А. В. Титов, МИИТ / МГТУ им. Н. Э. Баумана

НЕФИНИТНЫЕ МЕТОДЫ В ИССЛЕДОВАНИИ ФОРМ ЛОГИЧЕСКОГО ИСЧИСЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ОЦЕНКИ

Аннотация. Рассматривается подход к изучению взаимосвязи типов логического исчисления основанный на исследовании оценки как морфизма, сохраняющего структуру из алгебры формул в структуру значений оценки. Использование нефинитных методов, позволяет рассматривать множество формул алгебры логики с введенным на нем отношением эквивалентности как фактор-алгебру с определенной структурой. К ее исследованию могут быть привлечены могут быть привлечены нефинитные методы обобщенного нестандартного анализа как раздела теории категорий. Предлагаемый подход является развитием семантического подхода к исследованию типов формальной логики на основе исследования оценки.

Ключевые слова: оценка, категория, нестандартный анализ, мера.

Привлечение нефинитных методов, использующих современные математические теории, позволяет выявить математическую структуру формальной логики и проследить взаимосвязь различных видов логических исчислений, другими словами, выявить математическое содержание рассматриваемого вида логического исчисления.

В настоящее время применение неклассических логик в математике ограниченно, однако постоянно растущие и изменяющиеся требования к применяемому в формальных моделях сложных объектов и процессов математическому аппарату, могут существенно изменить это положение и привести к развитию математических теорий основанных на использовании различных видов неклассической логики.

Если в формализованной теории операции заменяют шаги дедукции, то вполне естественно представить такую систему как категорию. С другой стороны от вывода в исчислении требуется сохранение истинности или, в случае многозначности значений истинности, преобразование истинности по известному закону. Но это означает, что вывод или шаги дедукции связаны с сохранением или изменением по известному закону оценки, которая так же может быть представлена как морфизм определенной категории.

Если рассматривать модели как функторы, сохраняющие дополнительную структуру из категории, соответствующей данной теории, в категорию множеств, то выбор вместо категории множеств, других категорий дает возможность изучать и строить неклассические теории. Тогда категория, на которой принимает значение функтор, определяет тип логики для исследуемой модели.

Ценным для проводимого исследования является то обстоятельство, что в теории категорий свойства объекта определяются не через его внутреннюю структуру, а через его связи с другими элементами, которые выражаются через функции (стрелки)

Вариантом категорного подхода к анализу логических исчислений является обобщенный нестандартный анализ.

.При этом подходе различные тип логики определяется структурой, на которой принимает значение оценка.

Расширения, даваемые теорией категорий, распространяются и на логику. С философской точки зрения категорный подход к логике интересен тем, что расширяет ее возможности, при этом позволяет проследить связь между классическими и неклассическими вариантами логических исчислений.

Развитие метода, основанного на определении меры истинности как меры на некотором множестве, связано с понятием оценки.

.«Оцениванием (оценкой) в данном языке для фиксированной решетки X называется сопоставление каждой формуле ϕ элемента из X, обозначаемого $\|\phi_k\|_X$ или, короче, $\|\phi_k\|$, причем логические связки языка моделируются операциями в решетке X. Последнее означает, что $\|\phi\wedge\psi\| = \|\phi\| \wedge \|\psi\|$, $\|\phi\vee\psi\| = \|\phi\| \vee \|\psi\|$, $\|\phi\to\psi\| = \|\phi\| \to \|\psi\|$, $\|\neg\phi\| = \neg\|\phi\|$» [1] .

При этом типы логического исчисления определяется структурой, на которой принимает значение оценка

Непосредственное представление об истинности сводится к тому, что, суждение «A есть B» считается истинным лишь тогда, когда это суждение выполняется для всех элементов из A, т.е.в случае, когда в качестве значений оценки рассматривается система подмножеств P(A) некоторого множества A. При этом принимается возможным существование только двух мер истинности – 0 и 1, причем только само A имеет меру 1. Кроме того, если A есть бесконечное множество, то и разность A/N, где N – любое конечное множество, при таком задании меры имеет меру ноль.

В качестве структуры X, на которой принимает значение оценка, может рассматривается импликативная решетка общего вида с оценкой на ней $\|\phi_k\|_X$. При этом логические связки языка моделируются операциями в решетке X.

Уже в этом случае, анализируя разные типы оценок, можно проследить то, как количественные изменения и сопоставляемая им мера определяют качественный тип логики, зафиксированный в системе аксиом логического исчисления [2].

В классическом варианте нестанданртного анализа рассматривается множество - степень K^I, где K- структура, а формулы –суждения о свойствах данной структуры. Оценка принимает значения на решетке P(I), выбор в качестве j ультрафильтра в P(I) позволяет заменить Tr_j (ϕ_k) ($\mathrm{Tr}_j(\phi_k) \equiv \|\phi_k\| \in j$) [3]) «обычной» истинностью суждения ϕ_k о структуре K^I. Поскольку для ультрапроизведений $K^I|j \equiv K^I|\sim_j$, имеем $\phi_{k|j}([f_1], [f_2], \ldots [f_n]) \Leftrightarrow ([\phi_k(f_1, f_2, \ldots, f_n)] \in j)$, где $[f_i] \in K^I|j$. Это фактор – множество содержит два элемента. Это обеспечивает эквивалентность обеих семантик

H-B логика [4], в которой рассматривается два вида отрицания, можно интерпретировать как исчисление с оценкой на импликативной решетке общего вида.

В случае пропозиционального исчисления, в котором алгебра формул есть булева алгебра или булева решетка отрицание эквивалентно дополнению. Однако, как известно, решетка общего вида имеет два вида дополнения.

Если решетка A имеет нулевой элемент 0, то $\cap$- дополнением элемента $a \in A$ называют наибольший элемент $c \in A$, для которого выполняется равенство $c \cap a = 0$.

Если решетка A имеет единичный элемент 1, то $\cup$- дополнением элемента $a \in A$ называют наименьший элемент $d \in A$, для которого выполняется равенство $d \cup a = 1$.

Было показано [5], что аксиомы H-B логики являются выводимыми теоремами для решеток общего вида с двумя дополнениями, которые должны играть роль структур оценки при условии трактовки оценки как морфизма сохраняющего структуру.

При переходе на язык теории категорий модели, которые рассматриваются классической теорией, являются функторами из категории, соответствующей некоторой теории в категорию всех множеств. Рассматривая какую-либо другую категорию, обладающую дополнительной структурой, получим неклассическую теорию. Тип полученной теории будет индуцироваться заданной категорией и ограничениями, наложенными на функтор (его задаваемыми свойствами).

При таком подходе «логики» как вид исследования структур представляют собой семейство функторов из категорий, соответствующих формальным теориям в категории структур, на которых принимает значение оценка. В этом случае оценка есть функтор, сохраняющий дополнительную структуру. Вид логики будет определяться типом функтора и, следовательно, минимальные логики будут представлять собой семейство, определяемое семейством баз, предбаз, образующих и т.д. структур значений оценки. Нельзя исключать и того, что сюда войдут функторы как гладкие отображения многообразий, поскольку в обиход уже введен термин «локальная истинность», в частности в монографии Голдблатта [5] рассматривается язык PL, в который включена новая связка ∇ и, если α формула этого языка, то формула $\nabla\alpha$ читается «локально имеет место, что α».

Введение в теории категорий классификатора подобъектов Ω, и связанная с этим понятием Ω -аксиома, позволяет подтвердить предположение о том, что структура оценки для алгебры формул должна сохранять ее структуру.

Литература.

1. В.А.Любецкий. Оценки и пучки. О некоторых вопросах нестандартного анализа// УМН, том 44, выпуск 4(269), сс. 99-153.

2. А.В.Титов. Диалектика в развитии типов логических исчислений на основе структур значений оценки//Доказательство очевидность, достоверность и убедительность в математике. Труды Московского семинара по философии математики/ Под ред. В.А.Божанова, А.Н.Кричевца, В.А.Шапошникова –М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014, - 432с.

3.В.А.Любецкий. Некоторые применения теории топосов к изучению алгебраических систем.// П.Т.Джонсон. Теория топосов.-М.: «Наука», 1986.- сс.376-430

4. Васюков В.Л. «Категорная логика».-М.: АНО Институт логики. 2005,- 194 с.

5.А.В.Титов. Диалектика в развитии типов логических исчислений на основе структур значений оценки//Доказательство очевидность, достоверность и убедительность в математике. Труды Московского семинара по философии математики/ Под ред. В.А.Божанова, А.Н.Кричевца, В.А.Шапошникова –М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014, - 432с.

6.Р.Гольдблатт. Топосы. Категорный анализ логики.-М: Мир, 1983, -468 с.