Владимир Попов[1]

К ПРОБЛЕМЕ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ЛОГИК ВАСИЛЬЕВСКОГО ТИПА: О ТАБЛИЧНОСТИ ЛОГИК $I_{\langle x,x\rangle}$ $(x \in \{1, 2, \dots\})$[2]

Аннотация. Эта статья написана в рамках намеченного в (Попов 2016) плана исследования проблемы табличности I-логик васильевского типа (пропозициональная логика называется табличной, если она имеет конечную характеристическую матрицу). В отношении I-логик васильевского типа, имеющих вид $I_{\langle x,y\rangle}$ $(x, y \in \{0, 1, 2, \dots\}$ и $x \bullet y)$, проблема табличности изучена в (Попов 2017a: 57–81) и (Попов 2017b: 25–58). Основной результат, полученный в указанных работах: для всяких целых неотрицательных чисел x и y, первое из которых меньше второго, логика $I_{\langle x,y\rangle}$ таблична. Цель предлагаемой статьи, опирающейся на работы (Попов 2016: 32–67), (Попов 2017a: 57–81) и (Попов 2017b: 25–58), состоит в демонстрации того, что для всякого целого положительного числа x логика $I_{\langle x,x\rangle}$ является табличной. С этой целью здесь показано, как по произвольному целому положительному числу n строится логическая матрица $M(n, n)$, которая является конечной характеристической матрицей логики $I_{\langle n,n\rangle}$ (класс всех таких логик счетно-бесконечен). В связи с тем, что носитель логической матрицы $M(x, x)$, где $x \in \{1, 2, \dots\}$, есть некоторое множество 0–1-кортежей, представляется естественным охарактеризовать матричную семантику, базирующуюся на такого рода логической матрице, как кортежную семантику. Иной вариант кортежной семантики был использован в (Попов 2017a: 57–81) и (Попов 2017b: 25–58).

Ключевые слова: I-логика $I_{\langle n,n\rangle}$ $(n \in \{1, 2, \dots\})$, двузначная семантика I-логики $I_{\langle n,n\rangle}$ $(n \in \{1, 2 \dots\})$, кортежная семантика I-логики $I_{\langle n,n\rangle}$ $(n \in \{1, 2, \dots\})$.

Vladimir Popov

TOWARDS A CHARACTERISATION OF VASILIEV-TYPE LOGICS: THE TABULARITY OF LOGICS $I_{\langle x,x\rangle}$ $(x \in \{1, 2, \dots\})$

Abstract. This article is written in the framework of a research program (see Popov 2016: 32–67) for the tabularity problem of Vasiliev type I-logics (a propositional logic is called tabular if it has a finite characteristic matrix). Regarding Vasiliev type I-logics of the form $I_{\langle x,y\rangle}$ $(x, y \in \{0, 1, 2, \dots\}$ and $x < y)$, the tabularity problem was studied in (Popov 2017a: 57–81) and (Popov 2017b: 25–58). The main result obtained in those papers was as follows: for every pair of non-negative integers x and y, the first of which is smaller than the second, the logic $I_{\langle x,y\rangle}$ is tabular. The aim of this paper, which is based on (Popov 2016: 32-81), (Popov 2017a: 57–81) and (Popov 2017b: 25–58), is to demonstrate that for every positive integer x the logic

[1] *Попов Владимир Михайлович*, кандидат философских наук, доцент кафедры логики философского факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.

Vladimir Popov, Candidate of Philosophy, Associate Professor, Department of Logic of the Faculty of Philosophy, Lomonosov Moscow State University.

pphiloslog@mail.ru

[2] Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №16-03-00224–ОГН/18 (ранее — РГНФ, грант №16-03-00224a).

$I_{\langle x,x\rangle}$ is tabular. To this end, we show here how, for an arbitrary positive integer n, a logical matrix $M(n, n)$ is constructed which is the finite characteristic matrix of logic $I_{\langle n,n\rangle}$ (the class of all such logics is infinite). Due to the fact that the carrier of the logical matrix $M(x, x)$, where $x \in \{1, 2, \dots\}$, is some set of 0–1-tuples, it seems natural to characterize the matrix semantics, based on this kind of logical matrix, as tuple semantics.
Keywords: I-logic $I_{\langle n,n\rangle}$ $(n \in \{1, 2, \dots\})$, two-valued semantics of I-logic $I_{\langle n,n\rangle}$ $(n \in \{1, 2, \dots\})$, tuple semantics of I-logic $I_{\langle n,n\rangle}$ $(n \in \{1, 2, \dots\})$.

Памяти философа и логика
Анатолия Темиргалиевича Ишмуратова,
известного исследователя временных контекстов
и практической логики

Целью данной работы является доказательство того, что для всякого целого положительного числа x логика $I_{(x,x)}$ таблична. С этой целью здесь показано, как по произвольному целому положительному числу n, строится логическая матрица $M(n, n)$, которая является характеристической матрицей логики $I_{(n,n)}$. Семантику, базирующуюся на логической матрице $M(n, n)$, называем кортежной семантикой. В данном контексте введение термина «кортежная семантика» мотивировано тем, что носитель логической матрицы $M(n, n)$ есть некоторое множество 0–1-кортежей. Предлагаемая статья является продолжением работ (Попов 2016: 32–67), (Попов 2017a: 57–81) и (Попов 2017b: 25–58). Этим объясняется наличие в данной статье частых ссылок на указанные работы. Статья построена так, чтобы эти ссылки были удобны в обращении. Последнее обстоятельство является причиной того, что некоторые утверждения (например, леммы 6–8) формулируются по отдельности, а не в виде того или иного утверждения, равносильного их конъюнкции. Поскольку данная статья — продолжение работ (Попов 2016: 32–67), (Попов 2017a: 57–81) и (Попов 2017b: 25–58), постольку сведения о мотивации рассмотрения I-логик васильевского типа и об истории их открытия в ней не приводятся (такие сведения имеются на первой странице работы (Попов 2016: 32–67)). Основной текст работы представлен тремя параграфами, в первом из которых определены I-логики васильевского типа, имеющие вид $I_{\langle x,x\rangle}$, где $x \in \{1, 2, \dots\}$. Это определение дано посредством аксиоматизирующих указанные логики исчислений гильбертовского типа. Здесь введен также ряд необходимых понятий и соглашений. Во втором параграфе представлено основанное на результатах работы (Попов 2016: 32–67), построение двузначных семантик рассматриваемых логик. В третьем параграфе сконструирована кортежная семантика для изучаемых логик, которая вместе с двузначной семантикой, описанной в §2, лежит в основе проведенного в §3 доказательства табличности каждой I-логики вида $I_{\langle x,x\rangle}$, где $x \in \{1, 2, \dots\}$. Как и в работах (Попов 2016: 32–67), (Попов 2017a: 57–81) и (Попов 2017b: 25–58), параметры обозначаем курсивными буквами (иногда с индексами), а связанные переменные обозначаем прямыми буквами (также иногда с индексами).

§ 1

Нам потребуется стандартно определяемый пропозициональный язык L, алфавит которого есть множество $\{\&, \vee, \supset, \neg,), (, p_1, p_2, p_3, \dots\}$ символов (подробнее язык L описан, например, в (Попов 2017a)). Множество всех пропозициональных переменных языка L обозначаем через $Prop_L$. Квазиэлементарной L-формулой называем L-формулу, в которую не входит ни одна бинарная логическая связка языка L. Длиной L-формулы называем, как это принято, число всех вхождений символов $\&, \vee, \supset, \neg$ в эту L-формулу. Из формальной семиотики известно, что для всякой L-формулы существует единственная длина этой L-формулы, и что длина всякой L-формулы есть целое неотрицательное число. Обозначаем длину L-формулы через $h(A)$. Условимся обозначать через λ отображение множества $\{1, 2, \dots\}$ всех целых положительных чисел в одноэлементное множество $\{\neg\}$.

Соглашение 1. Для всякой L-формулы A $\neg^{[0]}(A)$ есть A.

Соглашение 2. Для всякой L-формулы A и для всякого целого положительного числа d $\neg^{[d]}(A)$ есть сокращение для $(\lambda(d) \dots (\lambda(1)A) \dots)$.

Комментарий 1. Использование отображения λ обусловлено потребностью в корректном и кратком введении в рассмотрение скоращений вида $\neg^{[k]}(A)$, где k есть целое неотрицательное число, а A есть L-формула.

Замечание 1. Для всякой L-формулы A и для всякого целого положительного числа d $\neg^{[0]}(A)$ и $\neg^{[d]}(A)$ являются L-формулами.

Замечание 2. Можно доказать, что для всякого A и для всякого целого неотрицательного числа k: A есть квазиэлементарная L-формула длины k тогда и только тогда, когда A есть $\neg^{[k]}(q)$ для некоторой пропозициональной переменной q языка L.

Логикой называем непустое множество L-формул, замкнутое относительно правила modus ponens в L и относительно правила пропозициональной подстановки в L (последнее правило есть правило подстановки L-формулы в L-формулу вместо пропозициональной переменной языка L). Опираясь на (Попов 2016), покажем как по любому целому положительному числу x определяется исчисление $HI_{\langle x,x\rangle}$ гильбертовского типа и множество $I_{\langle x,x\rangle}$. Условимся, что далее везде n является целым положительным числом. Язык исчисления $HI_{\langle n,n\rangle}$ есть L. Аксиомами исчисления $HI_{\langle n,n\rangle}$ являются все те и только те L-формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих двенадцати видов (здесь A, B и C — L-формулы):

(I) $((A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)))$
(II) $(A \supset (A \vee B))$
(III) $(B \supset (A \vee B))$
(IV) $((A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C)))$
(V) $((A\&B) \supset A)$
(VI) $((A\&B) \supset B)$
(VII) $((C \supset A) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset (A\&B))))$
(VIII) $((A \supset (B \supset C)) \supset ((A\&B) \supset C))$
(IX) $(((A\&B) \supset C) \supset (A \supset (B \supset C)))$
(X) $(((A \supset B) \supset A) \supset A)$
(XI, m) $((\neg D) \supset (D \supset A))$, где D есть L-формула, которая не является квазиэлементарной L-формулой длины $< n$
(XII, n) $((E \supset (\neg(A \supset A))) \supset (\neg E))$, где E есть L-формула, которая не является квазиэлементарной L-формулой длины $< n$

Исчисление $HI_{\langle n,n\rangle}$ имеет единственное правило — modus ponens в L.

Условимся, что (1) определение $HI_{\langle n,n\rangle}$-доказательства длины k (k есть целое положительное число) L-формулы A аналогично определению 1 из (Попов 2016), (2) определение $HI_{\langle n,n\rangle}$-доказательства L-формулы A аналогично определению 2 из (Попов 2016), (3) определение $HI_{\langle n,n\rangle}$-вывода длины k (k есть целое положительное число) из множества M L-формул L-формулы A аналогично определению 3 из (Попов 2016), (4) определение $HI_{\langle n,n\rangle}$-вывода из множества M L-формул L-формулы A аналогично определению 4 из (Попов 2016), (5) определение L-формулы, доказуемой в $HI_{\langle n,n\rangle}$, аналогично определению 5 из (Попов 2016).

Соглашение 3. Условимся, что для всякого множества К L-формул и для всякой L-формулы F: запись «$K \vdash_{HI_{\langle n,n\rangle}} F$» есть сокращение для «существует $HI_{\langle n,n\rangle}$-вывод из множества K L-формул L-формулы F», а запись «$\vdash_{HI_{\langle n,n\rangle}} F$» есть сокращение для «существует $HI_{\langle n,n\rangle}$-доказательство L-формулы F».

Обозначаем через $I_{\langle n,n\rangle}$ множество всех L-формул, доказуемых в $HI_{\langle n,n\rangle}$. Стереотипное доказательство того, что для всякого целого положительного числа x $I_{\langle x,x\rangle}$ является логикой, здесь не приводим. В свете того, что для всякого целого положительного числа x $I_{\langle x,x\rangle}$ является логикой, и определения I-логики васильевского типа (это определение имеется и в (Попов 2016), и в (Попов 2017a)) ясно, что для всякого целого положительного числа x $I_{\langle x,x\rangle}$ является I-логикой васильевского типа. Опираясь на утверждение У7 из (Попов 2016), можно доказать, что класс всех логик, каждая из которых есть $I_{\langle x,x\rangle}$ для некоторого x из $\{1,2,\dots\}$, бесконечен.

§ 2

Для доказательства табличности интересующих нас логик потребуется двузначная семантика этих логик. Построим, используя результаты работы (Попов 2016), двузначную семантику логики $I_{\langle n,n\rangle}$.

Определение 1. $I_{\langle n,n\rangle}$-оценкой называем отображение всех квазиэлементарных L-формул, длина каждой из которых $\leq n$, в множество $\{0,1\}$.

Определение 2. $I_{\langle n,n\rangle}$-означиванием при $I_{\langle n,n\rangle}$-оценке v называем такое отображение f множества всех L-формул в множество $\{0,1\}$, что выполняются следующие условия:

1. для всякой квазиэлементарной L-формулы A, длина которой $\leq n$, $f(A) = v(A)$;
2. для всякой квазиэлементарной L-формулы A, длина которой $\geq n : f((\neg A)) = 1$ тогда и только тогда, когда $f(A) = 0$;
3. для всякой L-формулы A, не являющейся квазиэлементарной L-формулой: $f((\neg A)) = 1$ тогда и только тогда, когда $f(A) = 0$;
4. для всяких L-формул A и B:
   $f((A\&B)) = 1$ тогда и только тогда, когда $f(A) = 1$ и $f(B) = 1$,
   $f((A \vee B)) = 1$ тогда и только тогда, когда $f(A) = 1$ или $f(B) = 1$,
   $f((A \supset B)) = 1$ тогда и только тогда, когда $f(A) = 0$ или $f(B) = 1$.

Замечание 3. Можно доказать, что для всякой $I_{\langle n,n\rangle}$-оценки v существует единственное $I_{\langle n,n\rangle}$-означивание при v.

Учитывая замечание 3, принимаем следующее соглашение 4.

Соглашение 4. Через $\Phi_v^{\langle n,n\rangle}$ обозначаем $I_{\langle n,n\rangle}$-означивание при $I_{\langle n,n\rangle}$-оценке v.

Лемма 1. Для всякой L-формулы A и для всякой $I_{\langle n,n\rangle}$-оценке v: либо $\Phi_v^{\langle n,n\rangle}(A) = 1$, либо $\Phi_v^{\langle n,n\rangle}(A) = 0$.

Стереотипное доказательство леммы 1 здесь не приводим.

Руководствуясь работой (Попов 2016), дадим определение (3) и определение (4).

Определение 3. Называем A и $I_{\langle n,n\rangle}$-общезначимой L-формулой, если для всякой $I_{\langle n,n\rangle}$-оценки v $\Phi_v^{\langle n,n\rangle}(A) = 1$.

Разумеется, всякая $I_{\langle n,n\rangle}$-общезначимая L-формула является L-формулой.

Определение 4. Говорим, что A $I_{\langle n,n\rangle}$-следует из M (или из M $I_{\langle n,n\rangle}$-следует A), если выполняются три условия: (1) A есть L-формула, (2) M есть множество L-формул, (3) для всякой $I_{\langle n,n\rangle}$-оценки v верно, что если $\Phi_v^{\langle n,n\rangle}(B) = 1$ для всякой L-формулы B из M, то $\Phi_v^{\langle n,n\rangle}(A) = 1$.

Теорема 1. Для всякого множества M L-формул и для всякой L-формулы A: $M \vdash_{HI_{\langle n,n\rangle}} A$ тогда и только тогда, когда A $I_{\langle n,n\rangle}$-следует из M.

Доказательство. Теорема 1 является простым следствием теоремы 7 работы (Попов 2016). Адекватность воспроизведенной здесь двузначной семантики логики $I_{\langle n,n\rangle}$ устанавливает следующая теорема 2, являющаяся следствием теоремы 9 работы (Попов 2016). $\square$

Теорема 2. Для всякой L-формулы A: $A \in I_{\langle n,n\rangle}$ тогда и только тогда, когда A есть $I_{\langle n,n\rangle}$-общезначимая L-формула.

§ 3

При доказательстве табличности интересующих нас логик будем использовать предложенные автором кортежные семантики, адекватные этим логикам. Построим кортежную семантику, адекватную логике $I_{\langle n,n\rangle}$.

Определение 5. $\langle n, n\rangle$-кортеж есть отображение X множества

$$\{1, ..., n, n+1\}$$

в множество $\{0, 1\}$.

Определение 6. Говорим, что a есть k-тый член $\langle n, n\rangle$-кортежа X, если $k \in \{1, ..., n, n+1\}$ и $a = X(k)$.

Замечание 4. Разумеется, существуют единственное множество всех $\langle n, n\rangle$-кортежей и единственное множество всех таких $\langle n, n\rangle$-кортежей, первый член каждого из которых есть 1 (первое из этих множеств обозначаем через $C_{\langle n,n\rangle}$, а второе — через $D_{\langle n,n\rangle}$).

Определение 7. Выделенный $\langle n, n\rangle$-кортеж есть $\langle n, n\rangle$-кортеж из $D_{\langle n,n\rangle}$.

Определение 8. Нормальный $\langle n, n\rangle$-кортеж есть такой $\langle n, n\rangle$-кортеж X, что для всякого целого положительного числа i, которое $< n + 1$, $X(i) \neq X(i + 1)$.

Определение 9. Единичный $\langle n, n\rangle$-кортеж есть нормальный $\langle n, n\rangle$-кортеж, первый член которого есть 1.

Определение 10. Нулевой $\langle n, n\rangle$-кортеж есть нормальный $\langle n, n\rangle$-кортеж, первый член которого есть 0.

Ясно, что существуют единственный единичный $\langle n, n\rangle$-кортеж и единственный нулевой $\langle n, n\rangle$-кортеж. Первый из этих $\langle n, n\rangle$-кортежей обозначаем через $1_{\langle n,n\rangle}$, а второй — через $0_{\langle n,n\rangle}$. Ясно также, что для всяких $\langle n, n\rangle$-кортежей X и Y существует единственная упорядоченная пара, первый член которой есть X, а второй — Y. Но тогда корректны следующие определения 11–14.

Определение 11. Для всяких $\langle n, n\rangle$-кортежей X и Y: Z есть $\&_{\langle n,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$ тогда и только тогда, когда верно следующее: ($Z = 1_{\langle n,n\rangle}, X(1) = 1, Y(1) = 1$) или ($Z = 0_{\langle n,n\rangle}, X(1) \neq 1$ или $Y(1) \neq 1$).

Определение 12. Для всяких $\langle n, n\rangle$-кортежей X и Y: Z есть $\vee_{\langle n,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$ тогда и только тогда, когда верно следующее: ($Z = 1_{\langle n,n\rangle}, X(1) = 1$ или $Y(1) = 1$) или ($Z = 0_{\langle n,n\rangle}, X(1) \neq 1, Y(1) \neq 1$).

Определение 13. Для всяких $\langle n, n\rangle$-кортежей X и Y: Z есть $\supset_{\langle n,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$ тогда и только тогда, когда верно следующее: ($Z = 1_{\langle n,n\rangle}, X(1) = 0$ или $Y(1) = 1$) или ($Z = 0_{\langle n,n\rangle}, X(1) \neq 0, Y(1) \neq 1$).

Определение 14. Для всякого $\langle n, n\rangle$-кортежа X: Z есть $\neg_{\langle n,n\rangle}$-напарник $\langle n, n\rangle$-кортежа X тогда и только тогда, когда Z есть такое отображение множества

$$\{1, \ldots, n, n+1\}$$

в множество $\{0, 1\}$, что верны следующие утверждения:

$$(1)\ Z(1) = X(2), \quad \ldots, \quad (n)\ Z(n) = X(n+1),$$

$$(n+1, a)\ Z(n+1) = 1, \text{ если } X(n+1) = 0, \quad (n+1, b)\ Z(n+1) = 0, \text{ если } X(n+1) = 1.$$

Замечание 5. Опираясь на определения 11–14, получаем, что для всяких $\langle n, n\rangle$-кортежей X и Y: любой $\bullet_{\langle n,n\rangle}$-напарник, упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$, где

$$\bullet \in \{\&_{\langle n,n\rangle}, \vee_{\langle n,n\rangle}, \neg_{\langle n,n\rangle}\},$$

является отображением множества $\{1, ..., n, n+1\}$ в множество $\{0, 1\}$, любой $\neg_{\langle n,n\rangle}$-напарник $\langle n, n\rangle$-кортежа X является отображением множества $\{1, ..., n, n+1\}$ в множество $\{0, 1\}$.

В свете определения 5 и замечания 5 ясно, что справедливы следующие леммы 2, 3, 4 и 5.

Лемма 2. Для всяких $\langle n, n\rangle$-кортежей X и Y и для всякого Z: если Z есть $\&_{\langle n,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$, то Z есть $\langle n, n\rangle$-кортеж.

Лемма 3. Для всяких $\langle n, n\rangle$-кортежей X и Y и для всякого Z: если Z есть $\vee_{\langle n,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$, то Z есть $\langle n, n\rangle$-кортеж.

Лемма 4. Для всяких $\langle n, n\rangle$-кортежей X и Y и для всякого Z: если Z есть $\supset_{\langle n,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$, то Z есть $\langle n, n\rangle$-кортеж.

Лемма 5. Для всяких $\langle n, n\rangle$-кортежей X и Y и для всякого Z: если Z есть $\neg_{\langle n,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$, то Z есть $\langle n, n\rangle$-кортеж.

Замечание 6. Разумеется, что существует (а) единственное множество всех упорядоченных троек, каждая из которых имеет вид $\langle X, Y, Z\rangle$, где X и Y являются $\langle n, n\rangle$-кортежами, а Z есть $\&_{\langle n,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$, (б) единственное множество всех упорядоченных троек, каждая из которых имеет вид $\langle X, Y, Z\rangle$, где X и Y являются $\langle n, n\rangle$-кортежами, а Z есть $\vee_{\langle n,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$, (в) единственное множество всех упорядоченных троек, каждая из которых имеет вид $\langle X, Y, Z\rangle$, где X и Y являются $\langle n, n\rangle$-кортежами, а Z есть $\supset_{\langle n,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$, (г) единственное множество всех упорядоченных пар, каждая из которых имеет вид $\langle X, Y\rangle$, где X есть $\langle n, n\rangle$-кортеж, а Z есть $\neg_{\langle n,n\rangle}$-напарник $\langle n, n\rangle$-кортежа X.

Опираясь на замечания 6, формулируем следующие соглашения 5–8.

Соглашение 5. Множество всех упорядоченных троек, каждая из которых имеет вид $\langle X, Y, Z\rangle$, где X и Y являются $\langle n, n\rangle$-кортежами, а Z есть $\&_{\langle n,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$, обозначаем через $\&_{\langle n,n\rangle}$.

Соглашение 6. Множество всех упорядоченных троек, каждая из которых имеет вид $\langle X, Y, Z\rangle$, где X и Y являются $\langle n, n\rangle$-кортежами, а Z есть $\vee_{\langle n,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$, обозначаем через $\vee_{\langle n,n\rangle}$.

Соглашение 7. Множество всех упорядоченных троек, каждая из которых имеет вид $\langle X, Y, Z\rangle$, где X и Y являются $\langle n, n\rangle$-кортежами, а Z есть $\supset_{\langle n,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$, обозначаем через $\supset_{\langle n,n\rangle}$.

Соглашение 8. Множество всех упорядоченных пар, каждая из которых имеет вид $\langle X, Y\rangle$, где X есть $\langle n, n\rangle$-кортеж, а Z есть $\neg_{\langle n,n\rangle}$-напарник $\langle n, n\rangle$-кортежа X, обозначаем через $\neg_{\langle n,n\rangle}$.

Лемма 6. Для всяких $\langle n, n\rangle$-кортежей X и Y существует единственный $\&_{\langle n,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$.

Лемма 7. Для всяких $\langle n, n\rangle$-кортежей X и Y существует единственный $\vee_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$.

Лемма 8. Для всяких $\langle n, n\rangle$-кортежей X и Y существует единственный $\supset_{\langle n,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$.

Можно построить доказательства лемм 6, 7, 8, аналогичные данному в (Попов, 2017a: 57–81) доказательству леммы, имеющей в (Попов, 2017a: 57–81) номер 6.

Лемма 9. Для всяких $\langle n, n\rangle$-кортежей X и Y существует единственный $\neg_{\langle n,n\rangle}$-напарник $\langle n, n\rangle$-кортежа X.

Доказательство. Докажем лемму 9.

1. X есть $\langle n,n\rangle$-кортеж (допущение).

   Используя определение $\langle n,n\rangle$-кортежа, получаем, что верны следующие утверждения (2) и (3).
2. Множество $\{\langle 1,X(2)\rangle,\ldots,\langle n,X(n+1)\rangle,\langle n+1,1\rangle\}$ и множество

$$\{\langle 1,X(2)\rangle,\ldots,\langle n,X(n+1)\rangle,\langle n+1,0\rangle\}$$

   являются отображениями множества $\{1,...,n,n+1\}$ в множество $\{0,1\}$.
3. $X(n+1)=0$ или $X(n+1)=1$.
4. $X(n+1)=0$ (допущение).

   Опираясь на утверждения (1), (2), (4) и на определение 15, получаем, что
5. множество $\{\langle 1,X(2)\rangle,\ldots,\langle n,X(n+1)\rangle,\langle n+1,1\rangle\}$ есть $\neg_{<n,n>}$-напарник $\langle n,n\rangle$-кортежа X.
6. Существует $\neg_{\langle n,n\rangle}$-напарник $\langle n,n\rangle$-кортежа X (из (5)).

   Снимая допущение (4), получаем, что
7. если $X(n+1)=0$, то существует $\neg_{\langle n,n\rangle}$-напарник $\langle n,n\rangle$-кортежа X.
8. $X(n+1)=1$ (допущение).

   Опираясь на утверждения (1), (2), (4) и на определение 15, получаем, что
9. множество $\{\langle 1,X(2)\rangle,\ldots,\langle n,X(n+1)\rangle,\langle n+1,0\rangle\}$ есть $\neg_{\langle n,n\rangle}$-напарник $\langle n,n\rangle$-кортежа X.
10. Существует $\neg_{\langle n,n\rangle}$-напарник $\langle n,n\rangle$-кортежа X (из (9)).

   Снимая допущение (8), получаем, что
11. если $X(n+1)=1$, то существует $\neg_{\langle n,n\rangle}$-напарник $\langle n,n\rangle$-кортежа X.
12. Существует $\neg_{\langle n,n\rangle}$-напарник $\langle n,n\rangle$-кортежа X (из (3), (7) и (11)).
13. Z_1 и Z_2 являются $\neg_{\langle n,n\rangle}$-напарниками $\langle n,n\rangle$-кортежа X (допущение).
14. $Z_1\neq Z_2$ (допущение).

   Опираясь на утверждения (13) и (14) и на определение 15, получаем, что
15. существует такое i из $\{1,\ldots,n,n+1\}$, что $Z_1(i)\neq Z_2(i)$.

   Пусть
16. $i\in\{1,\ldots,n,n+1\}$, $Z_1(i)\neq Z_2(i)$.
17. $i\in\{1,\ldots,n,n+1\}$ (из (16)).
18. $Z_1(i)\neq Z_2(i)$ (из (16)).
19. $i\in\{1,\ldots,n\}$ или $i=n+1$ (из (18)).
20. $i\in\{1,\ldots,n\}$ (допущение).
21. $Z_1(i)=X(i+1)$ и $Z_2(i)=X(i+1)$ (из (13) и (20), по определению 15).
22. $Z_1(i)=Z_2(i)$ (из (21)).

   Утверждение (22) противоречит утверждению (18). Следовательно, неверно допущение (20). Итак,
23. неверно, что $i\in\{1,\ldots,n\}$.

24. $i = n + 1$ (из (19) и (23)).
25. $X(n + 1) = 0$ (допущение).
26. $Z_1(n + 1) = 1$ и $Z_2(n + 1) = 1$ (из (13) и (25), по определению 15).
27. $Z_1(i) = 1$ и $Z_2(i) = 1$ (из (24) и (26)).
28. $Z_1(i) = Z_2(i)$ (из (27)).

Утверждение (28) противоречит утверждению (18). Следовательно, неверно допущение (25). Итак,

29. (29) неверно, что $X(n + 1) = 0$.
30. $X(n + 1) = 1$ (из (3) и (29)).
31. $Z_1(n + 1) = 0$ и $Z_2(n + 1) = 0$ (из (13) и (30), по определению 15).
32. $Z_1(i) = 0$ и $Z_2(i) = 0$ (из (24) и (31)).
33. $Z_1(i) = Z_2(i)$ (из (32)).

Утверждение (33) противоречит утверждению (18). Следовательно, неверно допущение (14). Итак,

34. $Z_1 = Z_2$.

Снимая допущение (13) и обобщая, получаем, что

35. для всякого Z_1 и для всякого Z_2: если Z_1 и Z_2 являются $\neg_{\langle n,n\rangle}$-напарниками $\langle n, n\rangle$-кортежа X, то $Z_1 = Z_2$.

Опираясь на утверждения (12) и (35), получаем, что

36. существует единственный $\neg_{\langle n,n\rangle}$-напарник $\langle n, n\rangle$-кортежа X.

Снимая допущение (1) и обобщая, завершаем доказательство леммы 9. Лемма 9 доказана. □

Лемма 10. $\&_{\langle n,n\rangle}$ есть бинарная операция на $C_{\langle n,n\rangle}$.

Лемма 11. $\vee_{\langle n,n\rangle}$ есть бинарная операция на $C_{\langle n,n\rangle}$.

Лемма 12. $\supset_{\langle n,n\rangle}$ есть бинарная операция на $C_{\langle n,n\rangle}$.

Построены доказательства лемм 10, 11, 12, аналогичные данному в (Попов 2017a) доказательству леммы, имеющей в (Попов 2017a) номер 10. При этом в доказательстве предложенной выше леммы 10 следует использовать леммы 2 и 6, в доказательстве предложенной выше леммы 11 следует использовать леммы 3 и 7, а в доказательстве предложенной выше леммы 12 следует использовать леммы 4 и 8.

Лемма 13. $\neg_{\langle n,n\rangle}$ есть унарная операция на $C_{\langle n,n\rangle}$.

Построено доказательство леммы 13, аналогичное данному в (Попов 2017a) доказательству леммы, имеющей в (Попов 2017a) номер 13. В доказательстве предложенной выше леммы 13 использованы леммы 5 и 9.

Руководствуясь простыми теоретико-множественными фактами, получаем следующее: существует единственная упорядоченная четверка, первый член которой есть $\&_{\langle n,n\rangle}$, второй — $\vee_{\langle n,n\rangle}$, третий — $\supset_{\langle n,n\rangle}$, а четвертый — $\neg_{\langle n,n\rangle}$, и существует единственная упорядоченная тройка, первый член которой есть $C_{\langle n,n\rangle}$, второй — $D_{\langle n,n\rangle}$, а третий — $\langle \&_{\langle n,n\rangle}, \vee_{\langle n,n\rangle}, \supset_{\langle n,n\rangle}, \neg_{\langle n,n\rangle}\rangle$.

Но тогда корректно следующее замечание 7.

Замечание 7. В свете того, что множество $D_{\langle n,n\rangle}$ включается в множество $C_{\langle n,n\rangle}$, а $\&_{\langle n,n\rangle}$, $\vee_{\langle n,n\rangle}$, $\supset_{\langle n,n\rangle}$ и $\neg_{\langle n,n\rangle}$ — операции на множестве $C_{\langle n,n\rangle}$, ясно, что $\langle C_{\langle n,n\rangle}$, $C_{\langle n,n\rangle}$, $\langle \&_{\langle n,n\rangle}, \vee_{\langle n,n\rangle}, \supset_{\langle n,n\rangle}, \neg_{\langle n,n\rangle}\rangle\rangle$ является логической матрицей.

Соглашение 9. Логическую матрицу $\langle C_{\langle n,n\rangle}$, $C_{\langle n,n\rangle}$, $\langle \&_{\langle n,n\rangle}, \vee_{\langle n,n\rangle}, \supset_{\langle n,n\rangle}, \neg_{\langle n,n\rangle}\rangle\rangle$ обозначаем через $\mathfrak{M}(n,n)$ и называем $\langle n,n\rangle$-матрицей.

Соглашение 10. Результат применения операций $\bullet$ из $\{\&_{\langle n,n\rangle}, \vee_{\langle n,n\rangle}, \supset_{\langle n,n\rangle}\}$ к упорядоченной паре $\langle X,Y\rangle$ элементов множества $C_{\langle n,n\rangle}$ обозначаем через $(X \bullet Y)$, а результат применения операций $\neg_{\langle n,n\rangle}$ к элементу X множества $C_{\langle n,n\rangle}$ обозначаем через $\neg_{\langle n,n\rangle}(X)$.

Определение 15. Называем $\mathfrak{M}(n,n)$-оценкой (или оценкой в $\mathfrak{M}(n,n)$) отображения множество всех пропозициональных переменных языка L в $C_{\langle n,n\rangle}$.

Определение 16. Называем $\mathfrak{M}(n,n)$-означиванием при $\mathfrak{M}(n,n)$-оценке ρ такое отображение g множества всех L-формул в множество $C_{\langle n,n\rangle}$, что выполняются следующие условия:

1. для всякой пропозициональной переменной q языка L $g(q) = \rho(q)$;
2. для всяких L-формул A и B:
   (a) $g((A\&B)) = (g(A)\&_{\langle n,n\rangle}g(B))$,
   (b) $g((A \vee B)) = (g(A)\vee_{\langle n,n\rangle}g(B))$,
   (c) $g((A \supset B)) = (g(A)\supset_{\langle n,n\rangle}g(B))$,
   (d) $g((\neg A)) = \neg_{\langle n,n\rangle}(g(A))$.

Замечание 8. Можно доказать, что для всякой $\mathfrak{M}(n,n)$-оценки ρ существует единственное $\mathfrak{M}(n,n)$-означивание при ρ. Но тогда корректно следующее соглашение 11.

Соглашение 11. Обозначаем через $|.|_\rho^{\langle n,n\rangle}$ $\mathfrak{M}(n,n)$-означивание при $\mathfrak{M}(n,n)$-оценке ρ, а результат применения $|.|_\rho^{\langle n,n\rangle}$ к L-формуле A обозначаем через $|A|_\rho^{\langle n,n\rangle}$.

Определение 17. Называем A $\mathfrak{M}(n,n)$-общезначимой (или общезначимой в $\mathfrak{M}(n,n)$) L-формулой, если для всякой $\mathfrak{M}(n,n)$-оценки ρ $|A|_\rho^{\langle n,n\rangle} \in D_{\langle n,n\rangle}$.

Определение 18. Говорим, что A $\mathfrak{M}(n,n)$-следует из M (или из M $\mathfrak{M}(n,n)$-следует A), если выполняются три условия: (1) A есть L-формула, (2) M есть множество L-формул, (3) для всякой $\mathfrak{M}(n,n)$-оценки ρ верно, что если $|B|_\rho^{\langle n,n\rangle} \in D_{\langle n,n\rangle}$ для всякой L-формулы B из M, то $|A|_\rho^{\langle n,n\rangle} \in D_{\langle n,n\rangle}$.

Определение 19. Называем v-q-кортежем (где v есть $I_{\langle n,n\rangle}$-оценка, а q есть пропозициональная переменная языка L) такое отображение φ множества $\{1, \dots, n, n{+}1\}$ на множество $\{v(\neg^{[0]}(q)), ..., v(\neg^{[n-1]}(q)), v(\neg^{[n]}(q))\}$, что для всякого i из $\{1, \dots, n, n+1\}$ $\varphi(i) = v(\neg^{[i-1]}(q))$.

Замечание 9. Можно доказать, что для всякой $I_{\langle n,n\rangle}$-оценки v и для всякой пропозициональной переменной q языка L существует единственный v-q-кортеж.

Но тогда корректно следующее соглашение 12.

Соглашение 12. Условимся обозначать v-q-кортеж (где v есть $I_{\langle n,n\rangle}$-оценка, а q есть пропозициональная переменная языка L) через $(v - q - cort)$.

Лемма 14. Для всякой $I_{\langle n,n\rangle}$-оценки v и для всякой пропозициональной переменной q языка L $(v - q - cort)$ есть $\langle n, n\rangle$-кортеж.

Можно построить доказательство леммы 14, аналогичное данному в (Попов 2017a) доказательству леммы, имеющей в (Попов 2017a) номер 14.

Определение 20. Кортежным напарником $I_{\langle n,n\rangle}$-оценки v называем множество всех упорядоченных пар, каждая из которых имеет вид $\langle q, (v - q - cort)\rangle$, где q есть пропозициональная переменная языка L.

Замечание 10. Можно доказать, что для всякой $I_{\langle n,n\rangle}$-оценки существует единственный кортежный напарник этой $I_{\langle n,n\rangle}$-оценки.

Но тогда корректно следующее соглашение 13.

Соглашение 13. Для всякой $I_{\langle n,n\rangle}$-оценки v обозначаем ее кортежного напарника через $(cort, v)$.

Лемма 15. Для всякой $I_{\langle n,n\rangle}$-оценки v $(cort, v)$ есть $\mathfrak{M}(n, n)$-оценка.

Доказательство леммы 15 аналогично доказательству сформулированной в (Попов 2017b) леммы под номером 15, проведенному в (Попов 2017b). В доказательстве предложенной выше леммы 15 использована лемма 14.

Определение 21. 0-1-напарником $\mathfrak{M}(n, n)$-оценки ρ называем множество всех упорядоченных пар, каждая из которых имеет вид $\langle\neg^{[k]}(q), \rho(q)(k + 1)\rangle$, где q есть пропозициональная переменная языка L, а k есть целое неотрицательное число, которое $\leq n$.

Замечание 11. Можно доказать, для всякой $\mathfrak{M}(n, n)$-оценки существует единственный 0-1-напарник этой $\mathfrak{M}(n, n)$-оценки.

Но тогда корректно следущее соглашение 14.

Соглашение 14. Для всякой $\mathfrak{M}(n,n)$-оценки ρ обозначаем ее 0-1-напарника через (two, ρ).

Лемма 16. Для всякой $\mathfrak{M}(n,n)$-оценки ρ (two, ρ) есть $I_{\langle n,n\rangle}$-оценка.

Доказательство. Докажем лемму 16.

1. ρ есть $\mathfrak{M}(n,n)$-оценка (допущение).
   Опираясь на утверждение 1, на определение 21 и на соглашение 14, получаем, что
2. (two, ρ) есть множество всех упорядоченных пар, каждая из которых имеет вид $\langle \neg^{[k]}(q), \rho(q)(k+1)\rangle$, где q есть пропозициональная переменная языка L, а k есть целое неотрицательное число, которое $\leq n$.
3. (two, ρ) включается в декартово произведение множества всех квазиэлементарных L-формул, длина каждой из которых $\leq n$, на множество $\{0, 1\}$.
   Докажем утверждение (3).

3.1. $\alpha \in (two, \rho)$ (допущение).
   Опираясь на утверждения (2) и (3.1), получаем, что
3.2. существуют такая пропозициональная переменная q языка L и такое целое неотрицательное число k, которое $\leq n$, что $\alpha = \langle \neg^{[k]}(q), \rho(q)(k+1)\rangle$.

   Пусть
3.3. r есть пропозициональная переменная языка L, l есть целое неотрицательное число, которое $\leq n$, $\alpha = \langle \neg^{[l]}(r), \rho(r)(l+1)\rangle$.
3.4. r есть пропозициональная переменная языка L (из (3.3)).
3.5. l есть целое неотрицательное число, которое $\leq n$ (из (3.3)).
3.6. $\alpha = \langle \neg^{[l]}(r), \rho(r)(l+1)\rangle$ (из (3.3)).
   Опираясь на утверждения (3.4), (3.5) и на замечание 2, получаем, что
3.7. $\neg^{[l]}(r)$ есть квазиэлементарная L-формула длины l.
3.8. $\rho(r) \in C_{<n,n>}$ (из (1),(3.4), по определению 15).
   Опираясь на утверждение (3.8) и на замечание 4, получаем, что
3.9. $\rho(r)$ есть $< n, n >$-кортеж.
3.10. $l+1$ есть целое положительное число, которое $\leq n+1$ (из (3.5)).
3.11. $\rho(r)(l+1) \in \{0, 1\}$(из (3.9) и (3.10), по определению 5).
   В свете утверждений (3.5), (3.7) и (3.11), ясно, что
3.12. $\langle \neg^{[l]}(r), \rho(r)(l+1)\rangle$ принадлежит декартову произведению множества всех квазиэлементарных L-формул, длина каждой из которых $\leq n$, на множество $\{0, 1\}$.
3.13. α принадлежит декартову произведению множества всех квазиэлементарных L-формул, длина каждой из которых $\leq n$, на множество $\{0, 1\}$ (из (3.6) и (3.12)).

   Снимая допущение (3.1) и обобщая, получаем, что
3.14. для всякого α: если $\alpha \in (two, \rho)$, то α принадлежит декартову произведению

множества всех квазиэлементарных L-формул, длина каждой из которых $\leq n$, на множество $\{0, 1\}$.
Опираясь на утверждение (3.14) и на определение теоретико-множественного включения, устанавливаем справедливость утверждения (3).

Утверждение (3) доказано.

4. Для всякой квазиэлементарной L-формулы Q длины $\leq n$ существует x, для которого $< Q, x >\in (two, \rho)$.

Докажем утверждение (4).

4.1. Q есть квазиэлементарная L-формула длины $\leq n$ (допущение).
Понятно, что верны следующие утверждения (4.2) и (4.3).
4.2. $h(Q) \leq n$.
4.3. $h(Q)$ есть целое неотрицательное число.
В свете замечания 2, ясно, что
4.4. для всякого целого неотрицательного числа k: Q есть квазиэлементарная L-формула длины k тогда и только тогда, когда Q есть $\neg^{[k]}(q)$ для некоторой пропозициональной переменной q языка L.
4.5. Q есть квазиэлементарная L-формула длины $h(Q)$ тогда и только тогда, когда Q есть $\neg^{[h(Q)]}(q)$ для некоторой пропозициональной переменной q языка L (из (4.3) и (4.4)).
Разумеется, что
4.6. Q есть квазиэлементарная L-формула длины $h(Q)$.
4.7. Q есть $\neg^{[h(Q)]}(q)$ для некоторой пропозициональной переменной q языка L (из (4.5) и (4.6)).
4.8. Существуют такая пропозициональная переменная q языка L и такое целое положительное число k, что Q есть $\neg^{[k]}(q)$ и $k \leq n$ (из (4.2), (4.3) и (4.7)).

Пусть
4.9. s есть пропозициональная переменная языка L, j есть целое неотрицательное число, которое $\leq n$, Q есть $\neg^{[j]}(s)$.
4.10. s есть пропозициональная переменная языка L (из (4.9)).
4.11. j есть целое неотрицательное число, которое $\leq n$ (из (4.9)).
4.12. Q есть $\neg^{[j]}(s)$ (из (4.9)).
4.13. $\rho(s) \in C\langle n, n\rangle$ (из (1) и (4.10), по определению 15).
Опираясь на утверждение (4.13) и на замечание 4, получаем, что
4.14. $\rho(s)$ есть $\langle n, n\rangle$-кортеж.
4.15. $j + 1$ есть целое положительное число, которое $\leq n + 1$ (из (4.11)).
4.16 $\rho(s)(j + 1) \in \{0, 1\}$ (из (4.14) и (4.15), по определению 5).
В свете утверждений (4.10) и (4.11) ясно, что
4.17 $\langle\neg^{[j]}(s), \rho(s)(j + 1)\rangle \in (two, \rho)$.
4.18 $\langle Q, \rho(s)(j + 1)\rangle \in (two, \rho)$ (из (4.12) и (4.17)).

4.19 Существует такой x, что $\langle Q, x\rangle \in (two, \rho)$ (из (4.18)).

Снимая допущение (4.1) и обобщая, завершаем доказательство утверждения (4).

Утверждение (4) доказано.

5. Для всяких x,y и z: если $\langle x, y\rangle \in (two, \rho)$ и $\langle x, z\rangle \in (two, \rho)$, то $y = z$.

Докажем утверждение (5).

5.1 $\langle x, y\rangle \in (two, \rho)$ и $\langle x, z\rangle \in (two, \rho)$ (допущение).
Опираясь на утверждение (5.1), на определение 21 и на соглашение 14, легко показать, что

5.2 существуют такая пропозициональная переменная q языка L и такое целое неотрицательное число k, что x есть $\neg^{[k]}(q)$ и $k \leq n$, выполняющие условия: $\langle x, y\rangle = \langle \neg^{[k]}(q), \rho(q)(k+1)\rangle$ и $\langle x, z\rangle = \langle \neg^{[k]}(q), \rho(q)(k+1)\rangle$.
Используя утверждение (5.1) и применяя известную теорему о равенстве упорядоченных пар, получаем, что

5.3 $y = z$.
Снимая допущение (5.1) и обобщая, завершаем доказательство утверждения (5).

Утверждение (5) доказано.

В свете утверждений (3), (4), (5) и стандартного определения отображения множества в множество ясно, что

6. (two, ρ) есть отображение множества всех квазиэлементарных L-формул, длина каждой из которых $\leq n$, в множество $\{0, 1\}$.
7. (two, ρ) есть $I_{\langle n,n\rangle}$-оценка (из (6), по определению 1).

Снимая допущение (1) и обобщая, завершаем доказательство леммы 16.
Лемма 16 доказана. □

Очевидно, что для всякой L-формулы A и для всякой $I_{\langle n,n\rangle}$-оценки v существует единственное множество упорядоченных пар, которому принадлежат все те и только те упорядоченные пары, каждая из которых имеет вид $\langle i, \Phi_v^{\langle n,n\rangle}(\neg^{[i-1]}(A))\rangle$, где $i \in \{1, \ldots, n, n+1\}$, при этом понятно, что указанное множество

$$\{\langle 1, \Phi_v^{\langle n,n\rangle}(\neg^{[0]}(A))\rangle, \ldots, \langle n, \Phi_v^{\langle n,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(A))\rangle, \langle n+1, \Phi_v^{\langle n,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle\}$$

есть отображение множества $\{1, \ldots, n, n+1\}$ в множество $\{0, 1\}$. Но тогда ясно, что справедлива следующая лемма 17.

Лемма 17. Для всякой L-формулы A и для всякой $I_{\langle n,n\rangle}$-оценки v верно, что $\{\langle 1, \Phi_v^{\langle n,n\rangle}(\neg^{[0]}(A))\rangle, \ldots, \langle n, \Phi_v^{\langle n,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(A))\rangle, \langle n+1, \Phi_v^{\langle n,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle\} \in C_{\langle n,n\rangle}$.

Лемма 18. Для всякой L-формулы A и для всякой $I_{\langle n,n\rangle}$-оценки v: если $\Phi_v^{\langle n,n\rangle}(\neg^{[n]}(A)) = 1$, то $\Phi_v^{\langle n,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A)) = 0$.

Доказательство леммы 18 аналогично доказательству сформулированной в (Попов 2017b: 25–58) леммы под номером 18, проведенному в (Попов 2017b: 25–58). В доказательстве предложенной выше леммы 18 использована лемма 1.

Лемма 19. Для всякой L-формулы A и для всякой $I_{\langle n,n\rangle}$-оценки v: если $\Phi_v^{\langle n,n\rangle}(\neg^{[n]}(A)) = 0$, то $\Phi_v^{\langle n,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A)) = 1$.

Доказательство леммы 19 аналогично доказательству сформулированной в (Попов 2017b) леммы под номером 19, проведенному в (Попов 2017b).

Лемма 20. Для всякой L-формулы A и для всякой $I_{\langle n,n\rangle}$-оценки v $|A|^{\langle n,n\rangle}_{(cort,v)} = \{\langle 1, \Phi_v^{\langle n,n\rangle}(\neg^{[0]}(A))\rangle, \dots, \langle n, \Phi_v^{\langle n,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(A))\rangle, \langle n+1, \Phi_v^{\langle n,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle\}$.

Доказательство леммы 20 аналогично доказательству сформулированной в (Попов 2017b) леммы под номером 20, проведенному в (Попов 2017b). В доказательстве предложенной выше леммы 20 использованы леммы 1, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18 и 19.

Лемма 21. Для всякой L-формулы A и для всякой $I_{\langle n,n\rangle}$-оценки v: $\Phi_v^{\langle n,n\rangle}((A)) = 1$ тогда и только тогда, когда $|A|^{\langle n,n\rangle}_{(cort,v)} \in D_{\langle n,n\rangle}$.

Доказательство леммы 21 аналогично доказательству сформулированной в (Попов 2017b) леммы под номером 21, проведенному в (Попов 2017b). В доказательстве предложенной выше леммы 21 использованы леммы 17 и 20.

Лемма 22. Для всякой $\mathfrak{M}(n,n)$-оценки ρ верно, что $(cort, (two, \rho)) = \rho$.

Доказательство леммы 22 аналогично доказательству сформулированной в (Попов 2017b) леммы под номером 22, проведенному в (Попов 2017b). В доказательстве предложенной выше леммы 22 использована лемма 16.

Лемма 23. Для всякой L-формулы A и для всякой $\mathfrak{M}(n,n)$-оценки ρ: $|A|^{\langle n,n\rangle}_{\rho} \in D_{\langle n,n\rangle}$ тогда и только тогда, когда $\Phi^{\langle n,n\rangle}_{(two,\rho)}(A) = 1$.

Доказательство леммы 23 аналогично доказательству сформулированной в (Попов 2017b) леммы под номером 23, проведенному в (Попов 2017b). В доказательстве предложенной выше леммы 23 использованы леммы 16, 21, и 22.

Лемма 24. Для всякого множества M L-формул и для всякой L-формулы A: если из M $I_{\langle n,n\rangle}$-следует A, то из M $\mathfrak{M}(n,n)$-следует A.

Доказательство леммы 24 аналогично доказательству сформулированной в (Попов 2017b) леммы под номером 24, проведенному в (Попов 2017b). В доказательстве предложенной выше леммы 24 использованы леммы 16 и 23.

Лемма 25. Для всякого множества M L-формул и для всякой L-формулы A: если из M $\mathfrak{M}(n,n)$-следует A, то из M $I_{\langle n,n\rangle}$-следует A.

Доказательство леммы 25 аналогично доказательству сформулированной в (Попов 2017b) леммы под номером 25, проведенному в (Попов 2017b). В доказательстве предложенной выше леммы 25 использованы леммы 15 и 21.

Очевидным следствием лемм 24 и 25 является теорема 3.

Теорема 3. Для всякого множества M L-формул и для всякой L-формулы A: из M $I_{\langle n,n\rangle}$-следует A тогда и только тогда, когда из M $\mathfrak{M}(n,n)$-следует A.

Теорема 4. Для всякой L-формулы A: $A \in I_{\langle n,n\rangle}$ тогда и только тогда, когда A есть $\mathfrak{M}(n,n)$-общезначимая L-формула.

Доказательство. Докажем теорему 4.

Разумеется, что

1. $\varnothing$ есть множество L-формул.
2. Для всякой L-формулы A: из $\varnothing$ $I_{\langle n,n\rangle}$-следует A тогда и только тогда, когда из $\varnothing$ $\mathfrak{M}(n,n)$-следует A (из (1), по теореме 3).

   Очевидно, что справедливы следующие утверждения (3) и (4).
3. Для всякой L-формулы A: из $\varnothing$ $I_{\langle n,n\rangle}$-следует A тогда и только тогда, когда A есть $I_{\langle n,n\rangle}$-общезначимая L-формула.
4. Для всякой L-формулы A: из $\varnothing$ $\mathfrak{M}(n,n)$-следует A тогда и только тогда, когда A есть $\mathfrak{M}(n,n)$-общезначимая L-формула.
5. Для всякой L-формулы A: A есть $I_{\langle n,n\rangle}$-общезначимая L-формула тогда и только тогда, когда A есть $\mathfrak{M}(n,n)$-общезначимая L-формула (из (2), (3) и (4)).
6. Для всякой L-формулы A: $A \in I_{\langle n,n\rangle}$ тогда и только тогда, когда A есть $\mathfrak{M}(n,n)$-общезначимая L-формула (из (5), по теореме 2).

Теорема 4 доказана. □

В свете теоремы 4 ясно, что $\mathfrak{M}(n,n)$ является характеристической матрицей логики $I_{\langle n,n\rangle}$. А поскольку $C_{\langle n,n\rangle}$ есть конечное множество, то понятно, что логическая матрица $\mathfrak{M}(m,n)$ конечна. Таким образом, справедлива следующая теорема 5.

Теорема 5. Логика $I_{\langle n,n\rangle}$ таблична в том смысле, что существует конечная характеристическая матрица логики $I_{\langle n,n\rangle}$.

Опираясь на теорему 5 и учитывая, что n — произвольное целое положительное число, приходим к следующему обобщению: для всякого целого положитльного числа x, логика $I_{\langle x,x\rangle}$ таблична в том смысле, что существует конечная характеристическая матрица логики $I_{\langle x,x\rangle}$.

Таким образом, поставленная в статье цель достигнута: доказано, что для всякого целого положительного числа x логика $I_{\langle x,x\rangle}$ таблична.

Литература

Попов 2016 — *Попов, В. М.* Секвенциальная аксиоматизация и семантика I-логик васильевского типа // Логические исследования. 2016. Т. 22. № 1. С. 32–69.

Попов 2017a — *Попов, В. М.* К проблеме характеризации логик васильевского типа: о табличности логик $I_{\langle x,y\rangle}$ $(x, y \in \{0, 1, 2 \dots\}$ и $x < y)$ // Логические исследования. 2017. Т. 23. № 1. С. 57–82.

Попов 2017b — *Попов, В. М.* К проблеме характеризации логик васильевского типа: о табличности логик $I_{\langle x,y\rangle}$ $(x, y \in \{0, 1, 2 \dots\}$ и $x < y)$. Часть II // Логические исследования. 2017. Т. 23. № 2. С. 25–59.