В. А. Степанов, Вычислительный центр имени А. А. Дородницына РАН

КОМПЛЕКСНАЯ ТЕОРИЯ ИСТИНЫ САМОРЕФЕРЕНТНЫХ ПРЕДЛОЖЕНИЙ ДЛЯ $(\neg, \leftrightarrow)$-ЯЗЫКА

1.Двоичная динамическая модель самореферентных предложений.

Парадокс Лжеца, формулируемый в естественном языке, можно адекватно смоделировать в семантически замкнутом языке второго порядка с переменными по формулам: $x, y, z,$ и предикатом истинности $Tr(x)$ с аксиомой Тарского:

$$Tr(x) \leftrightarrow x.$$

Присутствующую в естественном языке самореферентность, в нашем языке будем отмечать явно квантором самореферентности $\mathbf{S}x$, приписываемым слева к ядру самореферентной формулы. Сам квантор $\mathbf{S}x$ вводится с помощью аксиомы самореферентности, являющуюся в нашем языке аналогом Аксиомы о неподвижной точке [3]:

$$\mathbf{S}xP(x) \leftrightarrow P(\mathbf{S}xP(x)).$$

Для анализа рассматриваемых предложений привлечем исследования Пирса [2], который моделировал их бесконечными конструкциями, результат которых в нашем языке выглядит следующим образом:

$$\mathbf{S}xP(x) \leftrightarrow P(P(P(P...(\mathbf{S}xP(x))...)))). \qquad (*)$$

Эта формула выражает результат возможной бесконечной подстановки самореферентной формулы в саму себя. Для оценки бесконечной формулы (*) привлечем пошаговую оценку последовательности конечных формул, получаемых на каждом этапе итерационной процедуры в последовательности Пирса:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}xP(x) &\leftrightarrow P(\mathbf{S}xP(x))\\ &\leftrightarrow P(P(\mathbf{S}xP(x)))\\ &\leftrightarrow P(P(P(\mathbf{S}xP(x))))\\ &\leftrightarrow........................\end{aligned}$$

На основании этого предложена динамическая интерпретация атомарных самореферентных формул $\mathbf{S}xP(x)$, приписывающая каждой такой формуле динамическую систему $(\{0,1\}, p(x))$ с орбитами $< p^n(x), n\in Z^+ >$. Для полного набора связок сформирована логическая матрица 16-значной логики $M_{16}{}^c = (M_2{}^c)^4$.

2.Четырехзначная логика самореферентных предложений.

В рассматриваемом нами $(\neg, \leftrightarrow)$-фрагменте языка логическая матрица $M_4{}^c$ очевидно является подматрицей для $M_{16}{}^c$ и будет выглядеть так:

$M_4{}^c = (M_2{}^c)^2 = <\{11/11, 01/10, 01/10, 00/00\}, \neg, \leftrightarrow, \{11/11\}>=<\{T, A, \neg A, \neg T\},\neg, \leftrightarrow, \{T\}>.$

Буквы здесь означают следующее: T – Truth, A – Liar.

Наблюдение: Истинностные значения организованы как Четверная группа Клейна. Таблица Кэли этой группы представлена на рисунке справа. Выдвинем следующую **Гипотезу комплексности [1, 5]:**

Истинностные значения самореферентных предложений организованы как орты в двумерном векторном пространстве и описываются комплексными числами вида:

$$\text{₮} = a_0T + ia_1A$$

Здесь a_0 и a_1 принимают значения 1, ¬, 0. При определении произведения двух комплексных чисел $\text{₮}_\mathbf{P}$ и $\text{₮}_\mathbf{Q}$ (в нашем случае это функция эквивалентности: $\text{₮}_\mathbf{P} \leftrightarrow \text{₮}_\mathbf{Q}$),

↔	T	A	¬A	¬T
T	T	A	¬A	¬T
A	A	T	¬T	¬A
¬A	¬A	¬T	T	A
¬T	¬T	¬A	A	T

в качестве таблицы умножения используем Таблицу Кэли четверной группы Клейна**.**

3. Исчисление

Формализуем изложенную выше матрицу M_4^c как частичную систему пропозициональных исчислений, базирующихся на эквиваленции и отрицании, по Черчу P^{EN}, или $P^{\leftrightarrow\neg}$ [Черч, 1960].

4.0) T, A;

4.1) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$;

4.2) $(p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)) \leftrightarrow ((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r)$;

4.3) $(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$.

Правилами вывода будут:

4.4) подстановка и

4.5) $p,\ p \leftrightarrow q\ /\ q$. т.н. «модус поненс»

Лемма: *Множества тавтологий (в нашей нотации* T*) для* M_2^c *и* M_4^c *совпадают.* [4].

4. Синтаксические правила вывода, использующие матрицу [M_4^c]

Матрицу M_4^c преобразуем в матрицу [M_4^c], добавив к множеству выделенных значений буквы {A, ¬A, ¬T}:

[M_4^c] = <{ T, A, ¬A, ¬T }, ¬, ↔, { T, A, ¬A, ¬T }>,

Выводимые в таком исчислении формулы разделятся на четыре независимых множества, по числу оценок во множестве выделенных значений. Введем новые синтаксические знаки вывода для каждой из них, а именно: $\vdash_T$, $\vdash_{\neg T}$, $\vdash_A$ $\vdash_{\neg A}$.. Каждый из этих знаков обозначает формулы, выведенные с помощью соответствующих правил вывода. Первый из них, «штопор» $\vdash_T$, обозначает уже известное нам правило вывода под номером 4.5). Остальные задаются с помощью подсказанных таблицей истинности для связок (¬, ↔). Здесь мы запишем их с помощью одной из четырех формул:

$\vdash_T p,\ \vdash_T (p \leftrightarrow q)\ /\ \vdash_T q$

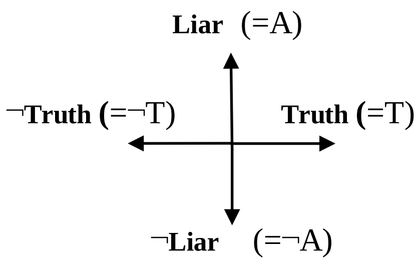
$\vdash_A p,\ \vdash_T (p \leftrightarrow q)\ /\ \vdash_A q$

$\vdash_{\neg A} p,\ \vdash_T (p \leftrightarrow q)\ /\ \vdash_{\neg A} q$.

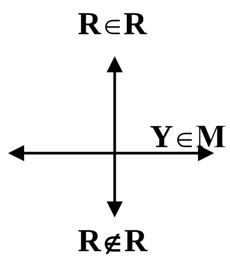
$\vdash_{\neg T} p,\ \vdash_T (p \leftrightarrow q)\ /\ \vdash_{\neg T} q$.

5. Приложение к наивной теории множеств [6].

Введем в язык символы принадлежности: ∈, и равенства: =, (и λ - это для удобства). При этом переменные x, y, z будут пробегать по термам: множествам и их элементам. Пусть $\mathbf{R}=\lambda x.(x\notin x)$, $\mathbf{M}=\lambda x.(F(x))$, причем $F(x)$ не будет генерировать самореферентных множеств. Составим из них такие высказывания: **Y∈M (=T)**, **R∈R** (=**A**), **R∉R** (=¬**A**).



Расположение оценок самореф. предложений в двумерном комплексном пространстве



То же в терминах множеств, включая самореферентные

Логическое значение выражения $\mathbf{Y}\in\mathbf{M}$ $(=\mathbf{T})$ будем считать истинным. В картинках выше мы работаем в одном и том же пространстве – пространстве логических истинностных значений. Коль скоро мы нашли место для самореферентных предложений, являющихся камнем преткновения для большинства систем теории множеств, сформулируем Аксиому свертывания, не прибегая к обычным в таких случаях ограничениям на $F(x)$:

$$\exists y\forall x(x\in y \leftrightarrow F(x)).$$

Литература

1. Кантор Н.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1978.
2. *Emily M.* Pierce's Paradoxical Solution to the Liar's Paradox //NDJFL, Vol.XII, No. 3, 1975.- C. 369-374.
3. Feferman S. Toward Useful Type-Free Theories I. //The JSL, 1984, 49, 75–111.
4. Jaskovski S. Investigations into the system of intuitionist logic. // Studia logica, 34, 117-120, 1975 (original 1936)
5. Kauffman L. Imaginary Values in Mathematical Logic. //Proceedings of the 17 Intern. Symposium on Multiple-Valued Logic, may 26-28, 1987, Boston, MA, 282-289.
6. Priest G. The Structure of the Paradoxes of Self-reference.// Mind. Vol. 103, 1994.