ЛОГИКА СЕГОДНЯ

Илья Егорычев[1]

СИТУАЦИЯ СОПРЯЖЕНИЯ И КАТЕГОРНЫЕ ОСНОВАНИЯ ЛОГИКИ

Аннотация. Автор в своей статье исходит из убеждения, что ситуация сопряжения является одной из фундаментальных в теории категорий. Автор последовательно демонстрирует, что существование сопряженных функторов к некоторым элементарым функторам тождественно фиксированию некоторой логической структуры и логических ресурсов. Именно данная неожиданно глубокая идея выдающегося математика Уильяма Ловера, что все логические операции должны возникать как сопряжение к некоторым базовым функторам между категориями, убедила в свое время математиков в том, что категорный анализ логики может оказаться чрезвычаийно продуктивным и правильным. В данной статье попытка такого анализа предпринимается, в частности, с целью прояснения природы логических кванторов существования и всеобщности.

Ключевые слова: теория категорий, категорный анализ логики, ситуация сопряжения, логические кванторы, контекст.

Ilya Egorychev

THE ADJOINT SITUATION AND CATEGORIAL FOUNDATIONS OF LOGIC

Abstract. The author bases his work on the conviction that in category theory the adjoint situation is one of the fundamentals. The author consistently demonstrates that existence of adjoints to certain elementary functors amounts to a specification of logical structures and resources. The surprisingly deep insight, due to the prominent mathematician William Lavwere, that all logical operations must arise as adjunction to some basic functors has convinced the mathematical community of the time that the categorial analysis of logic might be fruitful and coherent. In the present article such an analysis is applied in particular to revealing the nature of existential and universal logical quantifiers.

Keywords: category theory, categorial analysis of logic, adjoint situation, logical quantifiers, context.

[1] *Егорычев Илья Эдуардович* — доктор философских наук, доцент кафедры философии науки и техники Санкт-Петербургского государственного университета.

Ilya E. Egorychev, Doctor of Science, associate professor, Department of Philosophy of Science and Technology, Saint Petersburg State University.

Для ответа, который невозможно высказать,
невозможно также высказать и вопрос.
Витгенштейн 1994: 72

8 сентября 1942 года два математика Самюэль Эйленберг и Сандерс Маклейн представили Американскому математическому обществу доклад по названием «Общая теория естественных эквивалентностей» (Eilenberg, MacLane 1945). Изначально идея теории родилась из желания ученых иметь некоторый автономный контекст, в котором бы наиболее очевидным образом могло быть выражено понятие *естественного преобразования* — такого семейства правил, которые обнаруживают имеющееся в ряде случаев единообразие перехода от одной интерпретации к другой. Под интерпретацией здесь нужно понимать специального вида отношение, в котором могут оказаться две на первый взгляд совершенно между собой не связанные области знания. Это отношение носит название *функториального*, а правило, которым данное свойство строго определяется, соответственно, — функтора[2].

Разумеется, Эйленберг и Маклейн обнаружили такое единообразие переходов в различных областях знания математического — таких, например, как теория множеств, теория групп или коммутативных колец, линейная алгебра, топология и т. д. Но удивительным образом разработанная ими теория (получившая название теории категорий) со всем ее понятийным аппаратом почти немедленно нашла себе применение, далеко выходящее за пределы одной лишь математики. В частности, оказалось, что, будучи переформулированными на языке теории категорий, становятся гораздо более очевидными многие аспекты формальной логики.

Вообще, «магия» теории категорий проявляется, прежде всего, в том, что все ее понятия и определения возникают каким-то удивительно естественным образом. Например, классическое определение функции может быть пугающим для неспециалиста: выражение вида $f(x) = y$ моментально отсылает к формулам, числам (как правило, действительным), графикам. И вот у Витольда Гуревича в записях к лекциям (Hurewicz, 1941) начинает встречаться обозначение функции в виде... стрелки! Идея практически моментально подхватывается другими математиками, и запись $f : X \to Y$ вытесняет предшествующие нотации (такую, например, как $f(X) \subset Y$). И это неудивительно, поскольку графическое изображение стрелки смещает акцент с формул и вычислений числовых значений на некоторое абстрактное правило сопоставления элементов одного множества элементам другого, а еще шире — всего лишь указывает на наличие некоторого (необязательно функционального) *отношения между объектами* произвольной, вообще говоря, природы. Как говорится, *нотация (стрелка) породила концепт (категория)* (Mac Lane, 1998, 30).

Итак, категория $\boldsymbol{C}$ состоит из:

[2]Строгое определение функтора будет дано ниже. Неформально же говоря, функториальным называют такое отношение, которое не просто ставит в некоторое осмысленное соответствие объектам одной области знания объекты из другой области, но и согласованно действует на отношениях, которые существуют меджу объектами внутри каждой из этих областей.

- класса объектов $\mathrm{Ob}\,\boldsymbol{C}$;

- для каждой пары объектов $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\boldsymbol{C}$ задано множество морфизмов, или стрелок, $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(X, Y)$ вида $f : X \to Y$. Объект X называют источником (source), а объект Y — назначением (target) морфизма;

- для каждой пары морфизмов f и g таких, что назначение f совпадает с источником g, определена операция их композиции $g \circ f$, удовлетворяющая аксиоме ассоциативности $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$,
  и существует стрелка $h \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(X, Z)$ такая, что $h = g \circ f$;

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

- для каждого объекта $X \in \mathrm{Ob}\,\boldsymbol{C}$ задан *тождественный* морфизм $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(X, X)$, причем, для любого $f \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(X, Y)$,

$$f \circ \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_Y \circ f = f.$$

Т. е., чтобы задать категорию, необходимо указать ее объекты и стрелки.

Теперь «правило сопоставления» можно сколь угодно обобщать дальше, требование его функториальности — это лишь *естественное* желание некоторой разумной согласованности: если между объектами уже были установлены какие-то отношения и мы хотим сопоставить одним объектам какие-то другие объекты, между которыми тоже, возможно, существуют отношения, то вполне естественно потребовать, чтобы и сами эти отношения были каким-то образом согласованы. Что и приводит нас к формальному определению функтора:

Определение 1. Функтор $F : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ из категории $\boldsymbol{C}$ в категорию $\boldsymbol{D}$ — это стрелка, которая сопоставляет:

- каждому объекту $X \in \boldsymbol{C}$ объект $F(X) \in \boldsymbol{D}$;

- каждой стрелке $f \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(X, Y)$ стрелку $F(f) \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{D}}(F(X), F(Y))$ так, чтобы:

$$F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$$
$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

Другими словами, функтор есть категорное обобщение как понятия функции вообще (значениями функтора уже могут быть не только элементы какого-то множества, но и сами множества, причем очень сложно устроенные), так и понятия сохраняющего структуру преобразования — гомоморфизма. Маклейн замечает, что обобщения столь высокого уровня абстракции зачастую грозят перерасти в пустые самонадеянные спекуляции, чему в данном случае дополнительно способствовало то, что многие понятия из самой же философии и заимствовались: «категория» — у Аристотеля и Канта, «функтор» — из работы Карнапа (Carnap 2000), «естественное преобразование» — из бывшего в то время в употреблении неформального лексикона. Однако, с теорией категорий такого не случилось — и она остается чрезвычайно удобным инструментом анализа, отвечающим всем требованиям математической строгости.

Наш анализ мы начнем с рассмотрения того, что представляют из себя с точки зрения теории категорий кванторы существования и всеобщности.

* * *

Вновь обратимся к нашей стрелке $f : X \to Y$, и будем понимать под X и Y некоторые универсумы вещей (точек, тел, свойств и т. п.). В логике такие совокупности вещей иногда удобно называть контекстами, а отображение в таком случае будет являться некоторой интерпретацией контекстов. Более того, данная интерпретация опять-таки вполне естественным образом индуцирует отображение $f^* : \mathrm{Prop}_Y \to \mathrm{Prop}_X$ на множествах подмножеств[3] Y и X, где каждое подмножество является высказыванием в том смысле, что выделяет в соответствущем множестве такие его элементы, на которых данное высказывание истинно (о таком множестве еще можно думать как о множестве атрибутов, или свойств). С формальной точки зрения, f^* — это обратный образ функции f, для каждого $B \subseteq Y$ равный $f^{-1}(B) = \{x : x \in X \wedge f(x) \in B\}$. Множество подмножеств любого множества образует Булеву алгебру, т. е. частично упорядочено по включению, а на множестве высказываний эта частичная упорядоченность приобретает смысл материальной импликации, т. е. $A \subseteq C \Leftrightarrow Ax \Rightarrow Cx$. Таким образом, данные множества высказываний с определенным на них отношением логического следования есть не что иное, как категории, в которых между объектами существует не более одной стрелки.

Заметим теперь, что благодаря исходной интерпретации $f : X \to Y$ для любого высказывания B о вещах из Y мы по определению имеем некоторое высказывание $\mathrm{B}f$ о вещах из X такое, что $\mathrm{B}f(x) = \mathrm{B}(f(x))$. Более того, если $\mathrm{B}y \Rightarrow \mathrm{D}y$, то $\mathrm{B}f(x) \Rightarrow \mathrm{D}f(x)$, т. е. индуцированное на подмножествах отображение f^* сохраняет структуру логического следования[4] и, следовательно, $f^* : \mathrm{Prop}_Y \to \mathrm{Prop}_X$ есть функтор, который часто называют функтором подстановки, поскольку высказывание $\mathrm{B}f$ действительно производится путем замены (подстановки) в высказывании $\mathrm{B}y$ на $f(x)$ (подстановки $f(x)$ на место y). Возможно, данные обозначения сбивают с толку, если речь идет о произвольных контекстах, где высказывание $\mathrm{B}f$ может означать произвольный, вообще говоря, предикат P, но в контекстах математических данная подстановка выглядит

[3] Для наглядности будем считать, что с этого момента мы работаем в категории множеств **Set**; в общем же случае вместо множеств подмножеств следует рассматривать такие специальные объекты категории как map objects, или экспоненциалы.

[4] Если $f : X \to Y$ — функция, и B, D — подмножества в Y, то очевидно, что если $B \subseteq D$, то $f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(D)$.

абсолютно «прозрачной». Пускай, например, $f(x) = x^2$ и $By := y - 1 = 10$. Тогда $(Bf)x := x^2 - 1 = 10$. А если $Dy := y + 1 = 0$, то $(Df)x := x^2 + 1 = 0$.

Мы видим, что процесс подстановки осуществляется в направлении, противоположном f: в выражение, которое осмысленно в контексте Y, подставляется выражение, осмысленное в контексте X, — такой функтор принято называть контрвариантным. Но мы можем рассмотреть и функторы, действующие ковариантно, — например, такие:

$$\begin{tikzcd} P(X) \arrow[r, bend left, "\exists_f"] \arrow[r, bend right, "\forall_f"'] & P(Y) \arrow[l, "f^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

$$\exists_f(U) = \{y \in Y : \exists x\ f(x) = y \land x \in U\}$$

$$\forall_f(U) = \{y \in Y : \forall x\ f(x) = y \Rightarrow x \in U\}$$

Задав таким образом соответствующие отображения, мы вполне корректно определим предикаты существования и всеобщности, выделяющие в Y подмножества элементов со следующими свойствами:

a) $\exists_f U(y) :=$ «такие y, что в X существуют переходящие в них под действием f элементы, лежащие в U»;

b) $\forall_f U(y) :=$ «такие y, что все элементы из X, из которых под действием f можно в них попасть, лежат в U»[5].

Итак, если A — некоторое осмысленное утверждение в контексте X, то $\exists_f A$ и $\forall_f A$ будут осмысленными утверждениями в контексте Y, причем, нетрудно убедиться, что при так определенных кванторах существования и всеобщности будут иметь место следующие эквивалентности по отношению к функтору подстановки вдоль f:

$$\forall y \in Y, \forall x \in X \quad \exists_f Ay \Rightarrow By \Leftrightarrow Ax \Rightarrow Bfx \text{ и } By \Rightarrow \forall_f Ay \Leftrightarrow Bfx \Rightarrow Ax.$$

Действительно, используя свойства образов и прообразов функции, таких как

$$A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B) \tag{1}$$
$$C \subseteq D \Rightarrow f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D) \tag{2}$$
$$A \subseteq f^{-1}(f(A)) \tag{3}$$
$$f(f^{-1}(C)) \subseteq C, \tag{4}$$

[5] Если f — обыкновенная теоретико-множественная функция, то $\exists_f U$ совпадает с образом $f(U)$ в Y.

можно показать справедливость следующих теоретико-множественных вложений:

$$A \subseteq f^{-1}(B) \Rightarrow f(A) \subseteq f(f^{-1}(B)$$

$$f(A) \subseteq B \Rightarrow f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(B) \Rightarrow A \subseteq f^{-1}B$$

Следовательно, $A \subseteq f^{-1}B \Leftrightarrow f(A) \subseteq B$.

Заметим, что $\forall_f A(y)$ можно переформулировать как «такие y, прообразы которых лежат в A, т. е. $\forall_f A = \{y \in Y : f^{-1}(y) \subseteq A\}$. А значит, $f^{-1}B \subseteq A \Leftrightarrow B \subseteq \forall_f A$.

Но что значат эти эквивалентности с точки зрения теории категорий? Поскольку в Prop_X и Prop_Y между объектами существует не более одной стрелки, то это означает, что

$$\mathbf{Hom}_{\mathrm{Prop}_X}(A, f^*(B)) \cong \mathbf{Hom}_{\mathrm{Prop}_Y}(\exists_f A, B)$$

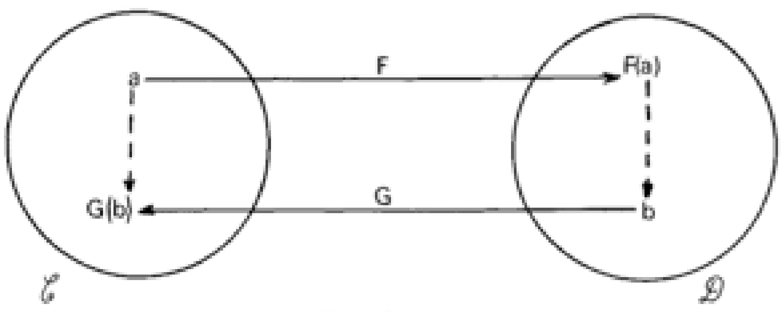
$$\mathbf{Hom}_{\mathrm{Prop}_X}(f^*(B), A) \cong \mathbf{Hom}_{\mathrm{Prop}_Y}(B, \forall_f A).$$

Такая ситуация может быть обобщена с категории множеств на произвольную категорию, и в теории категорий носит название *ситуации сопряжения*, а функторы, ее создающие, — *сопряженными*.

Формально это звучит так. Пусть $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{D}$ категории. *Сопряжением* категорий$\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{D}$ называется пара функторов $F : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ и $G : \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{C}$ таких, что для любых $A \in \mathrm{Ob}C$ и $B \in \mathrm{Ob}D$ отображение

$$\alpha_{A,B} : \mathbf{Hom}_{\boldsymbol{D}}(F(A), B) \to \mathbf{Hom}_{\boldsymbol{C}}(A, G(B))$$

является изоморфизмом[6].



В таком случае говорят, что множества стрелок

$$\mathbf{Hom}_{\boldsymbol{D}}(F(A), B) \text{ и } \mathbf{Hom}_{\boldsymbol{C}}(A, G(B))$$

естественно изоморфны[7], что мы и наблюдали в случаях с кванторами существования и всеобщности. Функтор F называют сопряженным слева к G и обозначают $F \dashv G$, а G — сопряженным справа к F: $G \vdash F$. Соответственно,

[6]Иллюстрация приводится по (Goldblatt, 2006).
[7]К вопросу естественности α мы еще вернемся чуть позже.

мы видим, что квантор всеобщности сопряжен справа к функтору подстановки, тогда как квантор существования является сопряженным к нему слева.

Ситуация сопряжения оказывается одной из фундаментальных в теории категорий, и именно данная неожиданно глубокая идея Уильяма Ловера[8], что все (!) логические операции должны возникать как сопряжение к некоторым базовым функторам между категориями, убедила математиков в том, что категорный анализ логики может оказаться чрезвычайно продуктивным и правильным.

В литературе можно часто встретить сравнение функторного сопряжения двух категорий со словарем, позволяющим осуществлять перевод с одного языка на другой. Но в случае перевода, например, с английского на французский (и обратно), когда языки в целом можно считать одинаково экспрессивными, хороший словарь также обеспечивает практически симметричную трансляцию идей между этими языками. Аналогией такой связи в теории категорий скеорее будет являться изоморфизм категорий или их эквивалентность[9], тогда как сопряженность аналогична получению максимальной коммуникативной эффективности при переводе с языка и на язык, который может оказаться концептуально значительно более бедным (или, наоборот, обладать гораздо более богатой экспрессией). Наиболее выпукло данная «концептуальная асимметрия» проявляется в паре сопряженных функторов, которые называются, соответственно, забывающим и свободным. Проиллюстрируем это на несколько упрощенном примере: представим себе множество повторяющихся звуков, которые производит годовалый ребенок. Взрослый тоже производит множество повторяющихся звуков, и в каком-то смысле мы можем посмотреть на речевую деятельность взрослого тоже как на производство множества упорядоченных звуков, хотя точнее будет все-таки называть упорядоченные звуки взрослого словами, которые могут образовывать суждения, которые, в свою очередь, бывают истинными и ложными и т. д. То есть на множестве повторяющихся звуков взрослого очевидным образом наличествует некоторая весьма богатая структура, которой пока лишено множество упорядоченных звуков годовалого ребенка. Таким образом, мы имеем нечто вроде двух категорий: $\boldsymbol{C} = \{$слова взрослого$\}$ и $\boldsymbol{D} = \{$повторяющиеся звуки$\}$. «Переводя» речь ребенка на язык взрослого,

[8]Уильям Ловер (англ. Francis William Lawvere, 9 февраля, 1937) — американский математик, известный за свои работы по теории категорий, теории топосов и философии математики.

[9]Если нам даны категории $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{D}$ и два функтора $F : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ и $G : \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{C}$, то изоморфизм этих категорий равносилен выполнению равенств: $G \circ F = \mathbf{1}_{\boldsymbol{C}}$ и $F \circ G = \mathbf{1}_{\boldsymbol{D}}$. Категорная эквивалентность есть ослабление требования выполнения строгих равенств и достаточность *изоморфности* данных функторных композиций тождественным функторам в соответствующих категориях: $G \circ F \cong \mathbf{1}_{\boldsymbol{C}}$ и $F \circ G \cong \mathbf{1}_{\boldsymbol{D}}$. Эквивалентные категории могут быть, на первый взгляд, очень разными, но, как и в случае изоморфизма алгебраических структур, в некотором важном смысле они оказываются «одинаково устроенными»: вся информация о том, что представляет из себя данная структура как категория, содержится и в категории, эквивалентной данной. Чрезвычайно нетривиальная идея о том, что вместо равенства функторов следует рассматривать функторный изоморфизм, была в сове время предложена и реализована Гротендиком, и в конечном итоге именно понятие категорной эквивалентности стало одним из центральных как в алгебраической геометрии, так и в категорном анализе логики.

мы как бы гипотетически «поднимаем» множество производимых им звуков до статуса нашего собственного языка, допуская, что в этих звуках содержится некоторый, пускай и неизвестный нам смысл. Задаваясь вопросом о том, что мог бы значить произнесенный ребенком звук «гуга», мы как бы резервируем для него место в нашем понятийном пространстве — *свободно* присоединяем к нему этот звук, не имея пока ни малейшего представления о том, как он соотносится с остальным множеством издаваемых ребенком звуков. Заметим, что «перевод» в другую сторону выглядит значительно проще: мы просто начинаем рассматривать слова как повторяющиеся звуки (а мы, как уже было сказано чуть выше, всегда способны так поступить), *забывая* об их смысле, — что, собственно, годовалый ребенок, скорее всего, и делает, слыша взрослую речь.

Продолжая аналогию дальше, мы можем предположить, что, расположив звуки ребенка в нашем понятийном пространстве, мы должны попытаться установить соответствия вида $G(B) \to A$ между лексиконом ребенка и словами взрослого. И то же самое пеытается проделать ребенок, вслушиваясь в наши звуки: $B \to F(A)$. В случае если бы такая глобальная система преобразований была возможна, мы бы имели ситуацию сопряжения.

Здесь очень важно обратить внимание на то, в каких категориях и какие уствнавливаются связи: стрелки вида $G(B) \to A$ рассматриваются в категории $\boldsymbol{C}$ слов взрослого, тогда как $B \to F(A)$ устанавливает ребенок в категории $\boldsymbol{D}$ повторяющихся звуков. Соответственно, свободный функтор $G : \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{C}$ будет левым сопряженным к забывающему $F : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$, но у нас нет никаких оснований думать, что он же будет и сопряженным к F справа, как на иллюстрирующей определение сопряжения схеме, приведенной выше. Поскольку в последнем случае мы были бы вынуждены подобрать для каждого слова взрослого какой-то аналог из лексикона ребенка, т. е. рассмотреть множество морфизмов $\mathbf{Hom}_{\boldsymbol{C}}(A, G(B))$ — что по понятным причинам было бы весьма затруднительно.

На этом примере, который, разумеется, не стоит понимать слишком буквально, тем не менее отчетливо видна как упомянутая ранее ассиметричность сопряжения, так и важность направления стрелок для ее установления. Это позволяет рассматривать сопряжение как очень далеко идущее концептуальное ослабление понятия обратного функтора в ситуауции категорного изоморфизма — в случае очевидно неизоморфных категорных структур мы, тем не менее, с помощью понятия сопряженности можем установить некоторую *меру одинаковости* двух подчас очень сильно различающихся категорий[10].

Забывающий функтор тривиален и неинформативен, и в этом смысле, безусловно, элементарен. Например, когда он действует из категории групп **Grp** в категорию множеств **Set**, то он, забывая о групповой структуре, сопостав-

[10] «Сопряжения обладают тем достоинством, что по сути являются вполне строгими определениями попыток построения обратных отображений, и часто существуют тогда, когда обратные отображения невозможны». (F. W. Lawvere. Tools for the advancement of objective logic: closed categories and toposes; MacNamara, Reyes, 1994, 47.)

ляет каждой группе множество ее же элементов, а множество соответствующих групповых гомоморфизмов начинает рассматривать как обычные функции между множествами. Свободный функтор, с другой стороны, чрезвычайно важная и осмысленная конструкция (хотя бы уже потому, что ничего не забывает и все помнит), поскольку по каждому множеству *свободно* строит группу, генерируя ее элементы как «слова» из конечного числа «букв алфавита», т. е. элементов данного множества и обратных им (и называемых генераторами). «Свобода» такого построения заключается в том, что группа оказывается свободна от всяких дополнительных соотношений, и проэтому любые два слова в ней будут различными, если только их тождество не следует из теоретико-групповых аксиом.

Выше мы назвали сопряжение ослаблением понятия изоморфизма категорий и мерой их сходства, а некоторые авторы называют сопряженные функторы *концептуально обратными* друг к другу (*conceptual inverses*[11]). Рассмотим эту идею подробнее. В только что приведенном примере категории **Grp** и **Set** очевидным образом неизоморфны — ну, хотя бы потому, что в **Grp** начальный и терминальный объекты совпадают, а в **Set** это разные объекты[12]. Поэтому обратный к забывающему функтору $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ мы не построим никак. Но это не отменяет существования большого числа неизоморфных способов вернуться в категорию групп, т. е. тех или иных способов задания на множествах групповой структуры, и можно надеяться, что хотя бы один из них будет обладать свойством функториальности и тем или иным образом систематически зависеть от U, что и происходит в случае свободного функтора $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Grp}$: применяя к некоторому множеству X последовательно F, а затем U, мы не вернемся точно в X, однако между X и $UF(X)$ существует фундаментальная зависимость, а именно, существует функция $i_X : X \to UF(X),\ i_X(x) = x \quad \forall x \in X$ (называемая *вставкой генераторов*), обладающая следующим универсальным свойством: для любой другой функции $f : X \to U(G)$ существует единственный групповой гомоморфизм $g : F(X) \to G$ такой, что f единственным образом пропускается через i_X: $U(g) \circ i_X = f$. Это означает, что объект $UF(X)$ является наилучшим, с точки зрения решения так называемой *проблемы вставки генераторов*, т. е. вложения элементов X в группу:

[11] См., например, (Marquis 2015).

[12] Объект категории $\boldsymbol{C}$ называют терминальным, если из любого другого объекта категории в него существует ровно одна стрелка. Нетрудно видеть, что, например, в категории множеств терминальным объектом будет являться одноэлементное множество, или синглетон. (Соответственно, начальным будет такой объект, *из* которого в любой другой существует всего одна стрелка.)

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, dotted, "g"] & G \\
U(F(X)) \arrow[r, "U(g)"] & U(G) \\
X \arrow[u, "i_X"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Более того, мы видим, что i_X устроена совершенно одинаково для любого $X \in \mathbf{Set}$, т. е. никак не зависит от конкретных объектов категории и морфизмов между ними, и, следовательно, имеет место отношение более высокого порядка всеобщности, а именно *морфизм функторов*: $\eta : \mathbf{1_{Set}} \to U \circ F$, где $\mathbf{1_{Set}}$ — это тождественный функтор, оставляющий в **Set** все на своем месте. Именно это естественным образом возникающее в ряде случаев единообразие, позволяющее абстрагироваться от конкретных отношений между конкретными объектами внутри категории, и было в свое время замечено Самюэлем Эйленбергом и Сандерсом Маклейном, а сама *естественность* была формализована ими следующим образом: если из категории $\boldsymbol{C}$ в категорию $\boldsymbol{D}$ существуют два функтора G и F, то семейство стрелок $\{\vartheta_C : FC \to GC\}_{C \in \boldsymbol{C}}$ является их *естественным преобразованием*, если для любой стрелки $f : C \to C'$ выполняется равенство: $\vartheta_{C'} \circ F(f) = G(f) \circ \vartheta_C$ (которое иногда называют *аксиомой естественности*), или, что то же самое, будет коммутировать следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
FC \arrow[r, "\vartheta_C"] \arrow[d, "Ff"'] & GC \arrow[d, "Gf"] \\
FC' \arrow[r, "\vartheta_{C'}"'] & GC'
\end{tikzcd}$$

Обращаем внимание, что данная диаграмма строится на образах объектов категории $\boldsymbol{C}$ под действием указанных функторов, т. е. в категории $\boldsymbol{D}$. Как образно пишет Стив Ауди, «Если думать о функторе $F : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ как о „картинке“ категории $\boldsymbol{C}$ в $\boldsymbol{D}$, то естественное преобразование $\vartheta_C : FC \to GC$ можно представлять себе в виде „цилиндра“ с такими картинками на каждом из его оснований» (Awodey 2010: 156).

Итак, еще раз: естественность преобразования функторов заключается в его систематичности, единообразии и независимости от участвующих в устанавливаемом отношении объпектов и стрелок категории. Но здесь следует добавить и кое что еще. Понятие естественности также формализует то, что математики обычно интуитивно понимают под словом «канонический» в том смысле, что если, к примеру, требуется выполнить некоторое действие, то решение о том, каким должно быть это действие, будет одинаковым для всех, кто станет его искать. С точностью до «здравого смысла», разумеется, где под здравым смыслом понимается та самая эффективность или оптимальность, которая и имела место, когда для решения проблемы вставки генераторов выбиралась функция $i_X(x) = x$.

Аналогичным образом определяется морфизм $\epsilon : F \circ U \to \mathbf{1_{Grp}}$, называемый *коединицей* сопряжения.

Заметим, что все эти рассуждения могут быть обобщены на случай ситуации сопряжения произвольных категорий $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{D}$ следующим образом: если $F : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ и $U : \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{C}$ — пара сопряженных функторов, т. е. если $\varphi_{X,Y} : \mathbf{Hom}_{\boldsymbol{D}}(F(X), Y) \to \mathbf{Hom}_{\boldsymbol{C}}(X, U(Y))$ — естественный изоморфизм на стрелках, то морфизмы $\eta : \mathbf{1}_{\boldsymbol{C}} \to U \circ F$ и $\epsilon : F \circ U \to \mathbf{1}_{\boldsymbol{D}}$ можно определить как

$$\eta_X = \varphi(\mathbf{1}_{FX})$$

$$\epsilon_Y = \psi(\mathbf{1}_{UY}),$$

где $\psi = \varphi^{-1}$, и из этих определений выводятся как их универсальность, так и естественность. Как мы уже говорили, понятие естественного преобразования указывает нам на такой тип связи, которая не зависит от конкретных объектов категорий: мы можем, например, думать о функторе как о некоторой «конструкции», которую мы собрали из объектов данной категории, и о другом функторе – как о какой-то другой конструкции. И вот иногда мы замечаем, что можем по некоторому правилу получать из одной конструкции другую, независимо от участвующих в этих конструкциях объектов, т. е. это правило связывает непосредственно сами конструкции, тогда как объекты мы можем варьировать без опасения, что конструкции будут нарушены[13].

Заметим теперь следующее: если бы F и U были обратными к друг другу в строго алгебраическом смысле, то имели бы место равенства: $U \circ F = \mathbf{1}_{\boldsymbol{C}}$ и $F \circ U = \mathbf{1}_{\boldsymbol{D}}$. Как уже отмечалось выше, в ситуации сопряжения столь строгие равенства не выполняются. Но при этом выполняются другие, из которых, в частности, становится более понятны названия[14] морфизмов η и ϵ: $F \xrightarrow{F\eta} U \circ F \circ U \xrightarrow{\epsilon F} F$ и $U \xrightarrow{\eta U} F \circ U \circ F \xrightarrow{U\epsilon} U$. Т. е.

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_F &= \epsilon F \circ F\eta \\ \mathbf{1}_U &= U\epsilon \circ \eta U, \end{aligned} \tag{5}$$

[13] Чтобы лучше понять, что именно означает естественность изоморфизма $\alpha_{A,B} : \mathbf{Hom}_{\boldsymbol{D}}(F(A), B) \to \mathbf{Hom}_{\boldsymbol{C}}(A, G(B))$, о которой было сказано в определении ситуации сопряжения, данное отображенние следует рассматривать именно как изоморфизм некоторых функторов, т. е., вообще говоря, как их естественное преобразование определенного вида. Искомыми функторами будут так называемые бифункторы, сопоставляющие паре $(A, B) \in \boldsymbol{C}^{op} \times \boldsymbol{D}$, соответственно, множества $\mathbf{Hom}_{\boldsymbol{D}}(F(A), B)$ и $\mathbf{Hom}_{\boldsymbol{C}}(A, G(B))$ в $\mathbf{Set}$. Естественность α по A и B в таком случае означает, что оно сохраняет категорную структуру при изменяющихся A и B.

[14] Другая причина происхождения названия состоит в том, что η является *монадой*, или единицей моноида — объекта моноидальной категории.

где $\mathbf{1}_F$, $\mathbf{1}_U$ — тождественные естественные преобразования соответствующих функторов.

То есть, мы видим, что тройка сопряжения (F, U, φ) всегда влечет существование пары естественных преобразований, удовлетворяющих соотношениям (5). Любопытно, что обратное утверждение оказывается тоже верным, т. е. существование единицы и коединицы сопряжения, удовлетворяющих соотношениям (5), оказывается эквивалентным «каноническому» определению ситуации сопряжения как наличия естественного изоморфизма $\mathbf{Hom}_{\boldsymbol{D}}(F(X), Y) \cong \mathbf{Hom}_{\boldsymbol{C}}(X, U(Y))$, данному нами ранее.

* * *

Можно, наверное, смело утверждать, что мощный сдвиг, который произошел в анализе логики в середине шестидесятых годов прошлого столетия, берет свое начало с осознания Ловером того поистине удивительного факта, что некоторые виды категорий могут исчерпывающим образом определяться исключительно постулированием существования функторов, сопряженных к некоторому заданному набору в определенном смысле элементарных функторов, — ничего больше для задания таких категорий не требовалось. Слегка упрощая, идея может быть сведена к утверждению, что *в данной категории представимы некоторые фундаментальные концептуальные процедуры.* И как совершенно справедливо отмечают Маркис и Рис, «сам по себе этот факт не являлся бы столь фундаментально значимым, если бы таким образом заданные категории не совпадали бы в буквальном, техническом смысле слова с формальными логическими концептами и теориями» (Marquis, Reyes, 2012, 700). Таким образом, существование сопряженных функторов к некоторым элементарым функторам тождественно фиксированию некоторой логической структуры и логических ресурсов.

Вообще говоря, функтор — это морфизм между произвольными категориями, но среди множества функторов будут более и менее сложно устроенные. Так, например, мы можем рассмотреть тривиальный и единственный функтор $t : \boldsymbol{C} \to \mathbf{1}$ из интересующей нас категории $\boldsymbol{C}$ в терминальную категорию, состоящую из одного объекта. Никто не запрещает нам также рассматривать «эндофункторы», т. е. морфизмы категории $\boldsymbol{C}$ в себя. Очевидно, что такие простые, специальным образом устроенные функторы и будут являться *элементарными.* Используя эти возможности, определим *декартово-замкнутую категорию* $\boldsymbol{C}$, потребовав существования функторов, сопряженных справа к трем функторам следующего вида:

1. $t : \boldsymbol{C} \to \mathbf{1}$
2. $\Delta : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C}$
3. $- \times A : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C} \quad \forall A \in \boldsymbol{C}.$

Сразу заметим, что данные сопряжения будут в точности эквивалентны существованию в категории $\boldsymbol{C}$, соответственно, терминального объекта $\mathbf{1}$, произведения (_ × _) и экспоненциала $(\_)^A$ (что и является формальным определением декартовой замкнутости), то есть, хотя мы и определяем категорию через внешние ей и находящиеся на более высоком уровне абстракции понятия, данные определения накладывают ограничения на внутреннюю структуру категории. Но простое наложение внутренних ограничений, во-первых, в ряде случаев выглядит случайным, а потому — неестественным. Во-вторых, переход на язык так называемой *функторной категории*[15], так сказать, интернализирует и, что крайне важно, — *иерархиезирует* весь логический ресурс.

Еще раз обратим внимание на элементарный, или, точнее сказать, структурный характер перечисленных выше функторов.

Элементарность первого вполне очевидна, поэтому докажем, что в категории $\boldsymbol{C}$ существует терминальный объект в том и только в том случае, если функтор $t : \boldsymbol{C} \to \mathbf{1}$ имеет сопряженный справа: действительно, функтор t будет иметь сопряженный справа функтор $r : \mathbf{1} \to \boldsymbol{C}$, если и только если для каждого объекта $c \in \boldsymbol{C}$ будет иметь место взаимно-однозначное соответствие: $\mathbf{Hom}_{\boldsymbol{C}}(c, d) \cong \mathbf{Hom}_{\mathbf{1}}(t(c), 1)$ где $d = r(1)$. Но множество морфизмов $\mathbf{Hom}_{\mathbf{1}}(t(c), 1)$ содержит всего один объект. Таким образом, t будет иметь сопряженный справа в том и только в том случае, если для каждого объекта $c \in \boldsymbol{C}$ множество $\mathbf{Hom}_{\boldsymbol{C}}(c, d)$ будет состоять всего из одного морфизма. Но это в точности означает, что d — терминальный объект.

Теперь рассмотрим диагональный функтор Δ, сопоставляющий каждому $c \in \mathrm{Ob}\boldsymbol{C}$ упорядоченную пару вида (c, c), т. е. попросту удваивающий какждый объект категории. Он также вполне элементарен, и не только потому, что «клонирует» объекты[16], но и потому, что, как и функтор в терминальную категорию, существует всегда. Предположим, что у Δ есть сопряженный справа функтор $F : \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$. Тогда должна иметь место биекция:

$$\frac{c \to F(x)}{(c, c) \to x}, \text{ где } x = (a, b) \in \mathrm{Ob}\ \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C}.$$

Такая запись также распространена среди математиков и эквивалентна утверждению существования изоморфизма на стрелках, который мы вводили при определении сопряжения:

$$\mathbf{Hom}_{\boldsymbol{C}}(c, F(a, b)) \cong \mathbf{Hom}_{\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C}}(\Delta(c), (a, b)) = \mathbf{Hom}_{\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C}}((c, c), (a, b)) \cong$$

$$\cong \mathbf{Hom}_{\boldsymbol{C}}(c, a) \times \mathbf{Hom}_{\boldsymbol{C}}(c, b) \cong \mathbf{Hom}_{\boldsymbol{C}}(c, a \times b) \Rightarrow F(a, b) \cong a \times b.$$

То есть мы видим, что диагональный функтор имеет сопряженный к нему справа, только если категория $\boldsymbol{C}$ содержит произведения объектов. Существование последнего изоморфизма напрямую следует из так называемого принципа Йонеды[17], являющегося следствием знаменитой Леммы Йонеды — чрезвычайно

[15]То есть такой категории, объектами которой являются функторы, а стрелками — естественные преобразования функторов.

[16]Вообще говоря, ситуация выглядит чуть сложнее, поскольку, как и всякий функтор, Δ действует и на стрелках тоже, то есть «клонирует» и их, переводя каждую $f : c \to b$ в $(f, f) : (c, c) \to (b, b)$.

[17]См. (Awodey 2010: 193).

глубокого теоретико-категорного результата, который, вместе с понятиями категорной эквивалентности и категорного сопряжения, по сути образует концептуальное ядро всей теории.

* * *

Возвращаясь к заданию декартово-замкнутой категории через сопряженные функторы, необходимо еще раз отметить ряд крайне важных моментов:

- Первые два сопряжения являются сопряжениями к очень просто устроенным, *структурным* функторам, и поэтому возникают естественно, обнаруживая тем самым фундаментальный характер связей.

- Третье сопряжение существенным образом зависит от функтора $(\_ \times \_)$, образуя тем самым иерархический порядок в определяемой структуре и в том, как заданные объекты в ней друг с другом соотносятся: категория содержит экспоненциалы (*map objects*) в том и только в том случае, если у функтора, сопряженного справа к диагональному, существует правый сопряженный.

- Можно показать, что в категории, стрелками в которой являются только включения (что как раз и имело место в случае рассмотренных нами выше частично упорядоченных множеств), категорное произведение будет в точности соответствовать логической конъюнкции. Да и, так сказать, «повседневная» интерпретация союза «и» очень часто является по сути декартовым произведением, как, например, в случае, когда мы говорим, что «местоположение птицы определяется ее высотой *и* точкой на земле под ней», т. е. элементом объекта $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$. Более того, частным случаем экспоненциального объекта b^a, доказательством существования которого является наличие биекции $\mathbf{Hom}_{\boldsymbol{C}}(c \times a, b) \cong \mathbf{Hom}_{\boldsymbol{C}}(c, b^a) \quad \forall a, b, c \in \boldsymbol{C}$, оказывается такой элемент, как относительное псевдодополнение, являющийся обобщением импликации в интуиционистской логике[18]. Действительно, если мы опять рассмотрим как категорию некоторую частично упорядоченную решетку L, то вышеуказанная ситуация сопряженности превращается в эквивалентность вида $a \wedge b \leq c \Leftrightarrow c \leq a \Rightarrow b$ и становится чрезвычайно важным критерием того, что данная решетка есть не что иное, как Гейтингова алгебра.

Заметим, что почти мистическое «превращение» экспоненциала в импликацию может стать более понятным, если мы рассмотрим общий случай данного

[18]Обращаю внимание, что речь пока идет об алгебраических операциях, определенных на решетках; сугубо логическую интерпретацию они приобретают позднее. Итак, по определению, $p \in L$ есть псевдодополнение к a относительно b, если $\forall c \in L \quad a \cap c \leq b \Leftrightarrow c \leq p$, и поскольку в случае, когда L — это множество подмножеств, элемент $p = \neg a \vee b$, то есть совпадает с импликацией в классическом исчислении высказываний, то его принято так и обозначать: $a \Rightarrow b$.

сопряжения $C \times A \to B \Leftrightarrow C \to B^A$. Отображение $C \times A \to B$ можно понимать не только как сопоставление какой то паре элементов множества[19] $C \times A$ некоторого элемента множества B, но и как «именование» (параметризацию, индексацию) элементами множества функций вида $A \to B$. Понятно, что оптимальность такого именования будет зависеть от того, из каких элементов состоит : «имен» вполне может и не хватить, или несколько имен будут именовать одну и ту же функцию. Соответственно, сопряжение, решая проблему оптимизации, выбирает из всех объектов категории $\boldsymbol{C}$ такой объект B^A, который изоморфен множеству функций из A в B, то есть в котором имеется ровно по одному имени для каждой такой функции. Смещаясь в контекст частичного порядка, где декартово произведение становится пересечением, инфимумом или конъюнкцией, а стрелка из A в B существует, только если $A \leq B$, оптимальным объектом совершенно естественным образом оказывается тот, который будет наибольшим среди таких объектов C, пересечение которых с A не больше B, то есть не что иное, как относительное псевдодополнение!

* * *

Рассмотрим на некоторых примерах, какую аналитическую гибкость дает категорное представление кванторов, и, в частности, то важное обстоятельство, что кванторы всякий раз становятся зависимыми от всех компонентов морфизма $f : X \to Y$, т. е. и от «природы» рассматриваемого отношения, и от источника, и от назначения морфизма, которые мы условились понимать как контексты.

В языках программирования кванторы существования и всеобщности часто используются внутри команд, дающих ответы на вопрос о том, обладают ли тем или иным свойством все или хотя бы некоторые элементы данного множества. Например, нам может быть дано какое-то подмножество натуральных чисел, и мы хотим знать, все ли элементы в нем четные или нечетные, или только некоторые. Пусть $Y = \{\textbf{чёт}, \textbf{нечет}\}$ и стрелка $p : \mathbb{N} \to Y$ будет сопоставлять каждому натуральному числу его четность. Как уже отмечалось выше, множества подмножеств любого множества образуют категории частичного порядка, и, следовательно, на $P(\mathbb{N})$ и $P(Y)$ естественным образом индуцируются следующие ситуации сопряжения:

$$\begin{tikzcd} P(\mathbb{N}) \arrow[r, bend left, "\exists_p"] \arrow[r, bend right, "\forall_p"'] & P(Y) \arrow[l, "p^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Выберем некоторое подмножество натуральных чисел $U \subseteq \mathbb{N}$, то есть объект$U \in P(\mathbb{N})$ и посмотрим, что из себя будут представлять объекты $\forall_p(U)$ и $\exists_p(U)$. Во-первых, это подмножества $Y = \{\textbf{чёт}, \textbf{нечет}\}$, т. е. элементы

$$P(Y) = \{\emptyset, \{\textbf{чёт}\}, \{\textbf{нечет}\}, \{\textbf{чёт}, \textbf{нечет}\}\},$$

[19] Для наглядности опять-таки будем на время считать, что мы работаем в **Set**.

и объект $\exists_p(U)$ будет содержать **нечет**, если среди элементов U будут находиться нечетные, и будет включать в себя **чёт**, если в U найдутся четные элементы. Соответственно, $\forall_p(U)$ будет содержать **нечет**, только если все (!) нечетные числа лежат в U. И то же самое будет с **чёт**.

Теперь допустим, что нас интересует вопрос: все ли числа, лежащие в некотором множестве $W \subseteq \mathbb{N}$, четные? Для ответа воспользуемся определением сопряжения. Пусть $V = \{\textbf{чёт}\} \subset Y$. Тогда $p^{-1}(V) \subset \mathbb{N}$ — это множество всех четных чисел, и в категории частичного порядка $P(\mathbb{N})$ существует стрелка $W \to p^{-1}(V)$, только если каждый элемент W чётный, или, что то же самое, объект $\exists_p(W)$ не содержит элемента **нечет**: $\exists_p(W) \subseteq \{\textbf{чёт}\}$. Но это есть в точности изоморфизм сопряжения: $\mathbf{Hom}_{P(\mathbb{N})}(W, p^{-1}(V)) \cong \mathbf{Hom}_{P(Y)}(\exists_p(W), V)$. Соответственно, если $V = \{\textbf{нечет}\}$, то в $P(\mathbb{N})$ будет существовать стрелка $p^{-1}(V) \to U$, только если в U будут лежать все нечетные числа, т. е., как мы и утверждали выше, $\forall_p(U)$ будет содержать в себе **нечет**: $\mathbf{Hom}_{P(\mathbb{N})}(p^{-1}(V), U) \cong \mathbf{Hom}_{P(Y)}(V, \forall_p(U))$.

Другим важным примером использования ловеровских кванторов является ситуация, в которой нам нужно определить пусто или непусто некоторое подмножество $A \subseteq X$, где X — произвольное множество. Произвольность выбора X наводит на мысль, что как морфизм f, так и его назначение Y при любом X должны выбираться однозначно, поэтому рассмотрим в качестве кандидата на стрелку, вдоль которой будет осуществляться квантификация, стрелку в терминальный объект $! : X \to \mathbf{1}$. Если вспомнить, что множество подмножеств мы ранее отождествляли с высказываниями об элементах некоторого универсума, то в случае с $\mathbf{1}$, у которого существует всего два подмножества: $\emptyset$ и 1, они с точностью до синонимичности естественным образом отождествляются с суждениями вида: «истинно» и «ложно» («да» и «нет», «принадлежит» и «не принадлежит» и т. п.). Прообразом «истины» в $P(X)$ будут, соответственно, все непустые подмножества, т. е. множество таких высказываний $A \subseteq X$, которые являются истинными хотя бы в отношении одного $x \in X$, тогда как прообразом «лжи» будет являться пустое множество, соответствующее множествам тех высказываний, которые ложны в отношении любого $x \in X$. Если отдельные высказывания $A(x)$, вообще говоря, зависят от конкретных $x \in X$, то $\exists_!(A)$ уже ни от чего не зависит: оно или абсолютно истинно или абсолютно ложно — в зависимости от того, существует ли хотя бы один $x \in X$, для которого выполняется $A(x)$, или нет. Ну, или, с более формальной точки зрения, $\exists_!(A) = \emptyset$, если неверно, что существует $x \in A$, т. е. пусто, и $\exists_!(A) = 1$, если истинно, что A — непусто, что и требовалось.

Заметим, что семантика $\forall_!(A)$ при этом следующая: $\forall_!(A) = \emptyset$ означает, что «неверно, что все $x \in X$лежат в A». И $\forall_!(A) = 1$ означает, что «истинно, что все $x \in X$ лежат в A. Другими словами, своим значением $\forall_!(A)$ сообщает нам, совпадает ли подмноженство A со всем X, или нет.

И наконец, представим себе чемпионат России по плаванию, где каждый субъект Российской Федерации может быть представлен своей сборной. Пускай теперь S (Swimmers) — это множество российских пловцов, входящих в какую-либо сборную, а T (Teams) — множество сборных команд. Рассмотрим функцию $t : S \to T$, сопоставляющую каждого пловца той сборной, в которой он выступает, и множество $U \subseteq S$ пловцов, отобравшихся на чемпионат России этого года, который недавно проходил в Москве. Какова будет семантика объектов $\exists_t(U)$ и $\forall_t(U)$?

Очевидно, что $\exists_t(U)$ выделит в T то множество сборных команд, которые представлены на нынешнем чемпионате России хотя бы одним спортсменом. И, соответственно, $\forall_t(U)$ отберет те сборные, которые представлены на соревнованиях этого года в полном составе.

* * *

Дальнейший анализ кванторов как сопряжений к функтору подстановки может быть продолжен уже на более концептуальном уровне, по крайней мере, в двух направлениях: мы можем пойти вверх, в сторону все большего набора абстракции, но мы также можем спуститься и вниз и свести так называемые ловеровские кванторы до уровня классических. Мы пройдем обоими путями и начнем с более абстрактного.

Он существенным образом связан с концептом гипердоктрины, введенном в свое время Уильямом Ловером (Lawvere 1969: 290).

У данной конструкции присутствует откровенно геометрический оттенок, поскольку, если говорить совсем неформально, то гипердоктрина выглядит в общем случае как наращивание некоторого нетривиального пространства на основе пространства значительно более тривиального, в роли которого выступает некоторая логическая теория T. О том, какие дополнительные выводы может помочь сделать такая пространственная интерпретация, мы скажем позже, а пока разберемся в деталях конструкции.

Под теорией мы будем понимать декартово-замкнутую категорию T, объекты которой, естественно истолковывать как типы, а морфизмы — как термы. В частности, морфизм вида $x : \mathbf{1} \to X$ можно понимать как постоянный терм типа X. Требование декартовой замкнутости, которое, строго говоря, и позволяет рассматривать категорию T как логическую теорию, обусловлено тем, что, как мы уже указывали, в декартово-замкнутой категории оказывается возможным определить, как соответствующие функторы, все основные логические связки: $\mathbf{1}$, $\wedge$, $\Rightarrow$ и двже правило вывода *modus ponens*.

Затем, каждому типу $X \in T$ ставится в соответствие также декартово-замкнутая категория $P(X)$, которая будет представлять из себя *категорию атрибутов типа X*. Морфизмы атрибутов, таким образом, можно мыслить себе как *дедукции* над X, поскольку в такой категории тоже можно определить все необходимые для реализации дедуктивного вывода конструкции.

Как было показано выше, для каждого морфизма $f : X \to Y$ в T определен функтор подстановки $s_f : P(Y) \to P(X)$, который может быть обобщен до *pullback*-функтора $P(Y) \xrightarrow{f\cdot()} P(X)$: каждому атрибуту ψ типа Y этот функтор ставит в соответствие атрибут $f \cdot \psi \in P(X)$, полученный *подстановкой* f в ψ. Также в 2-категории оказываются определены как сопряженные слева и справа к обобщенному функтору подстановки два новых функтора: $P(X) \xrightarrow{()\Sigma f} P(Y)$ и $P(X) \xrightarrow{()\Pi f} P(Y)$, которые также имеют смысл обобщений кванторов существования и всеобщности: для любого объекта $\varphi \in P(X)$ $\varphi\Sigma f$ мы будем называть приписыванием существования атрибуту φ вдоль вывода f (existential quantification). Соответственно, $\varphi\Pi f$ — приписыванием всеобщности атрибуту φ вдоль вывода f (universal quantification).

Все вышесказанное равносильно тому, что мы имеем функтор, действующий из теории T, который мы обозначим как $h : T \to P$, где P — это 2-категория определенного вида. Такой функтор в геометрии называют *расслоением* (*fibration*), поскольку над каждым объектом $X \in T$ он как бы «наращивает» слой $P(X)$, что в общем случае приводит к значительному обогащению структуры результирующего пространства.

Особое изящество конструкции придает большая степень ее абстракции, поскольку типами $X \in T$ могут быть не только обычные множества, а «наращенными» категориями — не только множества их подмножеств ($P(x) = 2^X$), но и произвольные категорные структуры, удовлетворяющие изначальному требованию декартовой замкнутости. Соответственно, любая односортная теория, формализованная в языке логики порядка, достаточного, чтобы в нем могли быть корректно описаны сопряжения, задающие декартово-замкнутую структуру теории, допускает гипердоктрину, типами в которой будут выражения вида: $1, V, V^V, V\times V, V\times V^{V\times V\times V^V}$ и т. п., тогда как объекты в $P(X)$ — это все такие формулы, свободными переменными в которых являются переменные типа X. Например, если тип $X = V \times V^V$, то $P(X)$ будет состоять из формул с двумя свободно входящими переменными: одной предметной и одной функциональной — и замкнутыми переменными произвольного типа. Морфизм $h : T \to P$, из такой высокопорядковой теории в гипердоктрину, где $P(x) = 2^X$, будет являться ни чем иным, как *моделью* для теории T.

В такой гипердоктрине функторы $()\Sigma f$ и $()\Pi f$ примут тот вид ловеровских кванторов, который был подробно проанализирован нами выше.

Другим примером гипердоктрины будет функтор $h : T \to P$, где каждая $P(X) = (T, X)$ — это так называемая *категория множеств над* X, морфизмами в которой являются такие функции $d : A \to A'$, что коммутируют треугольники:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "d"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & A' \arrow[dl, "\varphi'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Если подстановку $f\cdot\psi \in P(X)$, где $f : X \to Y$ и $\psi : B \to Y$, определить как проекцию в X множества пар (x, b), удовлетворяющих условию $xf = b\psi$,[20] то приписывание существования окажется равным обычной композиции $\varphi\Sigma f = \varphi \circ f$. Далее, поскольку $P(1) = T$, то для любого элемента $1 \xrightarrow{x} X$ и «свойства» φ в $P(X)$, $x\cdot\varphi$ — это просто множество, *слой* φ над x. Если дедукцию $1_X \to \varphi$ над X

[20]Которое, собственно, и определяет категорное расслоенное произведение, или *pullback*.

называть «доказательством» φ, то, учитывая, что в данном примере 1_X — это просто тождественная функция, доказательство φ есть сопоставление каждому элементу x доказательства $x \cdot \varphi$. И тогда доказательство $\varphi \Sigma f$ есть сопроставление каждому y элемента x такого, что $xf = y$, вместе с доказательством $x \cdot \varphi$. Т. е.

$$y \cdot (\varphi \Sigma f) = \sum_{xf=y} x \cdot \varphi.$$

Рассуждая аналогичным способом, поскольку слой над y при приписывании всеобщности

$$y \cdot (\varphi \Pi f) = \prod_{xf=y} x \cdot \varphi,$$

доказательство $\varphi \Pi f$ также включает в себя сопоставление каждому y правила, сопоставляющего каждому x такому, что $xf = y$, доказательство того, что $x \cdot \varphi$. Аналогичные рассуждения можно проделать и относительно выводов в $P(X)$, имеющих предпосылки, отличные от 1_X.

* * *

Второй подход позволяет существенным образом сблизить ловеровскую концепцию кванторов с традиционным представлением о них же, но даже в этом случае, как мы увидим, функторный анализ позволяет обнаруживать естественным образом следующие из ситуации сопряжения зависимости, которые в классическом исчислении предикатов, несмотря на всю их очевидность, приходится вводить отдельными аксиомами. Речь, разумеется, идет прежде всего о том, что в естественном выводе в логике предикатов называется правилами введения (и, соответственно, удаления) существования и всеобщности, и в аксиоматических построениях исчисления предикатов первого порядка явным образом входят в список в качестве либо кванторных аксиом, либо кванторных правил. (См., например, у Гольдбладта — *universal instantiation and existential generalization*; Goldblatt 2006: 237–238.) Делается это примерно так.

Пусть L — это некоторый язык первого порядка. Для любого набора различных переменных $\bar{x} = x_1, ..., x_n$ определим множество формул языка со свободным вхождением в них переменных разве что только из этого набора $\bar{x}$:

$$Form(\bar{x}) = \{\phi(\bar{x}) : \phi(\bar{x}) \text{ содержит не более } \bar{x} \text{ свободных переменных}\}$$

Такое множество формул, как мы уже не раз видели, является частично упорядоченным по отношению выводимости в первопорядковой логике, и, следовательно, образует категорию.

Теперь выберем переменную y, не входящую в заданный набор переменных, и заметим, что будет всегда иметь место тривиальное вложение

$$* : Form(\bar{x}) \to Form(\bar{x}, y),$$

переводящее каждую формулу $\phi(\bar{x})$ в себя[21]. Также заметим, что если некоторая формула $\phi(\bar{x}) \in Form(\bar{x})$, то y не входит свободно в $\phi(\bar{x})$. Нетрудно видеть, что $*$ — это функтор, т. к. если $\phi(\bar{x}) \supset \psi(\bar{x})$ в $Form(\bar{x})$, то $*\phi(\bar{x}) \supset *\psi(\bar{x})$ в $Form(\bar{x}, y)$. Теперь, поскольку для любой формулы $\psi(\bar{x}, y) \in Form(\bar{x}, y)$ верно, что y уже не свободна в $\forall y.\psi(\bar{x}, y) \in Form(\bar{x}, y)$, то у нас есть отображение:

$$\forall y : Form(\bar{x}, y) \to Form(\bar{x}).$$

Покажем, что данное отображение является сопряженным справа к $*$.

В самом деле, воспользовавшись только что упомянутыми аксиомами, легко установить, что имеет место изоморфизм сопряжения:

$$\mathbf{Hom}_{Form(\bar{x},y)}(*\phi(\bar{x}), \psi(\bar{x}, y)) \cong \mathbf{Hom}_{Form(\bar{x})}(\phi(\bar{x}), \forall y.\psi(\bar{x}, y)).$$

Биекция справа налево — не что иное, как аксиома удаления всеобщности, тогда как биекция слева направо — результат применения соответствующего кванторного правила введения всеобщности (поскольку y не входит свободно в $\phi(\bar{x})$)[22].

То же самое оказывается верным и в отношении второго, сопряженного к $*$ слева, и связывающего переменную y функтора существования:

$$\mathbf{Hom}_{Form(\bar{x},y)}(\psi(\bar{x}, y), *\phi(\bar{x})) \cong \mathbf{Hom}_{Form(\bar{x})}(\exists y.\psi(\bar{x}, y), \phi(\bar{x})).$$

И вот тут происходит самое важное: мы ведь можем поступить и по-другому — постулировать саму ситуацию сопряжения:

$$\exists \dashv * \dashv \forall,$$

которая, как мы пытались показать выше, во многих смыслах действительно является более фундаментальной. То есть, мы можем утверждать следующее: если на множестве формул определенные вышеуказанным способом функторы являются сопряженными, то данное множество формул есть язык первого порядка, а те формулы, которые требовалось вводить в качестве самостоятельных аксиом, естественным образом обнаружат себя либо как прямые следствия из условия сопряженности, либо как результат элементарных манипуляций с парой сопряженных функторов. Наиболее впечатляющим здесь оказывается то, что те самые аксиомы введения существования (*existential generalization*) $\psi(x, y) \supset \exists x.\psi(x, y)$ и удаления всеобщности (*universal instantiation*) $\forall y.\psi(x, y) \supset \psi(x, y)$, с функторной точки зрения, есть не что иное как просто *единица и коединица сопряжения*, соответственно!

Действительно, в данном случае, например, коединицей сопряжения будет естественное преобразование ϵ, переводящее композицию функторов $*\circ\forall$ в тождественный функтор $\mathrm{Id}_{Form(\bar{x},y)}$:

$$\epsilon : * \circ \forall \to \mathrm{Id}_{Form(\bar{x},y)}.$$

[21] Такое вложение всегда индуцируется некоторым отображением $f : \Gamma \to \Delta$, которое иногда называют ослаблением контекста (weakening).

[22] См. (Goldblatt 2006: 238).

И, в частности, это означает, что для любой формулы $\psi(x,y) \in Form(x,y)$ каждый компонент данного естественного преобразования

$$\epsilon_{\psi(x,y)} = \varphi(\mathbf{1}_{\forall y.\psi(x,y)}), \text{ где}$$

$$\varphi : \mathbf{Hom}_{Form(x)}(\forall y.\psi(x,y), \forall y.\psi(x,y)) \to \mathbf{Hom}_{Form(x,y)}(^*\forall y.\psi(x,y), \psi(x,y))$$

есть также естественный изоморфизм сопряжения, который на элементе

$$\mathbf{1}_{\forall y.\psi(x,y)} = (\forall y.\psi(x,y) \supset \forall y.\psi(x,y)) \in \mathbf{Hom}_{Form(x)}(\forall y.\psi(x,y), \forall y.\psi(x,y))$$

равен $(^*\forall y.\psi(x,y) \supset \psi(x,y))$. Проще говоря, мы имеем равносильность

$$\forall y.\psi(x,y) \supset \forall y.\psi(x,y) \Leftrightarrow {}^*\forall y.\psi(x,y) \supset \psi(x,y)),$$

а поскольку, по определению, $^*\forall y.\psi(x,y) = \forall y.\psi(x,y)$, то мы в результате получаем в точности аксиому удаления всеобщности $\forall y.\psi(x,y) \supset \psi(x,y))$, как мы и утверждали вначале.

Точно таким же образом из единицы сопряжения выводится аксиома введения существования: $\psi(x,y) \supset \exists x.\psi(x,y))$, а из них и некотороых элементарных свойств ситуации сопряженности — многие другие распространенные законы исчисления предикатов:

- из первых двух аксиом и транзитивности отношения логической выводимости: $\forall y.\psi(x,y) \supset \exists y.\psi(x,y))$;
- из предыдущей формулы и из свойств сопряженности квантора существования слева к *: $\exists x \forall y.\psi(x,y) \supset \exists x.\psi(x,y))$;
- из предыдущей формулы и из свойств сопряженности квантора всеобщности справа к *: $\exists x \forall y.\psi(x,y) \supset \forall y \exists x.\psi(x,y))$.

Заметим, что кванторные правила введения всеобщности и удаления существования, которые также выводятся непосредственно из свойств сопряженности одновременно с условиями того, что переменная может или не может входить свободно в ту или иную формулу, здесь приобретают крайне важное значение, поскольку в каждом конкретном случае указывают на вполне определенную замену контекста, с которой и *сопряжены* соответствующие кванторы.

* * *

В заключение еще раз обратим внимание читателей на два существенных момента.

Первое. С помощью так называемого «синтаксического сахара» языка теории категорий становятся видны основания математической, а значит, и логической мысли, которые в традиционных теоретико-множественных обосновательных подходах выглядят недостаточно мотивированными и зачастую весьма разрозненными: некоторые критики используют труднопереводимый эпитет *ad hoc-ness*, указывающий на сиюминутность и «бессистемность» большинства традиционных формально-логических систем.

И второе. Концепт функторного сопряжения позволяет очень отчетливо видеть, как те или иные сопряжения возникают на основе совершенно элементарных, почти тривиальных конструкций и, что самое удивительное, существенным образом зависят от них.

Литература

Витгенштейн 1994 — *Витгенштейн, Л.* Философские работы. Ч. 1. М.: Гнозис, 1994.

Awodey 2006 — *Awodey, S.* Caterogy Theory. Oxford: Clarendon Press, 2006.

Badiou 2014 — *Badiou, A.* Mathematics of the Transcendental. New York: Bloomsbury, 2014.

Baez, Stay 2010 — *Baez, J., Stay, M.* Physics, Topology, Logic and Computation: a Rosetta Stone // New Structures for Physics (Lecture Notes in Physics 813) / ed. by B. Coecke. New York: Springer, 2010. P. 95–172.

Barr, Wells 1999 — *Barr, M., Wells, C.* Category Theory for Computing Science. Montreal: CRM, 1999.

Bell 1981 — *Bell, J. L.* Category Theory and the Foundations of Mathematics // British Journal for the Philosophy of Science. 1981. Vol. 32, no. 4. P. 349–358.

Borceux 1994 — *Borceux, F.* Handbook of Categorical Algebra. 3 vols. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.

Carnap 2000 — *Carnap, R.* Logical Syntax of Language. London: Routledge, 2000.

Egorychev 2016 — *Egorychev, I.* Thought and Being are the Same: Categorial Rendition of the Parmenidian Thesis // Studies in Logic, Grammar and Rhetoric. 2016. Vol. 46, no. 59. P. 193–210.

Eilenberg, Maclane 1945 — *Eilenberg, S., MacLane, S.* General Theory of Natural Equivalen-ces // Transactions of the American Mathematical Society. 1945. Vol. 58. P. 231–294.

Goldblatt 2006 — *Goldblatt, R.* Topoi. The categorial analysis of logic. New York: Dover Publications, 2006.

Hurewicz 1941 — *Hurewicz, W.* On Duality Theorems // Bull. Am. Math. Soc. 1941. Vol. 47. P. 562–563.

Jacobs 1999 — *Jacobs, B.* Categorical Logic and Type Theory. Amsterdam: North Holland, 1999.

Johnstone 1977 — *Johnstone, P. T.* Topos Theory. New York: Academic Press, 1977.

Johnstone 2002 — *Johnstone, P. T.* Sketches of an Elephant: a Topos Theory Compendium. 3 vols. Oxford: Oxford University Press, 2002.

Krömer 2007 — *Krömer, R.* Tool and Object: A History and Philosophy of Category Theory. Basel: Birkhäuser, 2007.

Lambek 1986 — *Lambek, J.* Introduction to Higher Order Categorical Logic. Cambridge: Cambridge University Press, 1986.

Lawvere 1969 — *Lawvere, F. W.* Adjointness in Foundations // Dialectica. 1969. Vol. 23. P. 281–295.

Lawvere 1970 — *Lawvere, F. W.* Equality in Hyper doctrines and Comprehension Schema as an Adjoint Functor // Applications of Categorical Algebra. Providence: AMS, 1970. P. 1–14.

Lawvere, Schanuel 1997 — *Lawvere, F. W., Schanuel, S.* Conceptual Mathematics: A First Introduction to Categories. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

Leinster 1994 — *Leinster, T.* Basic Category Theory. Cambridge University Press, 1994.

MacLane 1998 — *MacLane, S.* Categories for the Working Mathematician. 2nd ed. New York: Springer, 1998.

MacLane, Moerdijk 1992 — *MacLane, S., Moerdijk, I.* Sheaves in Geometry and Logic. New York: Springer, 1992.

MacNamara, Reyes (eds.) 1994 — *MacNamara, J., Reyes, G. (eds.).* The Logical Foundation of Cognition. Oxford: Oxford University Press, 1994.

Marquis, Reyes 2012 — *Marquis, J.-P., Reyes, G.* The History of Categorical Logic: 1963–1977 // Handbook of the History of Logic / ed. by D. Gabbay and J. Woods. Vol. 6. Amsterdam: Elsevier, 2012. P. 689–800.

Marquis 2015 — *Marquis, J.-P.* Category Theory // The Stanford Encyclopedia of Philosophy. 2015. URL: https://plato.stanford.edu/entries/category-theory/ (accessed: 03.01.2019)

McLarty 1992 — *McLarty, C.* Elementary Categories, Elementary Toposes. Oxford: Oxford University Press, 1992.

Milewski 2017 — *Milewski, B.* Category Theory for Programmers. 2017. URL: https://github.com/hmemcpy/milewski-ctfp-pdf (accessed: 03.01.2019)

Peirce 1991 — *Peirce, B.* Basic Category Theory for Computer Scientists. Cambridge, MA: MIT Press, 1991.

Rodin 2010 — *Rodin, A.* How Mathematical Concepts Get Their Bodies // Topoi. 2010. Vol. 29, no. 1. P. 53–60.

Rodin 2010 — *Rodin, A.* Axiomatic Method and Category Theory (Synthese Library). New York: Springer, 2012.

Sica (ed.) 2006 — *Sica, G. (ed.).* What is Category Theory? Firenze: Polimetrica, 2006.