В. В. Задорин, РАНХиГС

К ВОПРОСУ О ПЕРЕСЧЕТЕ МНОЖЕСТВ ДИАГОНАЛЬНЫМ МЕТОДОМ

Диагональный метод – это метод, посредством которого обычно в теории множеств «доказывается существование множеств возрастающих мощностей» [1]. Согласно Медведеву, данный метод уже встречается в работе Дюбуа–Раймона «Новая теория сходимости и расходимости рядов с положительными членами» (1873), в переписке Дедекинда и Кантора декабря того же года и в заметке Кантора «Об одном свойстве всех действительных алгебраических чисел» (1874). Между тем, например, Клини считает, что «...Результаты относительно применения понятия 1–1–соответствия к бесконечным множествам могли бы остаться в истории математики как любопытные курьезы, не замеченные до Кантора (или замеченные, но затем забытые) и никому особенно не нужные и после него, если бы оказалось, что 1–1–соответствие можно установить между любыми двумя бесконечными множествами. Идея сравнения бесконечных множеств посредством 1–1–соответствия оказалась бы в таком случае не столь уж плодотворной» [2].

В рассуждениях Кантора, призванных доказать существование «бесконечных многообразий, «которые нельзя взаимно однозначно отобразить на совокупность всех конечных целых чисел 1, 2, 3,..., ν,...»», скрывается обстоятельство, делающее их обоснованность уязвимой к опровержению. Воспроизведем доказательство Кантора по работе 1890-91 годов «Об одном элементарном вопросе учения о многообразиях». Пусть М – совокупность всех элементов Е, где каждый элемент Е описывается бесконечно многими координатами $x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots$, каждая из которых есть один из двух «исключающих друг друга признаков» *m* или *w*. Тогда «элементами совокупности М являются, например, три следующие: $E^{I} = (m, m, m, m, \ldots)$; $E^{II} = (w, w, w, w, \ldots)$; $E^{III} = (m, w, m, w, \ldots)$. Теперь я утверждаю, что многообразие М не имеет мощности последовательности 1, 2, 3,..., ν,… Это вытекает из следующей теоремы: «Если $E_1, E_2, \ldots, E_\nu, \ldots$ – какая-либо просто бесконечная последовательность элементов многообразия М, то всегда существует такой элемент E_0, который не совпадает ни с каким E_ν». Пусть $E_1 = (a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,\nu}, \ldots)$, $E_2 = (a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,\nu}, \ldots)$, …, $E_\mu = (a_{\mu,1}, a_{\mu,2}, \ldots, a_{\mu,\nu}, \ldots)$, … » [3]. Рассмотрим последовательность $E_0 = (b_1, b_2, b_3, \ldots)$, где каждая координата $b_\nu = m$, если соответствующая $a_{\nu,\nu}$ из E_ν (где $\nu \neq 0$) есть *w*, и $b_\nu = w$, если $a_{\nu,\nu} = m$. Координата $a_{1,1}$ – это первая координата первого элемента E_1, координата $a_{2,2}$ – вторая координата второго элемента E_2 и т.д. Поэтому данный метод стали называть диагональным. Кантор утверждает, что «равенство $E_0 = E_\mu$ не может иметь место ни для какого положительного целочисленного значения μ», так как всякое b_ν принимает значение, противоположное $a_{\nu,\nu}$. Иными словами, элемент E_0 не встречается в пересчете элементов М.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Допустим, мы поменяем местами «1» и «2» в ряду целых положительных чисел. Имеет ли данная последовательность мощность последовательности 1, 2, 3,..., ν,…? Да, поскольку мы можем поставить их координаты во взаимно однозначное соответствие. Это будут равномощные, равные, но *разные* (!) последовательности, поскольку они отличаются *порядком координат*, но не *координатами*. В ряду целых положительных чисел каждые числа попарно отличны друг от друга, и для того, чтобы передать это отличие в десятичной системе счисления используется 10 цифр и варьирование их последовательности. Для $E^{I} = (m, m, m, m, \ldots)$ и $E^{II} = (w, w, w, w, \ldots)$ расположение уникальных координат не имеет значения, так как они все одинаковы, и мы можем их представить в виде $E_1 = (a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,\nu}, \ldots)$ и $E_2 = (a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,\nu}, \ldots)$ соответственно, подразумевая, что каждая a_1 – это *m*, а каждая a_2 – это *w*. Но для $E^{III} = (m, w, m, w, \ldots)$, $E^{IV} = (w, m, w, m, \ldots)$ и, например, $E^{X} = (m, w, w, m, \ldots)$ –

подстановка будет нетривиальной, так как они отличаются именно *порядком* вхождения координат определенного признака. Или, с другой стороны, при перечислении последовательностей вида $E_\mu = (a_{\mu,1}, a_{\mu,2}, \ldots, a_{\mu,\nu}, \ldots)$ должно быть учтено варьирование признаков *m* и *w* при подстановке вместо a.

Поступим иначе. Пусть:

$(0,0,0,0,0,\ldots) = E^0$ $(1,1,1,1,1,\ldots) = E^1$

$(1,0,0,0,0,\ldots) = E^2$ $(0,1,1,1,1,\ldots) = E^3$

$(0,1,0,0,0,\ldots) = E^4$ $(1,0,1,1,1,\ldots) = E^5$

$(1,1,0,0,0,\ldots) = E^6$ $(0,0,1,1,1,\ldots) = E^7$

$(0,0,1,0,0,\ldots) = E^8$ $(1,1,0,1,1,\ldots) = E^9$

…………………………………………..

и так далее. Как видим, инверсия бесконечных координат, задающих элементы левого столбца таблицы, находятся в правом столбце, и – наоборот. Условимся считать, что последовательности левого столбца – числа в двоичной системе счисления, где возрастание разрядов происходит слева направо (а не справа налево, как обычно). При этом мы получим пересчет (взаимно однозначное соответствие ряду натуральных чисел) четных положительных чисел в левом столбце и нечетных – в правом. Применение диагонального метода оказывается невозможным, так как преобразуемые последовательности координат все находятся в левом столбце, а полученные в результате инверсии – в правом. Кантор допускает следующий просчет: признаки *m* и *w* имеют только одно отличие, тогда как координаты $a_{\mu,1}$, $a_{\nu,2}$ – два – по левому и правому индексам. Мы можем договориться считать (как это делается при одном из вариантов обозначений отрицательных и положительных чисел в машинном коде), что крайняя слева единица свидетельствует о том, что располагающаяся справа от нее последовательность «0» и «1» – отрицательное число, и тогда мы получим пересчет *целых* чисел. Если мы будем рассматривать последовательности нулей и единиц в этих столбцах, как запись дробной части числа, располагающегося в интервале от 0 до 1, рассматривая E^0 как нуль и E^1 как единицу, то мы получим пересчет действительных чисел данного интервала. Этот метод пересчета альтернативен диагональному. Следствия, к которым может привести его использование, сегодня представляются достаточно оригинальными и, надеемся, плодотворными в логике, теории множеств и математике.

Литература

[1] Медведев Ф.А. *Развитие теории множеств в XIX веке*. М.: Наука, 1965.

[2] Клини С.К. *Математическая логика*. Пер. с англ./Под ред. Г.Е. Минца. Изд. 2-е. М.: Едиториал УРСС, 2005.

[3] Кантор Г. *Об одном элементарном вопросе учения о многообразиях* // Труды по теории множеств. М.: Наука, 1985. С.170-172.