  $\mathcal{A}' = \langle A', F' \rangle$  — две подобные мультиалгебры. Отображение  $h: A \rightarrow A'$  называем *гомоморфизмом*, если и только если для всех  $f$  имеет место  $h(f(a_1, \dots, a_n)) \subseteq f'(h(a_1), \dots, h(a_n))$ . Если  $M = \langle A, D \rangle$  и  $M' = \langle A', D' \rangle$  — квазиматрицы,  $h$  — гомоморфизм из  $\mathcal{A}$  в  $\mathcal{A}'$ , и верно, что  $h(f(a_1, \dots, a_n)) \subseteq D \iff f'(h(a_1), \dots, h(a_n)) \subseteq D'$ , называем  $h$  *квазиматричным гомоморфизмом*. Пусть  $M$  и  $M'$  — квазиматрицы. Называем  $M$  *квазиматрично гомоморфным прообразом*  $M'$ , если и только если существует квазиматричный гомоморфизм из  $M$  на  $M'$ .

Пусть  $\mathbb{K} = \{M_i\}$ ,  $i \in I$  — класс квазиматриц для языка  $\mathcal{L}$ . Пусть  $Cn^*(\mathbb{K}) = \bigcap_I Cn(M_i)$ . Обозначим как  $P_R(\mathbb{K})$  класс всех изоморфных копий фильтрованных произведений непустых подмножеств  $\mathbb{K}$ ;  $S(\mathbb{K})$  — класс всех изоморфных копий всех подсистем квазиматриц из  $\mathbb{K}$ ;  $H_s(\mathbb{K})$  — класс всех гомоморфных копий квазиматриц из  $\mathbb{K}$  относительно квазиматричных гомоморфизмов;  $H_s^{-1}(\mathbb{K})$  — класс всех квазиматрично гомоморфных прообразов квазиматриц из  $\mathbb{K}$ . Следующий факт доказан Я. Челяковским [2]: пусть каждая квазиматрица в  $\mathbb{K}$  есть матрица, и  $Cn(\mathbb{K})$  — финитарное отношение следования, тогда  $Matr(Cn(\mathbb{K})) = H_s^{-1}H_sSP_R(\mathbb{K})$ .

Возникает закономерный вопрос: верно ли, что  $NMatr(Cn^*(\mathbb{K})) = H_s^{-1}H_sSP_R(\mathbb{K})$  для произвольного класса квазиматриц  $\mathbb{K}$ ? Ответу на этот вопрос и разбору сопутствующих проблем посвящен наш доклад.

## Литература

- [1] Avron A., Zamansky A. Non-deterministic semantics for logical systems. *Handbook of Philosophical Logic* 16. Ed. by D.M. Gabbay and F. Guentner. Dordrecht: Springer, 2011, pp. 227–304.
- [2] Czelakowski J. A characterization of  $Matr(C)$ . *Bulletin of the Section of Logic* 8(2), 1979, pp. 83–85.
- [3] Ivlev Yu.V. Generalization of Kalmar's method for quasi-matrix logic. *Logical Investigations* 19, 2013, pp. 281–307.
- [4] Malinowski G. Towards the notion of logical many-valuedness. *Acta Universitatis Lodzianensis, Folia Philosophica* 7, 1990, pp. 97–103.
- [5] Shramko Y., Wansing H. *Truth and Falsehood: An Inquiry into Generalized logical Values*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [6] Wójcicki R. *Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations*. Dordrecht: Kluwer, 1988.