Владимир Степанов[1]

ВЫЯВЛЕНИЕ 4D-ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА В ТЕОРИИ САМОРЕФЕРЕНТНОЙ ИСТИНЫ ДЛЯ (¬, ↔)-ЯЗЫКА

Резюме: В семантически замкнутом языке со связками (¬, ↔), с переменными по формулам x, y, z и предикатом истинности Тарского $Tr(x)$ самореферентность отмечается явно квантором самореферентности $\mathsf{S}x$, приписываемым слева к ядру самореферентной формулы. Предложена динамическая интерпретация атомарных самореферентных формул, которая описывается логической матрицей с 8 истинностными значениями. Таблица связки эквиваленция ↔ для положительных оценок совпадает с таблицей Кэли четверной группы Клейна. Выдвинута гипотеза Гиперкомплексности оценок самореферентных предложений, где обобщенные оценки суть векторы в 4D-векторном пространстве Ŧ = $\mathrm{a}_0\mathrm{T} + i\mathrm{a}_1\mathrm{V} + j\mathrm{a}_2\mathrm{A} + k\mathrm{a}_3\mathrm{K}$. Построено исчисление для вновь введенных истинностных значений как частичная система пропозиционального исчисления, базирующегося на эквиваленции и отрицании, по Черчу: P^{EN}, или $\mathrm{P}^{\leftrightarrow\neg}$. Сформирована логическая матрица, множество выделенных значений которой состоит из {T, V, A, K}. Предъявлено 20 новых правил вывода. Выдвинута гипотеза о приложении сформированной связки эквиваленции ко всем самореферентным предикатам. Это позволило сформулировать бестиповую Аксиому свертывания в (¬, ↔)-языке. Изложены соображения по взаимодействию многозначности и многовекторности логики.
Ключевые слова: самореферентность, динамическая интерпретация, гиперкомплексность.

Vladimir Stepanov

REVEALING 4D-VECTOR SPACES IN TRUTH THEORY FOR SELF-REFERENCE STATEMENTS IN A (¬, ↔)-LANGUAGE

Abstract: In a semantically closed language with connectives (¬, ↔), with variables over formulas x, y, z, and a Tarsky truth predicate $Tr(x)$, self-reference is marked overtly with the self-reference quantifier $\mathsf{S}x$ applied at the left to the kernel of a self-reference formula. A dynamic interpretation of atomic self-reference formulas, which is described by a logic array with eight true values, is offered. The truth table of the biconditional ↔ for positive estimates is precisely Cayley's table for Klein four group. The hypothesis of Hypercomplexity for estimates of self-reference sentences, where generalized estimates are vectors in 4D-vector space Ŧ = $\mathrm{a}_0\mathrm{T} + i\mathrm{a}_1\mathrm{V} + j\mathrm{a}_2\mathrm{A} + k\mathrm{a}_3\mathrm{K}$, is proposed. We offer a calculus for newly introduced true values, formulated as a partial system of the propositional calculus which is based on the biconditional and negation according to Church (P^{EN}, or $\mathrm{P}^{\leftrightarrow\neg}$). We propose a logical matrix whose set of the designated values is {T, V, A, K}. 20 new inference rules are demonstrated. We formulate a hypothesis about the applicability of the proposed biconditional to all self-reference predicated, which allows us to formulate a type-free Comprehension Axiom in a (¬, ↔)-language. Finally, we provide some considerations on the interaction between many-valuedness and multi-vectorness as properties of logics.
Keywords: self-reference, dynamic interpretation, hypercomplexity, 4D-vector space.

[1] *Степанов Владимир Алексеевич*, н. с. Вычислительного центра ФИЦ ИУ РАН.
Vladimir Stepanov, research fellow, Federal Research Center Computer Science and Control of the Russian Academy of Sciences.
vastvast@yandex.ru

1. Язык для двоичной динамической модели самореферентных предложений

Самореферентными назовём предложения, ссылающиеся на самих себя. Наиболее популярным из них является предложение «Лжец». Конструктивным анализом такого предложения занимался Ч. Пирс (Emily 1975), который первым, насколько нам известно, обратил внимание в своих лекциях 1864–1865 гг. на то, что самореферентные предложения порождают бесконечную последовательность:

> "S2. What is here written is not true.
> Similarly concerning S2 Peirce says that we get an infinite number of propositions:
> What is here written
> The statement that that is false
> The statement that that is false
> The statement that that is false
> and so on to infinity."

Это первое применение принципа, который во второй половине XX века получил название «превращение порочного круга в порождающий круг». Пирс утверждал, что для оценки полученного бесконечного предложения необходимо оценить «самое последнее», и это порождало очевидные проблемы.

Для сохранения последовательности Пирса необходим язык, допускающий для подстановки в свободную переменную в качестве термов самих функций и языки второго порядка L_2 представляют такую возможность. Самореферентные предложения заслуживают того, чтобы их самореферентность была отмечена в языке, для этого зафиксируем самореферентность предложения с помощью специального значка – значка самореферентности Sx, который ставится впереди предиката, называемого нами ядром $P(x)$ самореферентного предложения. Этим мы превратим семантическую самореферентность в самореферентность синтаксическую. В итоге самореферентное предложение выглядит так:

$$\mathsf{S}xP(x) \tag{1}$$

Самореферентное предложение является замкнутым: на место переменной x в него нельзя ничего подставить, т. е. выражение Sx по этому критерию вполне можно отнести к кванторам. Так мы его и будем называть дальше.

Для начала оттолкнемся от статьи Фефермана (Feferman 1984: 79), где он анализирует парадокс Лжеца. Сам Феферман признается, что в существенном он следует статье Тарского 1935 года. Чтобы оттенить преемственность нашей системы системе Фефермана, используем его разбиение на подпункты 0°—4°.

0°. *Синтаксис* (o) (*Язык*)

Назовем нашу логическую систему U_2. Мы используем ‘P’, ‘Q’, ... для обозначения предложений языка второго порядка L_2, который предполагается замкнутым относительно обычных пропозициональных связок $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$. Формулы P как минимум с одной свободной переменной x изображаются как $P(x)$; если t есть индивидный терм, то $P(t)$ обозначает результат подстановки t на место x в P. В качестве индивидных термов в L_2 могут быть и предложения языка L_2.

1°. *Синтаксис* (*i*) (*Именование*)

Для целей нашего исследования в качестве имени предложения P мы используем его само, т. е. $\ulcorner P(x) \urcorner = P(x)$. Это называется «автонимное использование предложений» языка L_2. Квантор самореферентности $\mathrm{S}x$ обеспечивает замкнутость предложения $\mathrm{S}xP(x)$.

1°. *Синтаксис* (*ii*) (*Самореферентность*)

Для каждой формулы $P(x)$ мы можем сконструировать самореферентное предложение $\mathsf{S}xP(x)$, удовлетворяющее аксиоме неподвижной точки:

$$[\forall P(x)\ \exists \mathsf{S}xP(x)]\ (\mathsf{S}xP(x) \leftrightarrow P(\mathsf{S}xP(x)) \tag{2}$$

2°. *Логика*

Аксиомы и правила вывода обычного пропозиционального исчисления второго порядка.

3°. *Базовые принципы*

Следующая аксиома принимается для предиката $Tr(y)$, который интерпретируется как выражающий то, что y есть истина:

$$(\mathrm{TA})\ \ Tr(y) \leftrightarrow y. \tag{3}$$

Подставляя вместо y утверждение $P(x)$ из L_2, получаем

$$(\mathrm{TA})\ \ Tr(P(x)) \leftrightarrow P(x). \tag{3$'$}$$

4° *Противоречивость*

Для вывода противоречия в нашей системе U_2 возьмем $\mathsf{S}x\neg Tr(x)$ вместе с ее определением: $\mathsf{S}x\neg Tr(x) \leftrightarrow \neg Tr(\mathsf{S}x\neg Tr(x))$. Используя (TA): $\mathsf{S}x\neg Tr(x) \leftrightarrow Tr(\mathsf{S}x\neg Tr(x))$ и транзитивность эквиваленции, мы получаем $Tr(\mathsf{S}x\neg Tr(x)) \leftrightarrow \neg Tr(\mathsf{S}x\neg Tr(x))$. Поскольку $\mathsf{S}x\neg Tr(x)$ замкнута, обозначим ее как R и получаем $Tr(\mathrm{R}) \leftrightarrow \neg Tr(\mathrm{R})$. Заменяя по (TA) $Tr(\mathrm{R})$ на R, получаем противоречие:

$$\mathrm{R} \leftrightarrow \neg\mathrm{R}.$$

Для получения более приемлемой системы самореферентных предложений вернемся к последовательности Пирса. Иной способ использовать сгенерированную им последовательность — сосредоточиться на *траектории* такого движения и его характеристиках. Для этого обратимся к теории динамических систем, которая зарождалась в середине XIX века, как раз тогда, когда Пирс получил свои бесконечные предложения, и которая в 30-х годах XX века получила своё современное определение в трудах, в частности, А. А. Маркова, когда он ещё не занимался математической логикой. Напомним выражение (2) для квантора самореферентности Sx*:*

$$(\mathsf{S}xP(x) \leftrightarrow P(\mathsf{S}xP(x)). \tag{2}$$

Здесь $P(x)$ называется *ядром* самореферентного предложения, составленным из $Tr(x)$ с помощью классических пропозициональных связок. Если правое вхождение формулы $\mathsf{S}xP(x)$ в (2) заменить на эквивалентную ей формулу $P(\mathsf{S}xP(x))$, то в результате итерации такой замены мы получим следующую бесконечную последовательность выражений, напоминающую траекторию динамической системы:

$$\begin{aligned} \mathsf{S}xP(x) &\leftrightarrow P(\mathsf{S}xP(x)) \\ &\leftrightarrow P(P(\mathsf{S}xP(x))) \\ &\leftrightarrow P(P(P(\mathsf{S}xP(x)))) \\ &\quad \ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{4}$$

Динамическая интерпретация атомарных самореферентных формул состоит в приписывании каждой такой формуле $\mathsf{S}xP(x)$ двоичной динамической системы $(\{0{,}1\},\ p(x))$ с орбитами $\langle p^{\mathrm{n}}(x),\ \mathrm{n} \in \mathrm{Z}^{+}\rangle$, где $p^{\mathrm{n}}(x) = p_{\circ}p^{\mathrm{n\text{-}1}}(x)$ (Шарковский 1989). Предикатная формула $P(x)$ интерпретируется на булевой функции $p(x)$, рассматриваемой как отображение из множества истинностных значений $\{0{,}1\}$ в $\{0{,}1\}$.

Пусть I есть интерпретация нашего языка. Тогда

$\mathrm{I}(x) = x \in \{0{,}1\}$ — множество классических истинностных значений.

Здесь

x слева — свободная переменная в синтаксисе, а

x справа — ее отображение в семантике.

Пусть $P(x)$ сконструирована с помощью $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ из атомарного предиката $Tr(x)$, свободного от символа S. Тогда

$\mathrm{I}(P(x)) = p(x)$, где $p(x)$ есть отображение p: $\{0{,}1\} \rightarrow \{0{,}1\}$;

отсюда следует, что

$\mathrm{I}(\mathsf{S}xP(x)) = \{\langle p^{\mathrm{n}}(x_0)\rangle,\ n \in \mathrm{Z}^{+} \mid x_0 \in \{0{,}1\}\}$ — есть множество орбит динамической системы $(\{0{,}1\},\ p(x))$, ассоциированной с $\mathsf{S}xP(x)$, где $p^{\mathrm{n}}(x) = p(p^{\mathrm{n\text{-}1}}(x))$.

$\mathrm{I}(\neg\mathsf{S}xP(x)) = \{\neg\langle p^{\mathrm{n}}(x_0)\rangle,\ n \in \mathrm{Z}^{+} \mid x_0 \in \{0{,}1\}\}$ — внешнее отрицание;

$\mathrm{I}(\mathsf{S}x\neg P(x)) = \{\langle\neg p^{\mathrm{n}}(x_0)\rangle,\ n \in \mathrm{Z}^{+} \mid x_0 \in \{0{,}1\}\}$ — внутреннее отрицание.

$\mathrm{I}(\mathsf{S}xP(x) \circ \mathrm{S}yQ(y)) = \{\langle p^{\mathrm{n}}(x_0) \circ q^{\mathrm{n}}(y_0)\rangle,\ n \in \mathrm{Z}^{+} \mid x_0 = y_0 \in\{0{,}1\}\}$, где $\circ \in \{\wedge, \vee, \leftrightarrow\}$.

$\mathrm{I}(Q(\mathsf{S}xP(x))) = q(\mathrm{I}(\mathsf{S}xP(x))) = \{\langle q(p^{\mathrm{n}}(x_0))\rangle,\ n \in \mathrm{Z}^{+} \mid x_0 \in \{0{,}1\}\}$.

Здесь Q — некая функция на самореферентных предложениях, отличная от $\wedge$,$\vee$,$\leftrightarrow$, $\neg$.

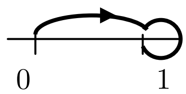
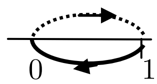
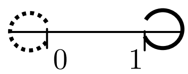
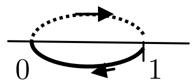
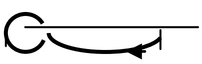
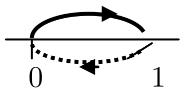
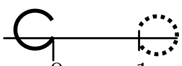
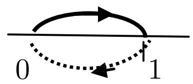
(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)
$\mathsf{S}x(Tr(x) \leftrightarrow Tr(x))$	$\mathsf{S}x\neg Tr(x)$	$\mathsf{S}xTr(x)$	$\mathsf{S}xTr(x) \leftrightarrow \mathsf{S}x\neg Tr(x)$	1
$p(x) = 1$	$p(x) = \neg x$	$p(x) = x$	$p_V(x) = x \leftrightarrow p_A(x) = \neg x$	2
$x_0 = 1$: 1, 1, 1, 1,...	$x_0 = 1$: 0, 1, 0, 1,...	$x_0 = 1$: 1, 1, 1, 1,.	$x_0 = 1$: 0, 1, 0, 1,...	3
$x_0 = 0$: 0, 1, 1, 1,...	$x_0 = 0$: 1, 0, 1, 0,...	$x_0 = 0$: 0, 0, 0, 0,.	$x_0 = 0$: 0, 1, 0, 1,...	4
 0 1 T	 0 1 A	 0 1 V	 0 1 K	5
Результат действия операции (внешнего) отрицания $\neg$:				
$\neg\mathsf{S}x(Tr(x) \leftrightarrow Tr(x))$	$\neg\mathsf{S}x\ \neg Tr(x)$	$\neg\mathsf{S}x\ Tr(x)$	$\neg[\mathsf{S}xTr(x)\leftrightarrow\mathsf{S}x\neg Tr(x)]$	6
$p(x) = 1$	$p(x) = \neg x$	$p(x) = x$	$\neg[p_V(x) = x \leftrightarrow p_A(x) = \neg x]$	7
$x_0 = 1$: 0, 0, 0, 0,...	$x_0 = 1$: 1, 0, 1, 0,	$x_0 = 1$: 0, 0, 0, 0,	$x_0 = 1$: 1, 0, 1, 0,	8
$x_0 = 0$: 1, 0, 0, 0,...	$x_0 = 0$: 0, 1, 0, 1,	$x_0 = 0$: 1, 1, 1, 1,	$x_0 = 0$: 1, 0, 1, 0,	9
 0 1 $\neg$T (= F)	 0 1 $\neg$A	 0 1 $\neg$V	 0 1 $\neg$K	10

Таблица 1. Примеры траекторий динамических систем

Орбиты динамических систем в нашем случае представляют собой пару бесконечных последовательностей из 0 и 1. Каждая такая последовательность является периодической с максимальным периодом, равным двум. Поэтому для описания таких последовательностей достаточно двух её членов: 11, 10, 01, 00, а для описания пары последовательностей — всевозможных комбинаций упомянутых четырех пар: $\langle 11/00\rangle$, $\langle 01/10\rangle$ и т. д. Оценки $\langle 11/11\rangle$ и $\langle 00/00\rangle$ трактуются как T (True — истина) и $\neg$T, оценки $\langle 11/00\rangle$ и $\langle 00/11\rangle$ как V (Void — пустота) и $\neg$V, а оценки $\langle 01/10\rangle$ и $\langle 10/01\rangle$ как A (Antinomy — антиномия) и $\neg$A. Орбиты атомарных формул с одной переменной представлены в Таблице 1.

2. Матрица для 16-значной логики самореферентных предложений

Опишем характеристическую матрицу пропозициональной логики C^2, чьи формулы составлены из операций эквиваленции $\leftrightarrow$, отрицания $\neg$, дизъюнкции и конъюнкции:

$$\mathrm{M}_2{}^{\mathrm{c}} = \langle\{1, 0\}, \neg, \leftrightarrow, \wedge, \vee, \{1\}\rangle = \langle\{\mathrm{T}, \neg\mathrm{T}\}, \neg, \leftrightarrow, \wedge, \vee, \{\mathrm{T}\}\rangle. \qquad (5)$$

Здесь $1 = \mathrm{T} = \mathsf{S}x(Tr(x) \leftrightarrow Tr(x))$, $0 = \neg\mathrm{T}$ — его отрицание. Множество выделенных значений состоит из единственной оценки: T.

Принятая в нашем исследовании динамическая интерпретация самореферентных предложений позволяет, для полного набора связок, сформировать логическую матрицу 16-значной логики $\mathrm{M}_{16}{}^{c} = (\mathrm{M}_{2}{}^{c})^{4}$, которая является четвертой степенью[2] матрицы классической пропозициональной логики $\mathrm{M}_{2}{}^{c}$:

$$\mathrm{M}_{16}{}^{c} = (\mathrm{M}_{2}{}^{c})^{4} =$$
$$= \langle\{11/11, 01/10, 11/00, 01/01, ..., 10/10, 00/11, 10/01, 00/00\}, \neg, \leftrightarrow, \wedge, \vee, \{11/11\}\rangle$$
$$= \langle\{\ \mathrm{T}, \mathrm{A}, \mathrm{V}, \mathrm{K}, ..., \neg\,\mathrm{K}, \neg\mathrm{V}, \neg\mathrm{A}, \neg\mathrm{T}\ \}, \neg, \leftrightarrow, \wedge, \vee, \{\ \mathrm{T}\ \}\rangle. \quad (6)$$

Нижняя строка этих равенств (6) представлена буквами, расположенными строго под наборами символов из 0 и 1 (типа 01/10), которые здесь означают следующее:

$\mathrm{T} = \mathrm{S}x(Tr(x) \leftrightarrow Tr(x)) = 11/11$ — *Truth*, и $\neg\mathrm{T} = 00/00$;
$\mathrm{A} = \mathrm{S}x\neg Tr(x) = 01/10$ — *Liar*, и $\neg\mathrm{A} = 10/01$;
$\mathrm{V} = \mathrm{S}xTr(x) = 11/00$ — *TruthTeller*, и $\neg\mathrm{V} = 00/11$;
$\mathrm{K} = \mathrm{V} \leftrightarrow \mathrm{A} = 01/01$ — *еще оценка*, и $\neg\mathrm{K} = 10/10$.

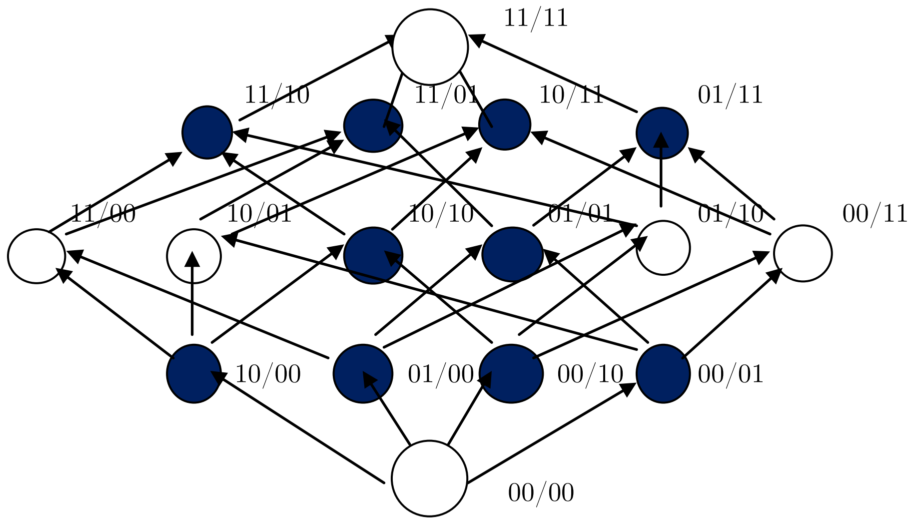


Рисунок 1. Решетка истинностных значений логики $\mathrm{M}_{16}{}^{c}$

Многоточия в матрице $\mathrm{M}_{16}{}^{c}$ заменяют оценки формул с дизъюнкцией и конъюнкцией, которые не представлены явно из-за нехватки места. Все эти V, A и K являются ничем иным, как новыми истинностными значениями, со статусом пропозициональных констант, аналогичным T. На Рисунке 1 изображена решетка истинностных значений 16-значной логики. Белые круги —

[2] Операция степени логической матрицы, введенной Вайсбергом (Wajsberg 1935), описана в работе Александра Степановича Карпенко (Карпенко 2010), увы, безвременно ушедшего из жизни в феврале 2017 года.

оценки атомарных формул T, ¬T, A, ¬A, V, ¬V. Черные круги — оценки, полученные при взаимодействии атомарных формул, например (A ∨ V).

Разделы 1 и 2 используют материалы, изложенные в (Степанов 2011).

3. Матрица 8-значной логики самореферентных предложений для (¬, ↔)

Рассмотрим четыре замечательных самореферентных формулы. Расположим их в хронологическом порядке, центрировав по их ГЛАВНЫМ знакам:

Лжец:	$\mathsf{S}x\neg Tr(x) \leftrightarrow \neg Tr(\mathrm{S}x\neg Tr(x))$
Диагональ:	$Q(b) \leftrightarrow \neg P(b,b)$
Рассел:	$\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow\neg\ x \in x)$
Гедель 1:	$\mathrm{U}\vdash\phi \leftrightarrow \neg\mathrm{Pr}_{\mathrm{U}}(\ulcorner\phi\urcorner)$

Во всех этих формулах их ГЛАВНЫЕ знаки представляют следующую конструкцию: ↔¬. Поэтому мы и ограничимся в наших исследованиях таким фрагментом языка: (¬, ↔).

В рассматриваемом нами (¬, ↔)-фрагменте языка формулы, содержащие знаки дизъюнкции ∨ и конъюнкции ∧, отсутствуют, а потому классическую логическую матрицу $\mathrm{M}_2{}^{\mathrm{c}}$ для (¬, ↔)-фрагмента языка обозначим в квадратных скобках как $[\mathrm{M}_2{}^{\mathrm{c}}]$:

$$[\mathrm{M}_2{}^{\mathrm{c}}] = \langle\{1,\ 0\},\ \neg,\ \leftrightarrow,\ \{1\}\rangle = \langle\{\mathrm{T},\ \neg\mathrm{T}\},\ \neg,\ \leftrightarrow,\ \{\mathrm{T}\}\rangle. \tag{7}$$

Возьмем третью степень теперь уже этой матрицы $[\mathrm{M}_2{}^{\mathrm{c}}]^3$, которую будем обозначать как $[\mathrm{M}_8{}^{\mathrm{c}}]$ (которая, очевидно, является подматрицей для $\mathrm{M}_{16}{}^{\mathrm{c}}$), и выглядит она так:

$$\begin{aligned}[\mathrm{M}_8{}^{\mathrm{c}}] &= [\mathrm{M}_2{}^{\mathrm{c}}]^3 = \\ &= \langle\{11/11,\ 01/10,\ 11/00,\ 01/01,\ 10/10,\ 00/11,\ 01/10,\ 00/00\},\ \neg,\ \leftrightarrow,\ \{11/11\}\rangle \\ &= \langle\{\ \mathrm{T},\ \mathrm{A},\ \mathrm{V},\ \mathrm{K},\ \neg\ \mathrm{K},\ \neg\mathrm{V},\ \neg\ \mathrm{A},\ \neg\mathrm{T}\ \},\ \neg,\ \leftrightarrow,\ \{\ \mathrm{T}\ \}\rangle. \end{aligned} \tag{8}$$

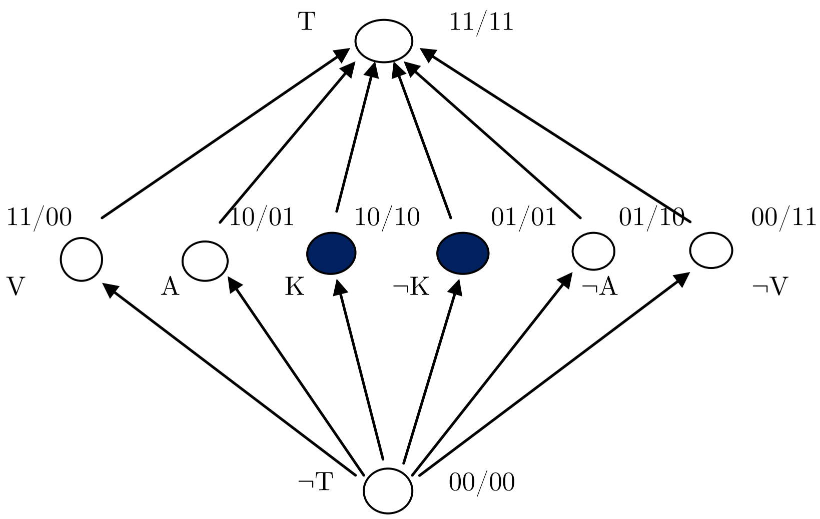


Рисунок 2. Решетка истинностных значений логики $[\mathrm{M}_8{}^{\mathrm{c}}]$.

В представленной матрице $[M_8{}^c]$ не участвуют дизъюнкция и конъюнкция, поскольку их нет в используемом нами $(\neg, \leftrightarrow)$-фрагменте языка. Решетка истинностных значений такой 8-значной логики изображена на рисунке 2. Белые круги — оценки атомарных формул: T, ¬T, A, ¬A, V, ¬V. Черные круги — оценки взаимодействия атомарных формул типа A и V, а именно: $(V \leftrightarrow A) = K$ и, соответственно, $\neg(V \leftrightarrow A) = \neg K$.

Построим таблицу 2 связки эквиваленция ↔ для положительных оценок:

↔	T	V	A	K
T	T	V	A	K
V	V	T	K	A
A	A	K	T	V
K	K	A	V	T

Таблица 2. Таблица связки эквиваленция ↔,
она же Таблица Кэли четверной группы Клейна D_2.

Наблюдение: Положительные истинностные значения матрицы $[M_8{}^c]$ организованы как четверная группа Клейна. Таблица Кэли этой группы представлена в таблице 2. Истинностное значение T выступает здесь как единица группы. Элементы таблицы обладают свойством, которое напоминает *свойство векторного произведения:* если возьмем два каких-нибудь разных элемента таблицы, не являющихся единицами группы, например, K и A, и по таблице 2 вычислим значение $K \leftrightarrow A$, то мы получим третий элемент: V. Подобное обстоятельство наталкивает на мысль выдвинуть следующую гипотезу:

Гипотеза гиперкомплексности[3]: *Истинностные значения самореферентных предложений организованы как орты в четырехмерном векторном пространстве и описываются гиперкомплексными числами вида:*

$$Ŧ = a_0T + ia_1V + ja_2A + ka_3K. \tag{9}$$

Здесь a_0—a_3 принимают значения 1, ¬, 0, которые означают, что соответствующие компоненты могут иметь позитивное или негативное вхождение, или не могут иметь его вообще. *1, i, j, k* — орты соответствующего 4-мерного векторного пространства истины. Таким образом, мы воспользовались возможностью перейти от многозначной логики к логике многомерной. Геометрия логического пространства представлена на рисунке 3:

[3] Гиперкомплексные числа описаны в (Кантор 1978).

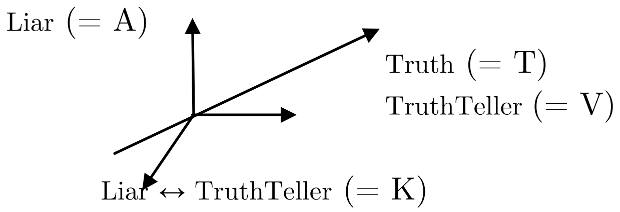


Рисунок 3. Расположение оценок самореферентных предложений в четырехмерном гиперкомплексном пространстве

При определении произведения двух таких гиперкомплексных чисел $₮_{\mathrm{P}}$ и $₮_{\mathrm{Q}}$ (которое в нашем случае есть функция эквиваленции: $₮_{\mathrm{P}} \leftrightarrow ₮_{\mathrm{Q}}$), в качестве таблицы умножения используем таблицу 3 Кэли для прямого произведения группы второго порядка (с операцией отрицания $\neg$ в качестве элемента) и группы Клейна D_2.

$\leftrightarrow$	T, V, A, K	$\neg$T, $\neg$V, $\neg$A, $\neg$K
T, V, A, K	D_2	$\neg\mathrm{D}_2$
$\neg$T, $\neg$V, $\neg$A, $\neg$K	$\neg\mathrm{D}_2$	D_2

Таблица 3. Таблица Кэли для составной группы Клейна.

Вычислим упомянутое выше произведение двух гиперкомплексных чисел:

$$
\begin{aligned}
&₮_{\mathrm{P}} \leftrightarrow ₮_{\mathrm{Q}} = \\
&\quad (p_0\mathrm{T} + p_1\mathrm{V} + p_2\mathrm{A} + p_3\mathrm{K}) \leftrightarrow (q_0\mathrm{T} + q_1\mathrm{V} + q_2\mathrm{A} + q_3\mathrm{K}) = \\
&\qquad (p_0q_0\mathrm{T} + p_0q_1\mathrm{V} + p_0q_2\mathrm{A} + p_0q_3\mathrm{K}) + \\
&\qquad (p_1q_0\mathrm{V} + p_1q_1\mathrm{T} + p_1q_2\mathrm{K} + p_1q_3\mathrm{A}) + \\
&\qquad (p_2q_0\mathrm{A} + p_2q_1\mathrm{K} + p_2q_2\mathrm{T} + p_2q_3\mathrm{V}) + \\
&\qquad (p_3q_0\mathrm{K} + p_3q_1\mathrm{A} + p_3q_2\mathrm{V} + p_3q_3\mathrm{T}) = \\
&\qquad\quad (p_0q_0 + p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3)\mathrm{T} + \\
&\qquad\quad (p_1q_0 + p_0q_1 + p_2q_3 + p_3q_2)\mathrm{V} + \\
&\qquad\quad (p_2q_0 + p_0q_2 + p_1q_3 + p_3q_1)\mathrm{A} + \\
&\qquad\quad (p_3q_0 + p_0q_3 + p_2q_1 + p_1q_2)\mathrm{K}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Мы сформулировали операцию для двух 4D-векторов, а именно: $₮_{\mathrm{P}} \leftrightarrow ₮_{\mathrm{Q}}$, и это полноценное векторное выражение.

Раздел 3 использует материалы, изложенные в (Stepanov 2014).

4. Исчисление

Построим исчисление для вновь введенных истинностных значений. Со слов Karlo Nicolai (Nicolai, 2017), “A Kantian aphorism by Hannes Leitgeb may help in depicting the situation: it is often the case that axiomatic truth without semantic truth is empty, whereas semantic truth without axiomatic truth is blind.”

В подтверждение предъявленного выше афоризма, формализуем представленную в (8) матрицу $[\mathrm{M}_8{}^{\mathrm{c}}]$ (*semantic truth*) как частичную систему пропозициональных исчислений (*axiomatic truth*), базирующихся на эквиваленции и отрицании, по Черчу P^{EN}, или $\mathrm{P}^{\leftrightarrow\neg}$ (Черч 1960). Язык и множество формул описаны в разделе 1. Интересные нам формулы представлены в строке 1 таблицы 1. Там они обозначены буквами T, A, V, K.

4.0) T, A, V, K;
4.1) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$;
4.2) $(p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)) \leftrightarrow ((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r)$;
4.3) $(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$.

Правилами вывода будут:

4.4) подстановка;
4.5) $p,\ p \leftrightarrow q \ /\ q$.

Поскольку матрица $[\mathrm{M}_8{}^{\mathrm{c}}]$ является третьей степенью матрицы $[\mathrm{M}_2{}^{\mathrm{c}}]$, справедлива следующая лемма:

Лемма: *Множества тавтологий (в нашей нотации* T*) для* $[\mathrm{M}_2{}^{\mathrm{c}}]$ *и* $[\mathrm{M}_8{}^{\mathrm{c}}]$ *совпадают* (Jaskovski 1936).

5. Синтаксические правила вывода, использующие матрицу $[[\mathrm{M}_8{}^{\mathrm{c}}]]$

Матрицу $[\mathrm{M}_8{}^{\mathrm{c}}]$ преобразуем в следующую $[[\mathrm{M}_8{}^{\mathrm{c}}]]$:

$$[[\mathrm{M}_8{}^{\mathrm{c}}]] = \langle\{\ \mathrm{T,\ A,V,\ K,\ \neg K,\ \neg V,\ \neg A,\ \neg T}\ \},\ \neg,\ \leftrightarrow,\ \{\ \mathrm{T,\ A,\ V,\ K}\ \}\rangle. \qquad (11)$$

Отличие представленной матрицы $[[\mathrm{M}_8{}^{\mathrm{c}}]]$ от предыдущей $[\mathrm{M}_8{}^{\mathrm{c}}]$ состоит в том, что множество выделенных значений {T} расширено вновь введенными положительными истинностными оценками {T, A, V, K}. Очевидно, что выводимые в таком исчислении формулы разделятся на четыре независимых множества, по числу оценок в пункте 4.0.

Поскольку вновь введенные истинностные оценки, в свете представленных выше соображений, являются независимыми и ортогональными, для начала введем новые синтаксические знаки вывода для каждой из них, а именно:

$$\vdash_{\mathrm{T}},\ \vdash_{\mathrm{A}},\ \vdash_{\mathrm{V}}\ ,\ \vdash_{\mathrm{K}}. \qquad (12)$$

Каждый из этих знаков обозначает формулы, выведенные с помощью соответствующих правил вывода. Первый из них, «штопор» $\vdash_{\mathrm{T}}$, обозначает уже известное нам правило вывода 4.5. Первая группа правил доставляется диагональными элементами таблицы 2:

	$\leftrightarrow$	T	V	A	K
$\vdash_{\mathrm{T}}$	T	T			
$\vdash_{\mathrm{V}}$	V		T		
$\vdash_{\mathrm{A}}$	A			T	
$\vdash_{\mathrm{K}}$	K				T

$$\vdash_{\mathrm{T}} p,\ \vdash_{\mathrm{T}} (p \leftrightarrow q)\ /\ \vdash_{\mathrm{T}} q \qquad (13.1)$$

$$\vdash_{\mathrm{V}} p,\ \vdash_{\mathrm{T}} (p \leftrightarrow q)\ /\ \vdash_{\mathrm{V}} q \qquad (14.1)$$

$$\vdash_{\mathrm{A}} p,\ \vdash_{\mathrm{T}} (p \leftrightarrow q)\ /\ \vdash_{\mathrm{A}} q \qquad (15.1)$$

$$\vdash_{\mathrm{K}} p,\ \vdash_{\mathrm{T}} (p \leftrightarrow q)\ /\ \vdash_{\mathrm{K}} q \qquad (16.1)$$

Слева, для справки, представлены первые входы для пользования правилами. Второй элемент правил: эквиваленция — изображен значками в диагонали. Выходы правил необходимо считывать в самой верхней строке. Запись с помощью одной формулы:

$$\vdash_{\mathrm{TVAK}} p,\ \vdash_{\mathrm{T}} (p \leftrightarrow q)\ /\ \vdash_{\mathrm{TVAK}} q. \qquad (13.1\text{–}16.1)$$

Запись $\vdash_{\mathrm{TVAK}}$ предполагает синхронное переключение букв в разных штопорах, а $\vdash_{\mathrm{T}}$ $(= \vdash_{\mathrm{TTTT}})$ используется при всех видах переключения букв. Следующая группа правил задается с помощью таких конструкций (две первых строчки таблицы 2):

$\vdash_{\mathrm{K}}\ q$

	$\leftrightarrow$	T	V	A	K
$\vdash_{\mathrm{T}}\ p$	T	T	V	A	K

$\vdash_{\mathrm{K}}(p \leftrightarrow q)$

Совпадает с (13.1) (13.2)

$$\vdash_{\mathrm{T}} p,\ \vdash_{\mathrm{V}} (p \leftrightarrow q)\ /\ \vdash_{\mathrm{V}} q \qquad (14.2)$$

$$\vdash_{\mathrm{T}} p,\ \vdash_{\mathrm{A}} (p \leftrightarrow q)\ /\ \vdash_{\mathrm{A}} q \qquad (15.2)$$

$$\vdash_{\mathrm{T}} p,\ \vdash_{\mathrm{K}} (p \leftrightarrow q)\ /\ \vdash_{\mathrm{K}} q \qquad (16.2)$$

Стрелки и «штопоры» поясняют, для примера, пути вывода для формулы $\vdash_{\mathrm{K}} q$ (правило 16.2). Запишем эти правила с помощью одной формулы:

$$\vdash_{\mathrm{T}} p,\ \vdash_{\mathrm{VAK}} (p \leftrightarrow q)\ /\ \vdash_{\mathrm{VAK}} q. \qquad (14.2\text{–}16.2)$$

Третья группа правил вывода определяется левым столбцом Таблицы 2:

$\leftrightarrow$	T
T	T
V	V
A	A
K	K

Совпадает с (13.1) (13.3)

$$\vdash_{\mathrm{V}} p,\ \vdash_{\mathrm{V}} (p \leftrightarrow q)\ /\ \vdash_{\mathrm{T}} q \qquad (14.3)$$

$$\vdash_{\mathrm{A}} p,\ \vdash_{\mathrm{A}} (p \leftrightarrow q)\ /\ \vdash_{\mathrm{T}} q \qquad (15.3)$$

$$\vdash_{\mathrm{K}} p,\ \vdash_{\mathrm{K}} (p \leftrightarrow q)\ /\ \vdash_{\mathrm{T}} q \qquad (16.3)$$

Запись с помощью одной формулы:

$$\vdash_{\mathrm{VAK}} p,\ \vdash_{\mathrm{VAK}} (p \leftrightarrow q)\ /\ \vdash_{\mathrm{T}} q. \qquad (14.3\text{–}16.3)$$

Четвертая группа доставляется двумя еще не задействованными полями Таблицы 2. Правый верхний треугольник доставляет следующие три правила вывода:

$\leftrightarrow$	T			
T				
V			K	A
A				V
K				

$$\vdash_{\mathrm{V}} p,\ \vdash_{\mathrm{A}} (p \leftrightarrow q)\ /\ \vdash_{\mathrm{K}} q \tag{17.1}$$
$$\vdash_{\mathrm{V}} p,\ \vdash_{\mathrm{K}} (p \leftrightarrow q)\ /\ \vdash_{\mathrm{A}} q \tag{18.1}$$
$$\vdash_{\mathrm{A}} p,\ \vdash_{\mathrm{V}} (p \leftrightarrow q)\ /\ \vdash_{\mathrm{K}} q. \tag{19.1}$$

Левый нижний треугольник доставляет следующие три правила вывода:

$\leftrightarrow$	T			
T				
V				
A		K		
K		A	V	

$$\vdash_{\mathrm{A}} p,\ \vdash_{\mathrm{K}} (p \leftrightarrow q)\ /\ \vdash_{\mathrm{V}} q \tag{20.1}$$
$$\vdash_{\mathrm{K}} p,\ \vdash_{\mathrm{A}} (p \leftrightarrow q)\ /\ \vdash_{\mathrm{V}} q \tag{21.1}$$
$$\vdash_{\mathrm{K}} p,\ \vdash_{\mathrm{V}} (p \leftrightarrow q)\ /\ \vdash_{\mathrm{A}} q. \tag{22.1}$$

Сокращенная запись правил (17.1–22.1):

$$\vdash_{\mathrm{VVAAKK}} p,\ \vdash_{\mathrm{AKVKAV}} (p \leftrightarrow q)\ /\ \vdash_{\mathrm{KAKVVA}} q. \tag{17.1–22.1}$$

Заметим, что в правилах (17.1–22.1) нет упоминания буквы T.

Все описанные правила вывода основаны на таблице 2, где фигурируют позитивные оценки формул. И если для оценки T ещё есть какие-то основания ограничиться позитивностью, то для V, A, K таких оснований нет. А потому наши правила с успехом можно применять и к негативным ¬V, ¬A, ¬K, но уже по таблице 3. Описывать это займет много времени и места, но для их формулировки ничего существенно нового не понадобится. Поэтому мы ограничимся, для примера, их компактной формулой, и только для одного из возможных случаев:

$$\vdash_{\neg\mathrm{T}\neg\mathrm{V}\neg\mathrm{A}\neg\mathrm{K}} p,\ \vdash_{\mathrm{T}} (p \leftrightarrow q)\ /\ \vdash_{\neg\mathrm{T}\neg\mathrm{V}\neg\mathrm{A}\neg\mathrm{K}} q. \tag{13.5–13.8}$$

6. Гипотеза эквиваленции

Легко заметить, что наша Аксиома самореферентности (2) имеет вхождение предиката $P(x)$, на который не накладывалось никаких ограничений. Мы ассоциировали его с предикатом истинности Тарского $Tr(x)$ потому, что поставили себе цель: разобраться со свойствами именно этого предиката. Ничто не помешает нам применить эту аксиому к предикатам с другими свойствами. И вообще, сто̀ит перенести акцент с *предикатов* на связку *эквиваленция*, которая в этой ситуации всегда будет неизменной, и сформулировать следующую гипотезу:

> Связка эквиваленции $\leftrightarrow$ для самореферентного применения предиката истинности Ŧ есть связка эквиваленции $\leftrightarrow$ для самореферентных применений вообще всех предикатов.

Отголоски подобной гипотезы можно найти у Приста (Priest 1994).

7. Приложение к наивной теории множеств

Памятуя о том, что связка эквиваленции $\leftrightarrow$, отображенная в таблице 2, применима теперь и к другим самореферентным предикатам, применим ее к предикату принадлежности **∈**. Для этого введем в язык эти упомянутые символы принадлежности: $\in$ (и равенства: $=$, и λ — это для удобства). При этом переменные $X,\ Y,\ Z$ будут пробегать по термам: множествам и их элементам.

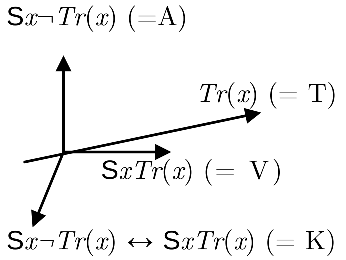


Рисунок 4. Расположение оценок самореферентных предложений.

Пусть $R = \lambda X.(X \notin X)$ обозначает множество всех множеств, не принадлежащих самим себе (Рассел), а ᴚ $= \lambda X.(X \in X)$ обозначает множество всех множеств, принадлежащих самим себе (анти-Рассел). Нет нужды пояснять, что это примеры самореферентного применения предиката принадлежности $\in$. Составим из описанных выше термов такие высказывания: $X \in Y$ (= T), ᴚ $\in$ ᴚ (= V), $R \notin R$ (= A), $R \notin R \leftrightarrow$ ᴚ $\in$ ᴚ (= K (= A $\leftrightarrow$ V)).

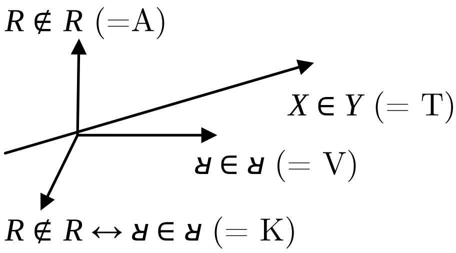


Рисунок 5. Расположение оценок самореферентных множеств
в четырехмерном гиперкомплексном пространстве.

В рисунках 4 и 5 мы работаем в одном и том же пространстве — пространстве логических истинностных значений самореферентных выражений. Коль скоро мы нашли место для самореферентных предложений, являющихся камнем преткновения для большинства систем теории множеств, сформулируем *Аксиому свертывания*, не прибегая к обычным в таких случаях ограничениям:

$$\exists Y \forall X (X \in Y \leftrightarrow F(X)). \tag{23}$$

Разумеется, $F(X)$ будет формироваться из символов нашего расширенного языка, со связками ($\neg$, $\leftrightarrow$), и с переменными по формулам: x, y, z, и предикатом истинности $Tr(x)$ для них; и с переменными по термам X, Y, Z, и символами $\in$, $=$, λ.

8. Заключение

Полноценное логическое 4D-пространство предполагает формулировку правил вывода, оперирующих 4D-векторами. Мы уже сформулировали операцию для двух 4D-векторов, а именно: $\mathbf{Ŧ}_{\mathrm{P}} \leftrightarrow \mathbf{Ŧ}_{\mathrm{Q}}$ — и это полноценное векторное выражение. Теперь еще можно сформулировать обобщенное правило вывода, например такое:

$$\mathbf{Ŧ}_{\mathrm{P}},\ (\mathbf{Ŧ}_{\mathrm{P}} \leftrightarrow \mathbf{Ŧ}_{\mathrm{Q}})\ /\ \mathbf{Ŧ}_{\mathrm{Q}}. \tag{24}$$

Оценку таких выражений можно вычислить покоординатно, по правилам вывода (13.1–16.1), (13.2–16.2), (13.3–16.3) и (17.5–22.1).

Итак, мы получили интерпретацию матрицы истинностных значений в соответствующие гиперкомплексные числа. Это позволило нам представить вновь введенные истинностные значения как новые измерения в логическом пространстве, и сформулировать Гипотезу эквиваленции (пункт 6). Вопросы непротиворечивости и полноты представленной системы не рассматривались. Оправданием может служить статья автора (Степанов 2007), где доказана непротиворечивость системы самореферентных предложений для языка с полной системой связок, при использовании так называемых систем без сокращения, активно развиваемых в конце XX века В. Н. Гришиным (Гришин 1974).

Литература

Гришин 1974 — *Гришин В. Н.* Об одной нестандартной логике и ее применении к теории множеств // Исследования по формализованным языкам и неклассическим логикам. М.: Наука, 1974. С. 135–171.

Кантор 1978 — *Кантор Н. Л., Солодовников А. С.* Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1978.

Карпенко 2010 — *Карпенко А. С.* Развитие многозначной логики. М.: ЛКИ, 2010. 448 с.

Степанов 2007 — *Степанов В. А.* Пропозициональная логика самореферентных предложений // НТИ, сер. 2, Информационные процессы и системы. 2007. № 5. С. 8–14.

Степанов 2011 — *Степанов В. А.* Многозначная логика для описания внешних операций самореферентных формул // Логико-философские штудии. 2011. Вып. 9. С. 30–37.

Черч 1960 — *Черч А.* Введение в математическую логику. М.: Издательство иностранной литературы, 1960. 485 с.

Шарковский 1989 — *Шарковский А. Н. и др.* Динамика одномерных отображений. Киев: Наукова думка, 1989. 216 с.

Emily 1975 — *Emily, M.* Pierce's Paradoxical Solution to the Liar's Paradox // Notre Dame Journal of Symbolic Logic. 1975. Vol. XII, No. 3. P. 369–374.

Feferman 1984 — *Feferman, S.* Toward Useful Type-Free Theories I // Journal of Symbolic Logic. 1984. Vol. 49. P. 75–111.

Jaskovski 1975 — *Jaskovski, S.* Investigations into the system of intuitionist logic // Studia Logica. 1975 (original: 1936). Vol. 34. P. 117–120.

Nicolai 2017 — *Nicolai, C.* Equivalences for Truth Predicates // Review of Symbolic Logic. 2017. Vol. 10, No. 2.

Priest 1994 — *Priest, G.* The Structure of the Paradoxes of Self-reference // Mind. 1994. Vol. 103.

Stepanov 2014 — *Stepanov, V.* Truth Theory for Logic of Self-Reference Statements as a Quaternion Structure // Philosophy, Mathematics, Linguistics: Aspects of Interaction. SPb: PDMI RAS, 2014. P. 225–230.

Wajsberg 1935 — *Wajsberg, M.* Beitrage zum Metaaussgenkalkül //Monatshefte für Mathematik und Physik. 1935. Vol. 42. P. 221–242.