К. В. Шишов, МГУ им. М. В. Ломоносова

РЕЛЯЦИОННАЯ СЕМАНТИКА, АССОЦИИРОВАННАЯ QMV-АЛГЕБРЕ

В работе [1] представляется алгебраическая структура QMV-алгебры, которая, опираясь на идеи и результаты [2], характеризуется в качестве обобщения для многозначных алгебр. В качестве множества-носителя этого класса структур выступает частично-упорядоченное множество всех эффектов, в действительном интервале [0,1], где под эффектом понимается ограниченный линейный оператор в гильбертовом пространстве. Используя метод, предложенный в [3], предполагается существование реляционной семантики с тернарным отношением, ассоциированной к предложенной алгебраической структуре.

Определение 1. Квантовая реляционная структура - это упорядоченная тройка $\mathfrak{F} =< \mathcal{E}, \mathcal{R}, * >$, где
$\mathcal{E}$ является непустым множеством состояний в гильбертовом пространстве H;
$\mathcal{R}$ является тернарным отношением на множестве состояний ($\mathcal{R}^3 \subseteq \mathcal{E}^3$);
$*$ является унарной операцией на множестве $\mathcal{E}(* : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E})$.

Для тернарного отношения $\mathcal{R}$ верны следующие определения:

Df1. $a \leq b \Leftrightarrow \exists c \mathcal{R}acb$

Df2. $a \perp b \Leftrightarrow \exists x \mathcal{R}abx$

Df3. $\mathcal{R}^2abcd \Leftrightarrow \exists x(\mathcal{R}abx \ \& \ \mathcal{R}xcd)$

Df4. $\mathcal{R}^2a(bc)d \Leftrightarrow \exists x(\mathcal{R}axd \ \& \ \mathcal{R}bcx)$

Также на отношение $\mathcal{R}$ накладываются ограничения, принятие которых необходимо для выражения операций в QMV-алгебре. Эти ограничения выражены следующими постулатами:

1. $\mathcal{R}abc \Rightarrow \mathcal{R}bac$
2. $\mathcal{R}^2(ab)cd \Leftrightarrow \mathcal{R}^2a(bc)d$
3. $\forall a \exists! x \mathcal{R}ax1$
4. $\mathcal{R}a11 \Rightarrow \mathcal{R}011$
5. $\mathcal{R}000$
6. $\mathcal{R}aa^*1$
7. $a \leq b \Rightarrow b^* \leq a^*$
8. $a^{**} = a$

Определение 2. Квантовой реляционной моделью будем называть упорядоченную семерку $\mathfrak{M} =< \mathcal{S}, \mathcal{R}, *, \rho, 0, 1 >$, где
$< \mathcal{S}, \mathcal{R}, *, 0, 1 >$ квантовой является реляционной структурой
ρ является функцией верификации $\rho : \mathcal{A} \times \mathcal{S} \rightarrow [0, 1]$, которая всякому эффекту в некотором состоянии сопоставляет число из интервала действительных $[0, 1]$, которое выражает его борновскую вероятность;
$\mathbf{0}, \mathbf{1}$ являются выделенными состояниями в $\mathcal{S}$.

Функция ρ описывается как функция, которая всякой пропозициональной переменной или формуле A, находящейся в состоянии φ, сопоставляет действительное число из интервала [0,1], и которая обозначает ту вероятность, с которой A выполнима в состоянии φ.

Обозначим за $\|A\|_a$ множество $\{\varphi \in S : \rho(A, \varphi) = a\}$ всех состояний, в дальнейшем называемое $a-$*пропозицией* или $a-$*экстенсионалом эффекта*, то есть множество тех состояний в которых борновская вероятность эффекта A имеет значение a.
Пропозиции образуются следующим образом:

$\|\alpha\|_a = \{\varphi \in S : \rho(\alpha, \varphi) = a\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{S})$;
$\|A'\|_a = \{\psi^* \in S : \mathcal{R}\varphi\psi x \ \&\ \rho(A, \varphi) = a \ \&\ \rho(A, \psi) = 1 - a\}$
$\|A \oplus B\|_a = \{\psi \in S : \mathcal{R}\varphi_1, \varphi_2, \psi \ \&\ \rho(A, \varphi_1) = b \ \&\ \rho(B, \varphi_2) = c \ \&\ (a = b + c \ \&\ b + c \leq 1) \vee a = 1\}$
$\|A \odot B\|_a = \{\psi \in S : \mathcal{R}\varphi_1, \varphi_2, \psi \ \&\ \rho(A, \varphi_1) = b \ \&\ \rho(B, \varphi_2) = c \ \&\ (a = b + c - 1 \ \&\ b + c \geq 1) \vee a = 0\}$
$\|A \Cap B\|_a = \{\psi \in S : \mathcal{R}^2\varphi_1, (\varphi_1^*, \varphi_2)\psi \ \&\ \rho(B, \varphi_1) = b \ \&\ \rho(B', \varphi_1^*) = 1 - b \ \&\ \rho(A, \varphi_2) = c \ \&\ (a = b \ \&\ b \leq c) \vee (a = c \ \&\ c \leq 1 - b)\}$

Определим теперь экстенсионалы как:

$\|A\| = \bigcup\limits_a \|A\|_a$; $\|A'\| = \bigcup\limits_a \|A'\|_a$; $\|A \oplus B\| = \bigcup\limits_a \|A \oplus B\|_a$; $\|A \odot B\| = \bigcup\limits_a \|A \odot B\|_a$; $\|A \Cap B\| = \bigcup\limits_a \|A \Cap B\|_a$; $\|0\| = \varnothing$; $\|1\| = S$;

Обозначая множество всех экстенсионалов как $\mathbf{\Pi}$, зададим функцию оценки v, которая сопоставляет всякому эффекту значение его экстенсионала из $\mathbf{\Pi}$:

$v(A) = \|A\|$
$v(A') = \|A'\|$
$v(A \oplus B) = \|A \oplus B\|$
$v(A \odot B) = \|A \odot B\|$
$v(A \Cup B) = \|A \Cup B\|$

Учитывая вышеуказанные постулаты можно определить функцию оценки

$v(A') = v(A)'$
$v(A \oplus B) = v(A) \oplus v(B)$
$v(A \odot B) = v(A) \odot v(B)$
$v(A \Cup B) = v(A) \Cup v(B)$

Определим теперь понятие алгебраического следования эффектов в QMV-алгебре. A *влечет* B в реализации в QMV-алгебре $\mathbf{QMV}$, записывая это как $A \models_{\mathbf{QMV}} B$, тогда и только тогда, когда $A \leq B$. A *алгебраически влечет* B ($A \models_{\mathcal{A}} B$) тогда и только тогда, когда для любой $\mathbf{QMV}$ имеет место $A \models_{\mathbf{QMV}} B$.

Будем говорить, что A *реляционно влечет* B в квантовой реляционной модели $\mathfrak{M} = \langle \mathcal{S}, \mathcal{R},^*, \rho, 0, 1\rangle$, записывая это как $A \models_{\mathfrak{M}} B$, тогда и только тогда, когда $\forall\varphi \in \mathcal{S}(\rho(A, \varphi) \leq \rho(B, \varphi))$. A *реляционно влечет* B ($A \models_{\mathcal{R}} B$) тогда и только тогда, когда для любой $\mathfrak{M}$ имеет место $A \models_{\mathfrak{M}} B$.

Определение 3. *Крипкевская реализация для квантовой многозначной логики*
Крипкевская реализация $\mathbf{QLE}$ представляет собой систему $K = \langle \mathcal{S}, \mathcal{R},^*, \rho, 0, 1, \mathbf{\Pi}, v\rangle$, где:

(1) $\langle \mathcal{S}, \mathcal{R},^*, \rho, 0, 1\rangle$ есть реляционная модель, а $\mathbf{\Pi}$ является множеством экстенсионалов, содержащим $\varnothing, \mathcal{S}$ и замкнутым относительно $'$, $\oplus$, $\odot$, и $\Cup$;

(2) v есть функция, сопоставляющая любой формуле (эффекту) экстенсионал из $\mathbf{\Pi}$, удовлетворяющий следующим условиям:

$v(A) = \|A\|$

$v(A') = \|A'\|$

$v(A \oplus B) = \|A \oplus B\|$

$v(A \odot B) = \|A \odot B\|$

$v(A \Cup B) = \|A \Cup B\|$

Вместо $i \in v(A)$ мы будем писать $i \models_{\mathcal{K}} A$ и будем читать "A имеет ненулевую борновскую вероятность в состоянии i".

Теорема 1. *(i) Если $A \models_{\mathbf{QMV}} B$, то существует такая крипкевская реализация $\mathcal{K}^{\mathbf{QMV}}$, что $A \models_{\mathbf{QMV}} B$ тогда и только тогда, когда $A \models_{\mathcal{K}^{\mathbf{QMV}}} B$. (ii) Если $A \models_{\mathcal{K}} B$, то существует такая реализация в QMV-алгебре $\mathbf{QMV}^{\mathcal{K}}$,что $A \models_{\mathcal{K}} B$ тогда и только тогда, когда $A \models_{\mathbf{QMV}^{\mathcal{K}}} B$.*

Работа выполнена при поддержке РГНФ. Грант № 16-03-00364.

Литература

[1] Giuntini Roberto. Quantum MV Algebras. *Studia Logica: An International Journal for Symbolic Logic*, 56(3), 1996, pp. 393–417.

[2] Foulis D. J., Bennett M. K. Effect algebra and unsharp quantum logic. *Foundations of Physics*, 24(10), 1994, pp. 1331–1352.

[3] Васюков В. Л. Квантовая логика. М., 2005.