DOI: 10.52119/LPHS.2019.52.58.001

ЛОГИКА СЕГОДНЯ

Владимир Попов[1]

К ПРОБЛЕМЕ РАСШИРЕНИЯ МАТРИЧНОЙ СЕМАНТИКИ, АДЕКВАТНОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ИМПЛИКАТИВНОЙ ЛОГИКЕ, ДО МАТРИЧНОЙ СЕМАНТИКИ, АДЕКВАТНОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ИМПЛИКАТИВНО-НЕГАТИВНОЙ ЛОГИКЕ[2]

Аннотация. Предлагаемая работа выполнена в рамках исследований проблемы расширения семантики, адекватной собственному фрагменту логики, до семантики, адекватной этой логике. Автором обнаружена трехзначная логическая матрица $M(1, 0, 0, 1/2)$ с единственным выделенным значением, адекватная классической импликативной логике $Cl_{\supset}$ и обладающая следующим свойством: не существует такой унарной операции f, чтоупорядоченная пара $\langle M(1, 0, 0, 1/2), f\rangle$ является логической матрицей, адекватной классической импликативно-негативной логике $Cl_{\supset\neg}$. В данной статье описана упомянутая выше логическая матрица $M(1, 0, 0, 1/2)$, определено понятие регулярной $L_{\supset\neg}$-логики (согласно этому определению логика $Cl_{\supset\neg}$ служит примером регулярной $L_{\supset\neg}$-логики) и доказано следующее: длявсякойунарнойоперации f на носителе логической матрицы $M(1, 0, 0, 1/2)$ упорядоченная пара $\langle M(1, 0, 0, 1/2), f\rangle$ есть такая логическая матрица, что множество всех общезначимых в $\langle M(1, 0, 0, 1/2), f\rangle$ формул не является регулярной $L_{\supset\neg}$-логикой (в частности, не является логикой $Cl_{\supset\neg}$). В статье доказано также, что для всякого целого положительного числа n существует такая $n+3$-значная логическая матрица K с единственным выделенным значением, адекватная классической импликативной логике и удовлетворяющая условию: длявсякойунарнойоперации f на носителе этой логической матрицы упорядоченная пара $\langle K, f\rangle$ есть такая логическая матрица, что множество всех общезначимых в $\langle K, f\rangle$ формул не является логикой $Cl_{\supset\neg}$.

Ключевые слова: трехзначная логическая матрица с одним выделенным значением, $L_{\supset\neg}$-логика, регулярная $L_{\supset\neg}$-логика, изоморфизм логических матриц.

[1] *Попов Владимир Михайлович* — к. филос. н., доцент кафедры логики философского факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.
Vladimir Popov, PhD, associate professor, Dept. of Logic, Lomonosov Moscow State University.
pphiloslog@mail.ru

[2] Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 19-011-00536А.

Vladimir Popov

ON THE PROBLEM OF EXPANSION OF MATRIX SEMANTICS ADEQUATE TO CLASSICAL IMPLICATIVE LOGIC TO MATRIX SEMANTICS ADEQUATE TO CLASSICAL IMPLICATIVE-NEGATIVE LOGIC

Abstract. The present work is carried out in the framework of studies of the problem of expansion of a semantics adequate to a proper fragment of a logic to a semantics adequate to this logic. The author has found a three-valued logical matrix $M(1,0,0,1/2)$ with one designated value, adequate to the classical implicative logic $Cl_{\supset}$ and having the following property: there is no unary operation f, such that the ordered pair $\langle M(1,0,0,1/2), f\rangle$ is a logical matrix adequate to the classical implicative-negative logic $Cl_{\supset\neg}$. This article describes the above mentioned logical matrix $M(1,0,0,1/2)$, defines the concept of regular $L_{\supset\neg}$-logic (according to this definition the logic $Cl_{\supset\neg}$ is an example of a regular $L_{\supset\neg}$-logic) and proves the following: for all unary operations f on the carrier of a logical matrix $M(1,0,0,1/2)$, an ordered pair $\langle M(1,0,0,1/2), f\rangle$ is a logical matrix such that the set of all valid in $\langle M(1,0,0,1/2), f\rangle$ formulas is not a regular $L_{\supset\neg}$-logic (in particular, is not the logic $Cl_{\supset\neg}$). The article also proves that for any positive integer n there exists a $n+3$-valued logical matrix K with one designated value, adequate to the classical implicative logic and satisfying the condition: for any unary operation f on the carrier of this logical matrix, the ordered pair $\langle K, f\rangle$ is a logical matrix such that the set of all valid in $\langle K, f\rangle$ formulas is not the logic $Cl_{\supset\neg}$. The conclusion of the article contains the following announcement: every three-valued logical matrix K which has a single designated value, is adequate to the logic $Cl_{\supset}$ and for which there is no unary operation f such that $\langle K, f\rangle$ is a logical matrix adequate to regular $L_{\supset\neg}$-logic, is isomorphic to the logical matrix $M(1,0,0,1/2)$.

Keywords: three-valued logical matrix with one designated value, $L_{\supset}$-logic, $L_{\supset\neg}$-logic, regular $L_{\supset\neg}$-logic, isomorphism of logical matrices.

Нам потребуются два стандартно определяемых пропозициональных языка $L_{\supset}$ и $L_{\supset\neg}$. Алфавит языка $L_{\supset}$ есть множество $\{\supset,), (, p_1, p_2, p_3, \dots\}$ символов, а алфавит языка $L_{\supset\neg}$ есть множество $\{\supset, \neg,), (, p_1, p_2, p_3, \dots\}$ символов. Здесь $\supset$ есть бинарная логическая связка языка $L_{\supset}$ и языка $L_{\supset\neg}$, $\neg$ есть унарная логическая связка языка $L_{\supset\neg}$,) и (являются техническими символами языка $L_{\supset}$ и языка $L_{\supset\neg}$, а $p_1, p_2, p_3, \dots$ являются пропозициональными переменными языка $L_{\supset}$ и языка $L_{\supset\neg}$. Определение $L_{\supset}$-формулы индуктивно: (1) пропозициональная переменная языка $L_{\supset}$ есть $L_{\supset}$-формула, (2) если A есть $L_{\supset}$-формула и B есть $L_{\supset}$-формула, то $(A \supset B)$ есть $L_{\supset}$-формула, (3) ничто другое $L_{\supset}$-формулой не является. Определение $L_{\supset\neg}$-формулы индуктивно и состоит в точности из четырех пунктов, первые два из которых аналогичны первым двум пунктам определения $L_{\supset}$-формулы. Третий пункт определения $L_{\supset\neg}$-формулы: если A есть $L_{\supset\neg}$-формула, то $(\neg A)$ есть $L_{\supset\neg}$-формула. Четвертый пункт определения $L_{\supset\neg}$-формулы аналогичен третьему пункту определения $L_{\supset}$-формулы. Называем $L_{\supset}$-логикой множество $L_{\supset}$-формул, замкнутое относительно правила modus ponens в $L_{\supset}$ и относительно правила пропозициональной подстановки в $L_{\supset}$. Называем $L_{\supset\neg}$-логикой множество $L_{\supset\neg}$-формул, замкнутое относительно правила modus ponens в $L_{\supset\neg}$ и относительно правила пропозициональной подстановки в $L_{\supset\neg}$.

Определение 1. *Называем $L_{\supset}$-матрицей упорядоченную тройку $\langle M, N, g\rangle$, где M есть непустое множество, N есть подмножество множества M, g есть бинарная операция на M; при этом M называем носителем $L_{\supset}$-матрицы $\langle M, N, g\rangle$, N называем выделенным множеством $L_{\supset}$-матрицы $\langle M, N, g\rangle$, g называем операцией $L_{\supset}$-матрицы $\langle M, N, g\rangle$.*

Определение 2. *Называем $L_{\supset\neg}$-матрицей упорядоченную четверку $\langle M, N, g, f\rangle$, где M есть непустое множество, N есть подмножество множества M, g есть бинарная операция на M, f есть унарная операция на M; при этом M называем носителем $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle M, N, g, f\rangle$, N называем выделенным множеством $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle M, N, g, f\rangle$, g называем бинарной операцией $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle M, N, g, f\rangle$, f называем унарной операцией $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle M, N, g, f\rangle$.*

Определение 3. *Оценкой языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице K называем отображение множества $\{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ всех пропозициональных переменных языка $L_{\supset}$ в носитель $L_{\supset}$-матрицы K.*

Замечание 1. *Можно доказать, что для всякой $L_{\supset}$-матрицы K существует единственное отображение (обозначаем его через φ_K) множества всех упорядоченных пар, каждая из которых имеет вид $\langle A, w\rangle$, где A есть $L_{\supset}$-формула и w есть оценка языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице K, в носитель $L_{\supset}$-матрицы K, выполняющее следующие два условия: (1) для всякой пропозициональной переменной q языка $L_{\supset}$ и для всякой оценки v языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице K верно, что $\varphi_K(\langle q, v\rangle) = v(q)$, (2) для всякой $L_{\supset}$-формулы A, для всякой $L_{\supset}$-формулы B и для всякой оценки v языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице K φ_K $(\langle (A \supset B), v\rangle) = (\varphi_K(\langle A, v\rangle) g \varphi_K(\langle (B, v\rangle))$, где g есть операция $L_{\supset}$-матрицы K.*

Определение 4. *Оценкой языка $L_{\supset\neg}$ в $L_{\supset\neg}$-матрице K называем отображение множества $p_1, p_2, p_3, \dots$ всех пропозициональных переменных языка $L_{\supset\neg}$ в носитель $L_{\supset\neg}$-матрицы K.*

Замечание 2. *Можно доказать, что для всякой $L_{\supset\neg}$-матрицы K существует единственное отображение (обозначаем его через φ_K) множества всех упорядоченных пар, каждая из которых имеет вид $\langle A, w\rangle$, где A есть $L_{\supset\neg}$-формула и w есть оценка языка $L_{\supset\neg}$ в $L_{\supset\neg}$-матрице K, в носитель $L_{\supset\neg}$-матрицы K, выполняющее следующие три условия: (1) для всякой пропозициональной переменной q языка $L_{\supset\neg}$ и для всякой оценки v языка $L_{\supset\neg}$ в $L_{\supset\neg}$-матрице K верно, что $\varphi_K(\langle q, v\rangle) = v(q)$, (2) для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A, для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы B и для всякой оценки v языка $L_{\supset\neg}$ в $L_{\supset\neg}$-матрице K $\varphi_K(\langle (A \supset B), v\rangle) = (\varphi_K(\langle A, v\rangle) g \varphi_K(\langle (B, v\rangle))$, где g есть бинарная операция $L_{\supset\neg}$-матрицы K, (3) для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A и для всякой оценки v языка $L_{\supset\neg}$ в $L_{\supset\neg}$-матрице K $\varphi_K(\langle (\neg A), v\rangle) = f(\varphi_K(\langle A, v\rangle))$, где f есть унарная операция $L_{\supset\neg}$-матрицы K.*

Определение 5. *Называем $L_\supset$-формулу A $L_\supset$-формулой, общезначимой в $L_\supset$-матрице K, если для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице K $\varphi_K(\langle A, v\rangle)$ принадлежит выделенному множеству $L_\supset$-матрицы K.*

Определение 6. *Называем $L_{\supset\neg}$-формулу A $L_{\supset\neg}$-формулой, общезначимой в $L_{\supset\neg}$-матрице K, если для всякой оценки v языка $L_{\supset\neg}$ в $L_{\supset\neg}$-матрице K $\varphi_K(\langle A, v\rangle)$ принадлежит выделенному множеству $L_{\supset\neg}$-матрицы K.*

Определение 7. *Называем $L_\supset$-матрицу K $L_\supset$-матрицей, адекватной $L_\supset$-логике L, если для всякой $L_\supset$-формулы A верно следующее: A есть $L_\supset$-формула, общезначимая в $L_\supset$-матрице K, тогда и только тогда, когда $A \in L$.*

Определение 8. *Называем $L_{\supset\neg}$-матрицу K $L_{\supset\neg}$-матрицей, адекватной $L_{\supset\neg}$-логике L, если для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A верно следующее: A есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице K, тогда и только тогда, когда $A \in L$.*

Соглашение 1. *Обозначаем через $\supset_{(1,0,0,1/2)}$ бинарную операцию на $\{1, 1/2, 0\}$, определяемую следующей таблицей*

$\supset_{(1,0,0,1/2)}$	1	1/2	0
1	1	1	0
1/2	1	1	0
0	1	1/2	1

Соглашение 2. *Обозначаем через $\supset_{(1/2,1,0,1/2)}$ бинарную операцию на $\{1, 1/2, 0\}$, определяемую следующей таблицей*

$\supset_{(1/2,1,0,1/2)}$	1	1/2	0
1	1	1/2	1
1/2	1	1	0
0	1	1/2	1

Соглашение 3. *Обозначаем через $\supset_{Cl}$ бинарную операцию на $\{0, 1\}$, определяемую следующей таблицей*

$\supset_{Cl}$	1	0
1	1	0
0	1	1

Соглашение 4. *Обозначаем через $\neg_{Cl}$ унарную операцию на $\{0, 1\}$, определяемую следующей таблицей*

$\neg_{Cl}$	1	0
	0	1

Соглашение 5. *Обозначаем через s отображение множества $\{1, 1/2, 0\}$ на себя, определяемое следующей таблицей*

s	1	1/2	0
	1	0	1/2

Соглашение 6. *Обозначаем через* $M_{(1,0,0,1/2)}$ *упорядоченную тройку*

$$\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset_{(1,0,0,1/2)}\rangle.$$

Соглашение 7. *Обозначаем через* $M_{(1/2,1,0,1/2)}$ *упорядоченную тройку*

$$\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset_{(1/2,1,0,1/2)}\rangle.$$

Соглашение 8. *Обозначаем через* $M(Cl_{\supset})$ *упорядоченную тройку* $\langle\{0, 1\}, \{1\}, \supset_{Cl}\rangle$.

Соглашение 9. *Обозначаем через* $M(Cl_{\supset\neg})$ *упорядоченную четверку*

$$\langle\{0, 1\}, \{1\}, \supset_{Cl}, \neg_{Cl}\rangle.$$

Замечание 3. *Упорядоченные тройки* $M(1, 0, 0, 1/2)$, $M(1/2, 1, 0, 1/2)$ *и* $M(Cl_{\supset})$ *являются* $L_{\supset}$*-матрицами, а* $M(Cl_{\supset\neg})$ *есть* $L_{\supset\neg}$*-матрица.*

Соглашение 10. *Обозначаем через* $Cl_{\supset}$ *множество всех* $L_{\supset}$*-формул, общезначимых в* $L_{\supset}$*-матрице* $M(Cl_{\supset})$.

Соглашение 11. *Обозначаем через* $Cl_{\supset\neg}$ *множество всех* $L_{\supset\neg}$*-формул, общезначимых в* $L_{\supset\neg}$*-матрице* $M(Cl_{\supset\neg})$.

Замечание 4. *Множество* $Cl_{\supset}$ *всех* $L_{\supset}$*-формул, общезначимых в* $L_{\supset}$*-матрице* $M(Cl_{\supset})$, *есть* $L_{\supset}$*-логика.*

Замечание 5. *Множество* $Cl_{\supset\neg}$ *всех* $L_{\supset\neg}$*-формул, общезначимых в* $L_{\supset\neg}$*-матрице* $M(Cl_{\supset\neg})$, *есть* $L_{\supset\neg}$*-логика.*

Замечание 6. *Следуя традиции, называем* $Cl_{\supset}$ *классической импликативной логикой в языке* $L_{\supset}$, *а* $Cl_{\supset\neg}$ *— классической импликативно-негативной логикой в языке* $L_{\supset\neg}$.

Определение 9. *Регулярной* $L_{\supset\neg}$*-логикой называем* $L_{\supset\neg}$*-логику, которая включается в* $Cl_{\supset\neg}$.

Определение 10. *Называем* s*-преобразованием упорядоченной пары, первый член* q *которой есть пропозициональная переменная языка* $L_{\supset}$ *и второй член* x *которой есть элемент множества* $\{1, 1/2, 0\}$, *упорядоченную пару, первый член которой есть* q *и второй член которой есть* $s(x)$.

Определение 11. *Называем* s*-преобразованием отображения* v *множества всех пропозициональных переменных языка* $L_{\supset}$ *в* $1, 1/2, 0$ *множество всех таких упорядоченных пар, каждая из которых есть* s*-преобразование упорядоченной пары из* v.

Замечание 7. *Для всякой оценки языка* $L_{\supset}$ *в* $L_{\supset}$*-матрице* $M(1, 0, 0, 1/2)$ *существует единственное* s*-преобразование этой оценки языка* $L_{\supset}$ *в* $L_{\supset}$*-матрице* $M(1, 0, 0, 1/2)$.

Соглашение 12. *Обозначаем s-преобразование оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$ через $s[v]$.*

Замечание 8. *Для всякой оценки v языка $L_\supset$в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$ $s[v]$ является оценкой языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$.*

Лемма 1. *Для всякой $L_\supset$-формулы A: A есть пропозициональная переменная языка $L_\supset$, или существует такое целое положительное число n, существуют такие $L_\supset$-формулы $A_1,\ldots,A_n$ и существует такая пропозициональная переменная q языка $L_\supset$, что A есть $(A_1 \supset (\ldots \supset (A_n \supset q)\ldots))$.*

Лемма 1 доказана индукцией по построению $L_\supset$-формулы.

Лемма 2. *Для всякого целого положительного числа n, для всяких $L_\supset$-формул $A_1,\ldots,A_n,B$ и для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$: если*

$$\varphi_M(1,0,0,1/2)(\langle(A_1 \supset (\cdots \supset (A_n \supset B)\ldots)), v\rangle) = 1/2,$$

то $\varphi_M(1,0,0,1/2)(\langle A_1, v\rangle) = \ldots =$
$$= \varphi_M(1,0,0,1/2)(\langle A_n, v\rangle) = 0 \text{ и } \varphi_M(1,0,0,1/2)(\langle B, v\rangle) = 1/2.$$

Доказательство леммы 2 проводим прямой математической индукцией.

Базис. Для всякой $L_\supset$-формулы A_1, для всякой $L_\supset$-формулы B и для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$: если $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle(A_1 \supset B), v\rangle) = 1/2$, то $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle(A_1), v\rangle) = 0$ и $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle(B), v\rangle) = 1/2$. Справедливость базиса очевидна.

Индукционный шаг. Для всякого целого положительного числа n: если для всяких $L_\supset$-формул $A_1,\ldots,A_n,B$ и для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$

$$\begin{aligned}&\text{если } \varphi_M(1,0,0,1/2)(\langle(A_1 \supset (\cdots \supset (A_n \supset B)\ldots)), v\rangle) = 1/2,\\ &\quad\text{то } \varphi_M(1,0,0,1/2)(\langle A_1, v\rangle) = \cdots = \varphi_M(1,0,0,1/2)(\langle A_n, v\rangle) = 0\\ &\quad\text{и } \varphi_M(1,0,0,1/2)(\langle B, v\rangle) = 1/2,\end{aligned}$$

то для всяких $L_\supset$-формул $A_1,\ldots,A_n,A_{n+1},B$ и для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$

$$\begin{aligned}&\text{если } \varphi_M(1,0,0,1/2)(\langle(A_1 \supset (\cdots \supset (A_n \supset (A_{n+1} \supset B))\ldots)), v\rangle) = 1/2,\\ &\quad\text{то } \varphi_M(1,0,0,1/2)(\langle A_1, v\rangle) = \cdots =\\ &\qquad\quad = \varphi_M(1,0,0,1/2)(\langle A_n, v\rangle) = \varphi_M(1,0,0,1/2)(\langle A_{n+1}, v\rangle) = 0\\ &\quad\text{и } \varphi_M(1,0,0,1/2)(\langle B, v\rangle) = 1/2.\end{aligned}$$

Докажем индукционный шаг.

(1) n' есть целое положительное число (допущение).

(2) Для всяких $L_\supset$-формул $A_1, \ldots, A_n, B$ и для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$

$$\begin{aligned}&\text{если } \varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle (A_1 \supset (\cdots \supset (A_n \supset B) \ldots)), v\rangle) = 1/2,\\ &\quad\text{то } \varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A_1, v\rangle) = \cdots = \varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A_n, v\rangle) = 0\\ &\quad\text{и } \varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B, v\rangle) = 1/2 \text{ (допущение).}\end{aligned}$$

(3) $A'_1, \ldots, A'_{n'}, A'_{n'+1}, B'$ являются $L_\supset$-формулами (допущение).

(4) v' есть оценка языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$ (допущение).

(5) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle (A'_1 \supset (\cdots \supset (A'_{n'} \supset (A'_{n'+1} \supset B')) \ldots)), v'\rangle) = 1/2$ (допущение).

(6) $A'_1, \ldots, A'_{n'}, (A'_{n'+1} \supset B')$ являются $L_\supset$-формулами (из (3), по определению $L_\supset$-формулы).

(7) Если $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle (A'_1 \supset (\ldots \supset (A'_{n'} \supset (A'_{n'+1} \supset B')) \ldots)), v'\rangle) = 1/2$, то

$$\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A'_1, v'\rangle) = \ldots = \varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A'_{n'}, v'\rangle) = 0$$

и $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle (A'_{n'+1} \supset B'), v'\rangle) = 1/2$ (из (2), (4), и (6)).

Опираясь на базис и на утверждения (3) и (4), получаем, что

(8) если $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle (A'_{n'+1} \supset B'), v'\rangle) = 1/2$, то $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A'_{n'+1}, v'\rangle) = 0$ и

$$\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B', v'\rangle) = 1/2.$$

(9) Если $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle (A'_1 \supset (\ldots \supset (A'_{n'} \supset (A'_{n'+1} \supset B')) \ldots)), v'\rangle) = 1/2$, то

$\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A'_1, v'\rangle) = \cdots = \varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A'_{n'}, v'\rangle) = \varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A_{n+1}, v'\rangle) = 0$

и $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B', v'\rangle) = 1/2$ (из (7) и (8)).

Снимая допущения (5), (4), (3), (2), (1) и проводя обобщения, завершаем доказательство индукционного шага.

Индукционный шаг доказан.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Для всякой $L_\supset$-формулы A и для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$: если $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A, v\rangle) = 0$, то $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A, s[v]\rangle) \in \{1, 1/2\}$.*

Доказательство леммы 3 проводим индукцией по построению $L_\supset$-формулы.

Базис. Для всякой пропозициональной переменной q языка $L_\supset$ и для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$ верно, что если $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle q, v\rangle) = 0$, то $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle q, s[v]\rangle) \in \{1, 1/2\}$.

Справедливость базиса очевидна.

Индукционный шаг. Для всяких $L_{\supset}$-формул B и C: если (для всякой оценки v языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице $M(1,0,0,1/2)$ (если $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B, v\rangle) = 0$, то $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B, s[v]\rangle) \in \{1, 1/2\}$) и для всякой оценки v языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице $M(1,0,0,1/2)$

$$\text{если } \varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle C, v\rangle) = 0, \text{ то } \varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle C, s[v]\rangle) \in \{1, 1/2\}),$$

то для всякой оценки v языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице $M(1,0,0,1/2)$ верно следующее: если $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle (B \supset C), v\rangle) = 0$, то $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle (B \supset C), s[v]\rangle) \in \{1, 1/2\}$.

Докажем индукционный шаг.

(1) B_0 есть $L_{\supset}$-формула (допущение).

(2) C_0 есть $L_{\supset}$-формула (допущение).

(3) Для всякой оценки v языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице $M(1,0,0,1/2)$

$$\text{если } \varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B_0, v\rangle) = 0, \text{ то } \varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B_0, s[v]\rangle) \in \{1, 1/2\}$$

и для всякой оценки v языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице $M(1,0,0,1/2)$

$$\text{если } \varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle C_0, v\rangle) = 0, \text{ то } \varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle C_0, s[v]\rangle) \in \{1, 1/2\} \text{ (допущ.).}$$

(4) v_0 есть оценка языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице $M(1,0,0,1/2)$ (допущение).

(5) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle (B_0 \supset C_0), v_0\rangle) = 0$ (допущение).

(6) $s[v_0]$ есть оценка языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице $M(1,0,0,1/2)$ (из (4), по соглашению 12).

(7) Для всякой оценки v языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице $M(1,0,0,1/2)$

$$\text{если } \varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B_0, v\rangle) = 0, \text{ то } \varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B_0, s[v]\rangle) \in \{1, 1/2\} \text{ (из (3)).}$$

(8) Для всякой оценки v языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице $M(1,0,0,1/2)$

$$\text{если } \varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle C_0, v\rangle) = 0, \text{ то } \varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle C_0, s[v]\rangle) \in \{1, 1/2\} \text{ (из (3)).}$$

Опираясь на утверждения (1), (2), (4), (5), на замечание 1 и на соглашения 1 и 6, получаем, что

(9) $(\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B_0, v_0\rangle) = 1$ и $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle C_0, v_0\rangle) = 0)$ и

$$(\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B_0, v_0\rangle) = 1/2 \text{ и } \varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle C_0, v_0\rangle) = 0).$$

(10) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B_0, v_0\rangle) = 1$ и $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle C_0, v_0\rangle) = 0$ (допущение).

(11) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle C_0, v_0\rangle) = 0$ (из (10)).

Ясно, что верно следующее утверждение (12).

(12) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B_0, s[v_0]\rangle) \in \{1, 1/2, 0\}$.

(13) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle C_0, s[v_0]\rangle) \in \{1, 1/2\}$ (из (8) и (11)).

Опираясь на утверждения (6), (12), (13), на замечание 1 и на соглашения 1 и 6, получаем, что

(14) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle (B_0 \supset C_0), s[v_0]\rangle) \in \{1, 1/2\}$.

Снимая допущение (10), получаем, что

(15) если $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B0, v_0\rangle) = 1$ и $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle C_0, v_0\rangle) = 0$, то

$$\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle (B_0 \supset C_0), s[v_0]\rangle) \in \{1, 1/2\}.$$

(16) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B_0, v_0\rangle) = 1/2$ и $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle C_0, v_0\rangle) = 0$ (допущение).

(17) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle C_0, v_0\rangle) = 0$ (из (16)).

Ясно, что верно следующее утверждение (18).

(18) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B_0, s[v_0]\rangle) \in \{1, 1/2, 0\}$.

(19) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle C_0, s[v_0]\rangle) \in \{1, 1/2\}$ (из (8) и (18)).

Опираясь на утверждения (6), (18), (19), на замечание 1 и на соглашения 1 и 6, получаем, что

(20) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle (B_0 \supset C_0), s[v_0]\rangle) \in \{1, 1/2\}$.

Снимая допущение (16), получаем, что

(21) если $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B_0, v_0\rangle) = 1/2$ и $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle C_0, v_0\rangle) = 0$, то

$$\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle (B_0 \supset C_0), s[v_0]\rangle) \in \{1, 1/2\}.$$

(22) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle (B_0 \supset C_0), s[v_0]\rangle) \in \{1, 1/2\}$ (из (9),(15) и (21)).

Снимая допущения (5), (4), (3), (2), (1) и проводя обобщения, завершаем доказательство индукционного шага.

Индукционный шаг доказан.

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Для всякого целого положительного числа n, для всяких $L_\supset$-формул $A_1, \ldots, A_n, B$ и для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$: если*

$$\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A_1, v\rangle), \ldots, \varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A_n, v\rangle)$$

принадлежат множеству $\{1, 1/2\}$ и $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B, v\rangle) = 0$, то

$$\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle (A_1 \supset (\ldots \supset (A_n \supset B)\ldots)), v\rangle) = 0.$$

Лемма 4 доказана прямой математической индукцией.

Лемма 5. *Для всякой $L_\supset$-формулы A и для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$: если $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A, v\rangle) = 1/2$, то $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A, s[v]\rangle) = 0$.*

Базис. Для всякой пропозициональной переменной q языка $L_\supset$ и для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$: $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle q,v\rangle) = 1/2$, то $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle q,s[v]\rangle) = 0$.

Справедливость базиса очевидна.

Индукционный шаг. Для всяких $L_\supset$-формул B и C:

если для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$
если $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B,v\rangle) = 1/2,$ то $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B,s[v]\rangle) = 0$
и для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$
если $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle C,v\rangle){=}1/2,$ то $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle C,s[v]\rangle) = 0)),$
то для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$ верно:
если $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle(B\supset C),v\rangle) = 1/2,$ то $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle(B\supset C),s[v]\rangle) = 0.$

Докажем индукционный шаг.

(1) B_0 есть $L_\supset$-формула (допущение).

(2) C_0 есть $L_\supset$-формула (допущение).

(3) Для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$

$$\text{если } \varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B_0,v\rangle) = 1/2, \text{ то } \varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B_0,s[v]\rangle) = 0)$$

и для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$

если $\varphi_M(1,0,0,1/2)(\langle C_0,v\rangle\rangle) = 1/2,$ то $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle C_0,s[v]\rangle) = 0)$ (допущ.).

(4) v_0 есть оценка языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$ (допущение).

(5) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle(B_0\supset C_0),v_0\rangle) = 1/2$ (допущение).

(6) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B_0,v_0\rangle) = 0$ и $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle C_0,v_0\rangle) = 1/2$ (из (1),(2) и (4), по лемме 2).

(7) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B_0,v_0\rangle) = 0$ (из (6)).

(8) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle C_0,v_0\rangle) = 1/2$ (из (6)).

(9) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B_0,s(v_0)\rangle) \in \{1,1/2\}$ (из (1),(4) и (7), по лемме 3).

(10) C_0 есть пропозициональная переменная языка $L_\supset$, или существует такое целое положительное число n, существуют такие $L_\supset$-формулы $A_1,\dots,A_n$ и существует такая пропозициональная переменная q языка $L_\supset$, что C_0 есть $(A_1\supset(\dots\supset(A_n\supset q)\dots))$ (из (2), по лемме 1).

(11) C_0 есть пропозициональная переменная языка $L_\supset$ (допущение).

Опираясь на утверждения (4) и (11), а также на замечания 2 и 4, получаем, что

(12) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle C_0, v_0\rangle) = v_0(C_0)$.

(13) $v_0(C_0) = 1/2$ (из (8) и (12)).

В свете утверждений (4), (13) и определения 3 ясно, что

(14) $\langle C_0, 1/2\rangle \in v_0$.

(15) $s[v_0]$ есть s-преобразование оценки v_0 языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$ (из (4), по соглашению 8).

(16) $s[v_0]$ есть множество всех таких упорядоченных пар, каждая из которых есть s-преобразование упорядоченной пары из v_0 (из (15), по определению 11).

Опираясь на утверждение (11), соглашение 5 и определение 10, получаем, что

(17) $\langle C_0, s(1/2)\rangle$ есть s-преобразование упорядоченной пары $\langle C_0, 1/2\rangle$.

Руководствуясь соглашением 5, получаем, что

(18) $s(1/2) = 0$.

(19) $\langle C_0, 0\rangle$ есть s-преобразование упорядоченной пары $\langle C_0, 1/2\rangle$ (из (17) и (18)).

(20) $\langle C_0, 0\rangle \in s[v_0]$ (из (15), (16) и (19)).

(21) $s[v_0]$ есть оценка языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$ (из (15), по замечанию 8).

(22) $s[v_0]$ есть отображение множества всех пропозициональных переменных языка $L_\supset$ в $\{1, 1/2, 0\}$ (из (21), по определению 3).

(23) $s[v_0](C_0) = 0$ (из (11), (20) и (22)).

(24) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle C_0, s[v_0]\rangle) = s[v_0](C_0)$ (из (11) и (21), по замечанию 1).

(25) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle C_0, s[v_0]\rangle) = 0$ (из (23) и (24)).

Опираясь на утверждения (9), (25) и соглашение 1, получаем, что

(26) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B_0, s[v_0]\rangle) \supset_{(1,0,0,1/2)} \varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle C_0, s[v_0]\rangle)) = 0$.

(27) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle (B_0 \supset C_0\rangle), s[v_0]) =$
$$= (\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B_0, s[v_0]\rangle) \supset_{(1,0,0,1/2)} \varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle C_0, s[v_0]\rangle))$$
(из (1), (2), (21), по замечанию 1 и по замечанию 3).

(28) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle (B_0 \supset C_0), s[v_0]\rangle) = 0$ (из (26) и (27)).

Снимая допущение (11) получаем, что

(29) если C_0 есть пропозициональная переменная языка $L_\supset$, то

$$\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle(B_0 \supset_{(1,0,0,1/2)} C_0), s[v_0]\rangle) = 0.$$

(30) Существует такое целое положительное число n, существуют такие $L_\supset$-формулы $A_1, \ldots, A_n$ и существует такая пропозициональная переменная q языка $L_\supset$, что C_0 есть $(A_1 \supset (\ldots \supset (A_n \supset q) \ldots))$ (допущение).

Пусть

(31) m есть целое положительное число, $A'_1, \ldots, A'_m$ являются $L_\supset$-формулами, q' есть пропозициональная переменная языка $L_\supset$, C_0 есть

$$(A'_1 \supset (\cdots \supset (A'_m \supset q') \ldots)).$$

(32) m есть целое положительное число (из (31)).

(33) $A'_1, \ldots, A'_m$ являются $L_\supset$-формулами (из (31)).

(34) q' есть пропозициональная переменная языка $L_\supset$ (из (31)).

(35) C_0 есть $(A'_1 \supset (\ldots \supset (A'_m \supset q') \ldots))$ (из (31)).

(36) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}((A'_1 \supset (\ldots \supset (A'_m \supset q') \ldots)), s[v_0]) = 1/2$ (из (8) и (35)).

(37) q' есть $L_\supset$-формула (из (34), по определению $L_\supset$-формулы).

(38) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A'_1, s[v_0]\rangle) = \cdots = \varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A'_m, s[v_0]\rangle)$=0 и

$$\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle q', s[v_0]\rangle)=1/2 \text{ (из (4), (32), (33), (37), по лемме 2).}$$

(39) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A'_1, s[v_0]\rangle) = \cdots = \varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A'_m, s[v_0]\rangle) = 0$ (из (38)).

(40) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle q', s[v_0]\rangle) = 1/2$ (из (38)).

Опираясь на утверждения (4), (37), замечания 1 и 3, получаем, что

(41) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle q', s[v_0]\rangle) = v_0(q')$.

(42) $v_0(q') = 1/2$ (из (40) и (41)).

Руководствуясь утверждением (42) и определением 3, получаем, что

(43) $\langle q', 1/2\rangle \in v_0$.

Опираясь на утверждения (4), (43) и определения 10 и 11, получаем, что

(44) $\langle q', s(1/2)\rangle \in s[v_0]$.

(45) $s(1/2) = 0$ (по соглашению 5).

(46) $\langle q', 0\rangle \in s[v_0]$ (из (44) и (45)).

(47) $s[v_0]$ есть оценка языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset_{(1,0,0,1/2)}\rangle$ (из (4), по замечанию 8).

(48) $s[v_0]$ есть отображение множества всех пропозициональных переменных языка $L_\supset$ в носитель $L_\supset$-матрицы $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset_{(1,0,0,1/2)}\rangle$ (из (47), по определению 3).

(49) $s[v_0](q') = 0$ (из (46) и (48)).

(50) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle q', s[v_0]\rangle) = 0$ (из (34), (47), (49), по замечаниям 1 и 3).

(51) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A'_1, s[v_0]\rangle), \ldots, \varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A'_m, s[v_0]\rangle) \in \{1, 1/2\}$ (из (4), (33), (39), по лемме 3).

(52) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B_0, s[v_0]\rangle) \in \{1, 1/2\}$(из (1), (4), (7), по лемме 3).

Опираясь на утверждения (1), (32), (33), (37), (47) и лемму 4, получаем, что

(53) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle(B_0 \supset (A'_1 \supset (\cdots \supset (A'_m \supset q')\cdots))), s[v_0]\rangle) = 0.$

(54) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle(B_0 \supset C_0), s[v_0]\rangle) = 0$ (из (35) и (53)).

Снимая допущение (30), получаем, что

(55) если существует такое целое положительное число n, существуют такие $L_\supset$-формулы $A_1, \ldots, A_n$ и существует такая пропозициональная переменная q языка $L_\supset$, что C_0 есть $(A_1 \supset (\ldots \supset (A_n \supset q)\ldots))$, то

$$\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle(B_0 \supset C_0), s[v_0]\rangle) = 0.$$

(56) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle(B_0 \supset C_0), s[v_0]\rangle) = 0$ (из (10), (29) и (55)).

Снимая допущения (5), (4), (3), (2), (1) и проводя обобщения, завершаем доказательство индукционного шага.

Индукционный шаг доказан.

Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Для всякой $L_\supset$-формулы A и для всякой $L_\supset$-формулы B: если для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A, v\rangle) = 1$ и для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle(A \supset B), v\rangle) = 1$, то для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице*

$$M(1,0,0,1/2)\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B, v\rangle) = 1.$$

Докажем лемму 6.

(1) A_0 есть $L_\supset$-формула (допущение).

(2) B_0 есть $L_\supset$-формула (допущение).

(3) Для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице

$$M(1,0,0,1/2)\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A_0, v\rangle) = 1$$

и для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице

$$M(1,0,0,1/2)\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A_0 \supset B_0), v\rangle) = 1 \text{ (допущение).}$$

(4) Неверно, что для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $\mathrm{L}_\supset$-матрице

$$M(1,0,0,1/2)\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B_0, v\rangle) = 1 \text{ (допущение).}$$

(5) Существует такая оценка v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$, что

$$\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B_0, v\rangle) \neq 1 \text{ (из (4)).}$$

Пусть

(6) v_0 есть оценка языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$, $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B_0, v_0\rangle) \neq 1$.

Опираясь на утверждения (2) и (6) и на тот факт, что

$$\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B_0, v_0\rangle) \in \{1, 1/2, 0\},$$

получаем, что

(7) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B_0, v_0\rangle) \in \{1/2, 0\}$.

(8) v_0 есть оценка языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$ (из (6)).

(9) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B_0, v_0\rangle) = 0$ или $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B_0, v_0\rangle) = 1/2$ (из (7)).

(10) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A_0, v_0\rangle) = 1$ и $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle (A_0 \supset B_0), v_0\rangle) = 1$ (из (3) и (8)).

(11) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A_0, v_0\rangle) = 1$ (из (10)).

(12) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle (A_0 \supset B_0), v_0\rangle) = 1$ (из (10)).

(13) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B_0, v_0\rangle) = 0$ (допущение).

В свете утверждений (8), (11), (13), замечания 1, соглашения 1 и того факта, что $M(1,0,0,1/2)$ есть $L_\supset$-матрица, ясно, что

(14) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle (A_0 \supset B_0), v_0 >) = 0$.

(15) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle (A_0 \supset B_0), v_0\rangle) \neq 1$(из (14)).

Утверждение (15) противоречит утверждению (13). Следовательно, неверно допущение (13). Итак,

(16) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B_0, v_0\rangle) \neq 0$.

(17) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B_0, v_0\rangle) = 1/2$ (из (9) и (16)).

(18) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B_0, s[v_0]\rangle) = 0$ (из (2), (8) и (17), по лемме 5).

(19) $s[v_0]$ есть оценка языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$ (из (8), по замечанию 8).

(20) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A_0, s[v_0]\rangle) = 1$ и $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A_0 \supset B_0), s[v_0]\rangle) = 1$ (из (3) и(19)).

(21) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A_0, s[v_0]\rangle) = 1$ (из (20)).

(22) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle (A_0 \supset B_0), s[v_0]\rangle) = 1$ (из (20)).

В свете утверждений (18), (19), (21), замечаний 1 и 3 и соглашения 1 ясно, что

(23) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle (A_0 \supset B_0), s[v_0]\rangle) = 0$.

(24) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle (A_0 \supset B_0), s[v_0]\rangle) \neq 1$ (из (23)).

Утверждение (24) противоречит утверждению (22). Следовательно, неверно допущение (4). Но тогда

(25) Для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$

$$\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B_0, v\rangle){=}1.$$

Снимая допущения (3), (2), (1) и проводя обобщения, завершаем доказательство леммы 6.

Лемма 6 доказана.

Нам потребуется исчисление $HCl_\supset$ гильбертовского типа. Языком этого исчисления является $L_\supset$. Правило modus ponens в $L_\supset$ есть единственное правило исчисления $HCl_\supset$. Аксиомами исчисления $HCl_\supset$ являются все те и только те $L_\supset$-формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих трех видов (здесь A, B и C – $L_\supset$-формулы): (1) $(A \supset (B \supset A))$, (2) $((A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C)))$, (3) $(((A \supset B) \supset A) \supset A)$. Определение $HCl_\supset$-доказательства $L_\supset$-формулы: α есть $HCl_\supset$-доказательство $L_\supset$-формулы A, если существуют такое целое положительное число n и такие $L_\supset$-формулы $A_1, \ldots, A_n$, что α есть n-членная последовательность $L_\supset$-формул, первый член которой есть $A_1, \ldots, n$-ный член которой есть A_n, и выполняются следующие два условия: (I) A_n есть A, (II) для всякого целого положительного числа i, которое $\leq n$, A_i есть аксиома исчисления $HCl_\supset$ или существуют такие целые положительные числа k и l, каждое из которых меньше i, что $\langle A_k, A_l, A_n\rangle$ есть применение правила modus ponens в $L_\supset$.

Опираясь на (Соболев 1979) и на (Черч 1960), можно доказать следующее **утверждение**.

Утверждение 1. *Для всякой $L_\supset$-формулы A: $A \in Cl_\supset$ тогда и только тогда, когда существует $HCl_\supset$-доказательство $L_\supset$-формулы A.*

Легко установить, что верна следующая лемма 7.

Лемма 7. *Для всякой аксиомы A исчисления $HCl_\supset$ и для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A, v\rangle) = 1$.*

Лемма 8. *Для всякого целого положительного числа n и для всяких $L_\supset$-формул $A_1, \ldots, A_n$: если для всякого целого положительного числа i, которое $\leq n$, A_i есть аксиома исчисления $HCl_\supset$ или существуют такие целые положительные числа k и l, каждое из которых меньше i, что $\langle A_k, A_l, A_n\rangle$ есть применение правила modus ponens в $L_\supset$, то для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице*

$$M(1,0,0,1/2)\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A_n, v\rangle) = 1.$$

Стандартное индуктивное доказательство (методом возвратной индукции) леммы 8 проведено с использованием леммы 6 и леммы 7.

Лемма 9. *Для всякой $L_\supset$-формулы A: если существует $HCl_\supset$-доказательство $L_\supset$-формулы A, то для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице*

$$M(1,0,0,1/2)\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A, v\rangle) = 1.$$

Докажем лемму 9.

(1) A_0 есть $L_\supset$-формула (допущение).

(2) Существует $HCl_\supset$-доказательство $L_\supset$-формулы A_0 (допущение).

Пусть

(3) α_0 есть $HCl_\supset$-доказательство $L_\supset$-формулы A_0.

(4) Существуют такое целое положительное число n и такие $L_\supset$-формулы $A_1, \ldots, A_n$, что α_0 есть n-членная последовательность $L_\supset$-формул, первый член которой есть A_1, и …, и n-ный член которой есть A_n, и выполняются следующие два условия: (I) A_n есть A_0, (II) для всякого целого положительного числа i, которое $\leq n$, A_i есть аксиома исчисления $HCl_\supset$ или существуют такие целые положительные числа k и l, каждое из которых меньше i, что $\langle A_k, A_l, A_n\rangle$ есть применение правила modus ponens в $L_\supset$ (из (3), по определению $HCl_\supset$-доказательства $L_\supset$-формулы).

(5) Существуют такое целое положительное число n и такие $L_\supset$-формулы $A_1, \ldots, A_n$, что для всякого целого положительного числа i, которое $\leq n$, A_i есть аксиома исчисления $HCl_\supset$ или существуют такие целые положительные числа k и l, каждое из которых меньше i, что $\langle A_k, A_l, A_n\rangle$ есть применение правила modus ponens в $L_\supset$ (из (4)).

Пусть

(6) m есть целое положительное число, $A'_1, \dots, A'_m$ являются $L_\supset$-формулами, для всякого целого положительного числа i, которое $\leq n$, A_i есть аксиома исчисления $HCl_\supset$ или существуют такие целые положительные числа k и l, каждое из которых меньше i, что $\langle A_k, A_l, A_n \rangle$ есть применение правила modus ponens в $L_\supset$.

(7) Для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$

$$\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A'_m, v \rangle) = 1 \text{ (из (6), по лемме 8).}$$

Снимая допущения (2), (1) и обобщая, завершаем доказательство леммы 9.
Лемма 9 доказана.

Лемма 10. *Для всякой $L_\supset$-формулы A: если $A \in Cl_\supset$, то A есть $L_\supset$-формула, общезначимая в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$.*

Докажем лемму 10.

(1) A_0 есть $L_\supset$-формула (допущение).

(2) $A_0 \in Cl_\supset$ (допущение).

(3) Существует $HCl_\supset$-доказательство $L_\supset$-формулы A_0 (из (1), (2) и **утверждения**).

(4) Для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$

$$\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A_0, v \rangle) = 1 \text{ (из (1) и (3), по лемме 9).}$$

Опираясь на определение 1, на соглашение 6 и на замечание 3, получаем, что

(5) множество $\{1\}$ есть выделенное множество $L_\supset$-матрицы $M(1,0,0,1/2)$.

В свете утверждений (4) и (5) ясно, что

(6) для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$

$$\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A_0, v \rangle)$$

принадлежит выделенному множеству $L_\supset$-матрицы $M(1,0,0,1/2)$.

(7) A_0 есть $L_\supset$-формула, общезначимая в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$ (из (6), по определению 5).

Снимая допущения (2) и (1) и обобщая, завершаем доказательство леммы 10.
Лемма 10 доказана.
Легко установить справедливость следующей леммы 11.

Лемма 11. *Для всякой $L_\supset$-формулы A и для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(Cl_\supset)$ $\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle A, v\rangle) = \varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A, v\rangle)$.*

Лемма 12. *Для всякой $L_\supset$-формулы A: если для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$ $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A, v\rangle) = 1$, то для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(Cl_\supset)$ $\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle A, v\rangle) = 1$.*

Докажем лемму 12.

(1) A_0 есть $L_\supset$-формула (допущение).

(2) Для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$

$$\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A_0, v\rangle) = 1 \text{ (допущение)}$$

(3) Существует такая оценка v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(Cl_\supset)$, что

$$\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle A_0, v\rangle) \neq 1 \text{ (допущение).}$$

Пусть

(4) v_0 есть оценка языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(Cl_\supset)$ и$\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle A_0, v_0\rangle) \neq 1$.

(5) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A_0, v_0\rangle) \neq 1$ (из (1) и (4), по лемме 9).

(6) v_0 есть оценка языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(Cl_\supset)$ (из (4)).

(7) v_0 есть оценка языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$ (из (4) и из того, что всякая оценка языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(Cl_\supset)$ является оценкой языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$).

(8) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A_0, v_0\rangle) = 1$ (из (2) и (7)).

Утверждение (8) противоречит утверждению (5). Следовательно, неверно допущение (3). Но тогда верно, что (9) для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(Cl_\supset)$ $\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle A, v\rangle) = 1$.

Снимая допущения (2), (1) и обобщая, завершаем доказательство леммы 12.

Лемма 12 доказана.

Опираясь на определение 1 и 5, на соглашения 6, 8 и 10, на замечание 3 и на лемму 12, приходим к выводу, что верна следующая лемма 13.

Лемма 13. *Для всякой $L_\supset$-формулы A: если A есть $L_\supset$-формула, общезначимая в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$, то $A \in Cl_\supset$.*

Из лемм 10 и 13 вытекает следующая теорема 1.

Теорема 1. *Для всякой $L_\supset$-формулы A: $A \in Cl_\supset$ тогда и только тогда, когда A есть $L_\supset$-формула, общезначимая в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$.*

Наша ближайшая цель — доказательство того, что не существует унарной операции f на множестве $\{1, 1/2, 0\}$, выполняющей условие: упорядоченная пара $\langle M(1,0,0,1/2), f\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица, адекватная регулярной $L_{\supset\neg}$-логике. Для достижения указанной цели достаточно доказать, что для всякой унарной операции f на множестве $\{1, 1/2, 0\}$ упорядоченная пара $\langle M(1,0,0,1/2), f\rangle$ есть такая $L_{\supset\neg}$-матрица, что множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1,0,0,1/2), f\rangle$, не является регулярной $L_{\supset\neg}$-логикой.

Замечание 9. *Для всяких x, y и z из $\{1, 1/2, 0\}$ существует единственная унарная операция f на $\{1, 1/2, 0\}$, удовлетворяющая условиям: (1) $f(1) = x$, (2) $f(1/2) = y$, (3) $f(0) = z$.*

Соглашение 13. *Обозначаем через $\neg_{(x,y,z)}$ ту самую унарную операцию f на множестве $\{1, 1/2, 0\}$, которая удовлетворяет условиям: (1) $f(1) = x$, (2) $f(1/2) = y$, (3) $f(0) = z$.*

Лемма 14. *Для всякой унарной операции f на множестве $\{1, 1/2, 0\}$: упорядоченная пара $\langle M(1,0,0,1/2), f\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица и при этом верно, что если $f(1) = 1$, то $((p_1 \supset p_1) \supset (\neg(p_1 \supset p_1)))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1,0,0,1/2), f\rangle$.*

Лемма 15. *Для всякой унарной операции f на множестве $\{1, 1/2, 0\}$: упорядоченная пара $\langle M(1,0,0,1/2), f\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица и при этом верно, что если $f(1) = 1/2$, то $((p_1 \supset (\neg(p_1 \supset p_1))) \supset (\neg(p_1 \supset p_1)))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1,0,0,1/2), f\rangle$.*

Лемма 16. *Упорядоченная пара $\langle M(1,0,0,1/2), \neg_{(0,1,1)}\rangle$ есть такая $L_{\supset\neg}$-матрица, что $((p_1 \supset p_1) \supset ((\neg(\neg p_1)) \supset p_1))$ и $(p_1 \supset p_1)$ являются $L_{\supset\neg}$-формулами, общезначимыми в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1,0,0,1/2), \neg_{(0,1,1)}\rangle$, но $((\neg(\neg p_1)) \supset p_1)$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, не являющаяся $L_{\supset\neg}$-формулой, общезначимой в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1,0,0,1/2), \neg_{(0,1,1)}\rangle$.*

Лемма 17. *Упорядоченная пара $\langle M(1,0,0,1/2), \neg_{(0,1,1/2)}\rangle$ есть такая $L_{\supset\neg}$-матрица, что $\neg(\neg(\neg(p_1 \supset p_1)))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице*

$$\langle M(1,0,0,1/2), \neg_{(0,1,1/2)}\rangle.$$

Лемма 18. *Упорядоченная пара $\langle M(1,0,0,1/2), \neg_{(0,1,0)}\rangle$ есть такая $L_{\supset\neg}$-матрица, что $((\neg(\neg(p_1 \supset p_1))) \supset (\neg(p_1 \supset p_1)))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1,0,0,1/2), \neg_{(0,1,0)}\rangle$.*

Лемма 19. *Упорядоченная пара $\langle M(1,0,0,1/2), \neg_{(0,1/2,1)}\rangle$ есть такая $L_{\supset\neg}$-матрица, что $((p_1 \supset p_1) \supset ((p_1 \supset (\neg(p_1 \supset p_1))) \supset (\neg p_1)))$ и $(p_1 \supset p_1)$ являются $L_{\supset\neg}$-формулами, общезначимыми в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1,0,0,1/2), \neg_{(0,1/2,1)}\rangle$, но $((p_1 \supset (\neg(p_1 \supset p_1))) \supset (\neg p_1))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, не являющаяся $L_{\supset\neg}$-формулой, общезначимой в $L_{\supset\neg}$-матрице*

$$\langle M(1,0,0,1/2), \neg_{(0,1/2,1)}\rangle.$$

Лемма 20. *Упорядоченная пара* $\langle M(1,0,0,1/2), \neg_{(0,1/2,1/2)}\rangle$ *есть такая* $L_{\supset\neg}$*-матрица, что* $((p_1 \supset (\neg(\neg(\neg(p_1 \supset p_1))))) \supset (\neg(\neg(\neg(p_1 \supset p_1)))))$ *есть* $L_{\supset\neg}$*-формула, общезначимая в* $L_{\supset\neg}$*-матрице* $\langle M(1,0,0,1/2), \neg_{(0,1/2,1/2)}\rangle$.

Лемма 21. *Упорядоченная пара* $\langle M(1,0,0,1/2), \neg_{(0,1/2,0)}\rangle$ *есть такая* $L_{\supset\neg}$*-матрица, что* $((\neg(\neg(p_1 \supset p_1))) \supset (\neg(p_1 \supset p_1)))$ *есть* $L_{\supset\neg}$*-формула, общезначимая в* $L_{\supset\neg}$*-матрице* $\langle M(1,0,0,1/2), \neg_{(0,1/2,0)}\rangle$.

Лемма 22. *Упорядоченная пара* $\langle M(1,0,0,1/2), \neg_{(0,0,1)}\rangle$ *есть такая* $L_{\supset\neg}$*-матрица, что* $((p_1 \supset p_1) \supset ((\neg(p_1 \supset p_1)) \supset p_1))$ *и* $(p_1 \supset p_1)$ *являются* $L_{\supset\neg}$*-формулами, общезначимыми в* $L_{\supset\neg}$*-матрице* $\langle M(1,0,0,1/2), \neg_{(0,0,1)}\rangle$*, но* $((\neg(p_1 \supset p_1)) \supset p_1)$ *есть* $L_{\supset\neg}$*-формула, не являющаяся* $L_{\supset\neg}$*-формулой, общезначимой в* $L_{\supset\neg}$*-матрице* $\langle M(1,0,0,1/2), \neg_{(0,0,1)}\rangle$.

Лемма 23. *Упорядоченная пара* $\langle M(1,0,0,1/2), \neg_{(0,0,1/2)}\rangle$ *есть такая* $L_{\supset\neg}$*-матрица, что* $((p_1 \supset p_1) \supset (\neg(\neg(p_1 \supset p_1))))$ *и* $(p_1 \supset p_1)$ *являются* $L_{\supset\neg}$*-формулами, общезначимыми в* $L_{\supset\neg}$*-матрице* $\langle M(1,0,0,1/2), \neg_{(0,0,1/2)}\rangle$*, но* $(\neg(\neg(p_1 \supset p_1)))$ *есть* $L_{\supset\neg}$*-формула, не являющаяся* $L_{\supset\neg}$*-формулой, общезначимой в* $L_{\supset\neg}$*-матрице* $\langle M(1,0,0,1/2), \neg_{(0,0,1/2)}\rangle$.

Лемма 24. *Упорядоченная пара*$\langle M(1,0,0,1/2), \neg_{(0,0,0)}\rangle$ *есть такая* $L_{\supset\neg}$*-матрица, что* $((\neg(\neg(p_1 \supset p_1))) \supset (\neg(p_1 \supset p_1)))$ *есть* $L_{\supset\neg}$*-формула, общезначимая в* $L_{\supset\neg}$*-матри-це* $\langle M(1,0,0,1/2), \neg_{(0,0,0)}\rangle$.

Проверка того, что все леммы 14–24 верны, основанная на процедуре построения соответствующих истинностных таблиц, не представляет труда.

Теорема 2. *Для всякой унарной операции* f *на множестве* $\{1, 1/2, 0\}$ *упорядоченная пара* $\langle M(1,0,0,1/2), f\rangle$ *есть такая* $L_{\supset\neg}$*-матрица, что множество всех* $L_{\supset\neg}$*-формул, общезначимых в* $L_{\supset\neg}$*-матрице* $\langle M(1,0,0,1/2), f\rangle$*, не является регулярной* $L_{\supset\neg}$*-логикой.*

Докажем теорему 2.

(1) f_0 есть унарная операция на множестве $\{1, 1/2, 0\}$ (допущение).

Очевидно, что

(2) $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset_{(1,0,0,1/2)}, f_0\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица.

Опираясь на утверждение (2) и тот факт, что

$$\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset_{(1,0,0,1/2)}, f_0\rangle = \langle\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset_{(1,0,0,1/2)}\rangle, f_0\rangle,$$

получаем, что

(3) $\langle\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset_{(1,0,0,1/2)}\rangle, f_0\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица.

(4) $\langle M(1,0,0,1/2), f_0\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица (из (3), по соглашению 6).

Принимая во внимание утверждение (1), приходим к выводу, что

(5) $f_0(1) = 1$, или $f_0(1) = 1/2$, или $f_0(1) = 0$.

(6) $f_0(1) = 1$ (допущение).

(7) $((p_1 \supset p_1) \supset (\neg(p_1 \supset p_1)))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице

$$\langle M(1, 0, 0, 1/2), f_0\rangle$$

(из (1) и (6), по лемме 14).

Легко убедиться, что

(8) $((p_1 \supset p_1) \supset (\neg(p_1 \supset p_1)))$ не есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$.

Опираясь на утверждение (8) и соглашение 11, получаем, что

(9) $((p_1 \supset p_1) \supset (\neg(p_1 \supset p_1)))$ не принадлежит множеству $Cl_{\supset\neg}$.

В свете утверждений (7) и (9) ясно, что

(10) множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице

$$\langle M(1, 0, 0, 1/2), f_0\rangle,$$

не включается в $Cl_{\supset\neg}$.

(11) Множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице

$$\langle M(1, 0, 0, 1/2), f_0\rangle,$$

не является регулярной $L_{\supset\neg}$-логикой (из (10), по определению 9).

Снимая допущение (6), получаем, что

(12) если $f_0(1) = 1$, то множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1, 0, 0, 1/2), f_0\rangle$, не является регулярной $L_{\supset\neg}$-логикой.

(13) $f_0(1) = 1/2$ (допущение).

(14) $((p_1 \supset (\neg(p_1 \supset p_1))) \supset (\neg(p_1 \supset p_1)))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1, 0, 0, 1/2), f_0\rangle$ (из (1) и (13), по лемме 15).

Легко убедиться, что

(15) $((p_1 \supset (\neg(p_1 \supset p_1))) \supset (\neg(p_1 \supset p_1)))$ не есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$.

Опираясь на утверждение (15) и соглашение 11, получаем, что

(16) $((p_1 \supset (\neg(p_1 \supset p_1))) \supset (\neg(p_1 \supset p_1)))$ не принадлежит множеству $Cl_{\supset\neg}$

В свете утверждений (15) и (16) ясно, что

(17) множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице

$$\langle M(1, 0, 0, 1/2), f_0\rangle,$$

не включается в $Cl_{\supset\neg}$.

(18) Множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице

$$\langle M(1, 0, 0, 1/2), f_0\rangle,$$

не является регулярной $L_{\supset\neg}$-логикой (из (17), по определению 9).

Снимая допущение (13), получаем, что

(19) если $f_0(1) = 1/2$, то множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1, 0, 0, 1/2), f_0\rangle$, не является регулярной $L_{\supset\neg}$-логикой.

(20) $f_0(1) = 0$ (допущение).

Принимая во внимание утверждения (1) и (20), замечание 9 и соглашение 13, приходим к выводу, что

(21) $f_0 = \neg_{(0,1,1)}$, или $f_0 = \neg_{(0,1,1/2)}$, или $f_0 = \neg_{(0,1,0)}$, или $f_0 = \neg_{(0,1/2,1)}$, или $f_0 = \neg_{(0,1/2,1/2)}$, или $f_0 = \neg_{(0,1/2,0)}$, или $f_0 = \neg_{(0,0,1)}$, или $f_0 = \neg_{(0,0,1/2)}$, или $f_0 = \neg_{(0,0,0)}$.

Верны следующие утверждения (22)–(30).

(22) Если $f_0 = \neg_{(0,1,1)}$, то множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1, 0, 0, 1/2), f_0\rangle$, не является регулярной $L_{\supset\neg}$-логикой.

(23) Если $f_0 = \neg_{(0,1,1/2)}$, то множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1, 0, 0, 1/2), f_0\rangle$, не является регулярной $L_{\supset\neg}$-логикой.

(24) Если $f_0 = \neg_{(0,1,0)}$, то множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1, 0, 0, 1/2), f_0\rangle$, не является регулярной $L_{\supset\neg}$-логикой.

(25) Если $f_0 = \neg_{(0,1/2,1)}$, то множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1, 0, 0, 1/2), f_0\rangle$, не является регулярной $L_{\supset\neg}$-логикой.

(26) Если $f_0 = \neg_{(0,1/2,1/2)}$, то множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1, 0, 0, 1/2), f_0\rangle$, не является регулярной $L_{\supset\neg}$-логикой.

(27) Если $f_0 = \neg_{(0,1/2,0)}$, то множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1, 0, 0, 1/2), f_0\rangle$, не является регулярной $L_{\supset\neg}$-логикой.

(28) Если $f_0 = \neg_{(0,0,1)}$, то множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1,0,0,1/2), f_0\rangle$, не является регулярной $L_{\supset\neg}$-логикой.

(29) Если $f_0 = \neg_{(0,0,1/2)}$, то множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1,0,0,1/2), f_0\rangle$, не является регулярной $L_{\supset\neg}$-логикой.

(30) Если $f_0 = \neg_{(0,0,0)}$, то множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1,0,0,1/2), f_0\rangle$, не является регулярной $L_{\supset\neg}$-логикой.

Докажем утверждение (22).

(22.1) $f_0 = \neg_{(0,1,1)}$ (допущение).

Ввиду утверждения (22.1) и леммы 16 имеем, что

(22.2) $((p_1 \supset p_1) \supset ((\neg(\neg p_1)) \supset p_1))$ и $(p_1 \supset p_1)$ являются $L_{\supset\neg}$-формулами, общезначимыми в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1,0,0,1/2), f_0\rangle$, но $((\neg(\neg p_1)) \supset p_1)$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, не являющаяся $L_{\supset\neg}$-формулой, общезначимой в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1,0,0,1/2), f_0\rangle$.

Опираясь на утверждение (22.2), получаем, что

(22.3) множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице

$$\langle M(1,0,0,1/2), f_0\rangle,$$

не замкнуто относительно правила modus ponens в $L_{\supset\neg}$.

(22.4) Множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице

$$\langle M(1,0,0,1/2), f_0\rangle,$$

не является $L_{\supset\neg}$-логикой (из (22.3), по определению $L_{\supset\neg}$-логики).

(22.5) Множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице

$$\langle M(1,0,0,1/2), f_0\rangle,$$

не является регулярной $L_{\supset\neg}$-логикой (из (22.4), по определению 9).

Снимая допущение (22.1), завершаем доказательство утверждения (22).

Утверждение (22) доказано.

Опираясь на леммы 19, 22 и 23, легко построить доказательства утверждений (25), (28) и (29), аналогичные данному выше и опирающемуся на лемму 16 доказательству утверждения (22).

Докажем утверждение (23).

(23.1) $f_0 = \neg_{(0,1,1/2)}$ (допущение).

Ввиду утверждения (23. 1) и леммы 17 имеем, что

(23.2) $(\neg(\neg(\neg(p_1 \supset p_1))))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице

$$\langle M(1,0,0,1/2), f_0\rangle.$$

Легко убедиться, что

(23.3) $(\neg(\neg(\neg(p_1 \supset p_1))))$ не есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$.

Опираясь на утверждение (23.3) и на соглашение 11, получаем, что

(23.4) $(\neg(\neg(\neg(p_1 \supset p_1))))$ не принадлежит множеству $Cl_{\supset\neg}$.

В свете утверждений (23.2) и (23.4) ясно, что

(23.5) множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице

$$\langle M(1,0,0,1/2), f_0\rangle,$$

не включается в $Cl_{\supset\neg}$.

(23.6) Множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице

$$\langle M(1,0,0,1/2), f_0\rangle,$$

не является регулярной $L_{\supset\neg}$-логикой (из (23.5), по определению 9).

Снимая допущение (23.1), завершаем доказательство утверждения (23).

Утверждение (23) доказано.

Опираясь на леммы 18, 20, 21 и 24, легко построить доказательства утверждений (24), (26), (27) и (30), аналогичные данному выше и опирающемуся на лемму 17 доказательству утверждения (23).

(31) Множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице

$$\langle M(1,0,0,1/2), f_0\rangle,$$

не является регулярной $L_{\supset\neg}$-логикой (из утверждений (21)–(30)).

В свете утверждения (31) ясно, что

(32) упорядоченная пара $\langle M(1,0,0,1/2), f\rangle$ есть такая $L_{\supset\neg}$-матрица, что множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице

$$\langle M(1,0,0,1/2), f\rangle,$$

не является регулярной $L_{\supset\neg}$-логикой.

Снимая допущение (1) и обобщая, завершаем доказательство теоремы 2.

Теорема 2 доказана.

Итак, доказано, что не существует такой унарной операции f на множестве $\{1, 1/2, 0\}$, что упорядоченная пара $\langle M(1, 0, 0, 1/2), f\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица, адекватная регулярной $L_{\supset\neg}$-логике.

Теперь докажем, что для всякого целого положительного числа n существует $(n + 3)$-значная $L_{\supset}$-матрица K с единственным выделенным значением, адекватная классической импликативной логике и удовлетворяющая условию: для всякой унарной операции f на носителе этой $L_{\supset}$-матрицы упорядоченная пара $\langle K, f\rangle$ есть такая $L_{\supset\neg}$-матрица, что множество всех общезначимых в $\langle K, f\rangle$ формул не является логикой $Cl_{\supset\neg}$.

Соглашение 14. *Обозначаем через $\supset_{\langle n\rangle}$ бинарную операцию на $\{1, 2, \ldots, n, n+1, 1/2, 0\}$ (n есть целое положительное число), определяемую следующей таблицей*

$\supset_{\langle n\rangle}$	1	2	...	n	$n+1$	1/2	0
1	1	1	...	1	1	1	0
2	1	1	...	1	1	1	0
.			.				
.			.				
.			.				
n	1	1	...	1	1	1	0
$n+1$	1	1	...	1	1	1	0
1/2	1	1	...	1	1	1	0
0	1	1	...	1	1	1/2	1

Можно доказать, что для всякого целого положительного числа n существует единственная упорядоченная тройка с первым членом $\{1, 2, \ldots, n, n+1, 1/2, 0\}$, со вторым членом $\{1\}$ и с третьим членом $\supset_{\langle n\rangle}$.

Соглашение 15. *Упорядоченную тройку $\langle\{1, 2, \ldots, n, n + 1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset_{\langle n\rangle}\rangle$, где n есть целое положительное число,обозначаем через $M_{\langle n\rangle}$.*

Очевидна справедливость следующего замечания 9.

Замечание 10. *Для всякого целого положительного числа n $M_{\langle n\rangle}$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица.*

Соглашение 16. *Определяемое таблицей*

r	0	1/2	1	2	3	...
	0	1/2	1	1	1	...

отображение множества $\{0, 1/2, 1, 2, 3, \ldots\}$ на множество $\{1, 1/2, 0\}$ обозначаем через r.

Определение 12. *Называем r-преобразованием упорядоченной пары, первый член q которой есть пропозициональная переменная языка $L_\supset$ и второй член x которой есть элемент множества $\{0, 1/2, 1, 2, 3, \dots\}$, упорядоченную пару, первый член которой есть q и второй член которой есть $r(x)$.*

Определение 13. *Называем r-преобразованием отображения v множества всех пропозициональных переменных языка $L_\supset$ в $\{0, 1/2, 1, 2, 3, \dots\}$ множество всех таких упорядоченных пар, каждая из которых есть r-преобразование упорядоченной пары из v.*

Замечание 11. *Доказано, что для всякого отображения множества всех пропозициональных переменных языка $L_\supset$ в $\{0, 1/2, 1, 2, 3, \dots\}$ существует единственное r-преобразование этого отображения множества всех пропозициональных переменных языка $L_\supset$ в $\{0, 1/2, 1, 2, 3, \dots\}$.*

Соглашение 17. *Обозначаем r-преобразование отображения v множества всех пропозициональных переменных языка $L_\supset$ в $\{0, 1/2, 1, 2, 3, \dots\}$ через $r[v]$.*

Замечание 12. *Для всякого целого положительного числа n и для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M_{\langle n\rangle}$ $r[v]$ есть оценка языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1, 0, 0, 1/2)$.*

Лемма 25. *Для всякой $L_\supset$-формулы A, для всякого целого положительного числа n и для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1, 0, 0, 1/2)$*

$$\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A, v\rangle) = \varphi_{M_{\langle n\rangle}}(\langle A, v\rangle).$$

Доказательство леммы 25 проведено индукцией по построению $L_\supset$-формулы.

Лемма 26. *Для всякой $L_\supset$-формулы A, для всякого целого положительного числа n и для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M_{\langle n\rangle}$*

$$r(\varphi_{M_{\langle n\rangle}}(\langle A, v\rangle)) = \varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A, r[v]\rangle).$$

Доказательство леммы 26 проведено индукцией по построению $L_\supset$-формулы.

В свете табличного определения бинарной операции $\supset_{\langle n\rangle}$ на $\{1, 2, \dots, n, n + 1, 1/2, 0\}$ (n есть целое положительное число) очевидна справедливость следующей леммы 27.

Лемма 27. *Для всякой $L_\supset$-формулы A, для всякого целого положительного числа n и для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M_{\langle n\rangle}$: если A не есть пропозициональная переменная языка $L_\supset$, то $\varphi_{M_{\langle n\rangle}}(\langle A, v\rangle) \in \{1, 1/2, 0\}$.*

Лемма 28. *Для всякой $L_\supset$-формулы A, для всякого целого положительного числа n: если существует такая оценка v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M_{\langle n\rangle}$, что $\varphi_{M_{\langle n\rangle}}(\langle A, v\rangle) \neq 1$, то существует такая оценка v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M_{\langle n\rangle}$, что $\varphi_{M_{\langle n\rangle}}(\langle A, v\rangle)$ не принадлежит множеству $\{1, 2, 3, \dots\}$.*

Доказательство леммы 28 проведено с использованием леммы 27.

Лемма 29. *Для всякой $L_\supset$-формулы A и для всякого целого положительного числа n: для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M_{\langle n\rangle}$ $\varphi_{M_{\langle n\rangle}}(\langle A, v\rangle) = 1$ тогда и только тогда, когда для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$ $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A, v\rangle) = 1$.*

Доказательство леммы 29 проводим от противного.

(1) Неверна лемма 29 (допущение).

(2) Существует $L_\supset$-формула A и существует целое положительное число n: (для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M_{\langle n\rangle}$ $\varphi_{M_{\langle n\rangle}}(\langle A, v\rangle) = 1$ и существует такая оценка v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$, что $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A, v\rangle) \neq 1$) или (для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$ $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A, v\rangle) = 1$ и существует такая оценка v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M_{\langle n\rangle}$, что $\varphi_{M_{\langle n\rangle}}(\langle A, v\rangle) \neq 1$) (из (1)).

Пусть

(3) A' есть $L_\supset$-формула, n' есть целое положительное число, (для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M_{\langle n'\rangle}$

$$\varphi_{M_{\langle n'\rangle}}(\langle A', v\rangle) = 1$$

и существует такая оценка v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$, что $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A', v\rangle) \neq 1$) или (для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$

$$\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A', v\rangle) = 1$$

и существует такая оценка v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M_{\langle n'\rangle}$, что

$$\varphi_{M_{\langle n'\rangle}}(\langle A', v\rangle) \neq 1).$$

(4) A' есть $L_\supset$-формула (из (3)).

(5) n' есть целое положительное число (из (3)).

(6) (Для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M_{\langle n'\rangle}$ $\varphi_{M_{\langle n'\rangle}}(\langle A', v\rangle) = 1$ и существует такая оценка v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$, что $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A', v\rangle) \neq 1$) или (для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$ $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A', v\rangle) = 1$ и существует такая оценка v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M_{\langle n'\rangle}$, что $\varphi_{M_{\langle n'\rangle}}(\langle A', v\rangle) \neq 1$) (из (3)).

(7) Для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M_{\langle n'\rangle}$ $\varphi_{M_{\langle n'\rangle}}(\langle A', v\rangle) = 1$ и существует такая оценка v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$, что $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A', v\rangle) \neq 1$ (допущение).

(8) Для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M_{\langle n'\rangle}$ $\varphi_{M_{\langle n'\rangle}}(\langle A', v\rangle) = 1$ (из (7)).

(9) Существует такая оценка v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$, что

$$\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A', v\rangle) \neq 1 \text{ (из (7))}.$$

Пусть

(10) v' есть оценка языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$ и

$$\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A', v'\rangle) \neq 1.$$

(11) v' есть оценка языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$ (из (10)).

(12) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A', v'\rangle) \neq 1$ (из (10)).

(13) $\varphi_{M_{\langle n'\rangle}}(\langle A', v'\rangle) = \varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A', v'\rangle)$ (из (4) и (11), по лемме 25).

(14) $\varphi_{M_{\langle n'\rangle}}(\langle A', v'\rangle) \neq 1$ (из (12) и (13)).

(15) v' есть оценка языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M_{\langle n'\rangle}$ (из (11) и того, что всякая оценка языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$ является оценкой языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M_{\langle n'\rangle}$).

(16) $\varphi_{M_{\langle n'\rangle}}(\langle A', v'\rangle) = 1$ (из (8) и (15)).

Утверждение (16) противоречит утверждению (14). Следовательно, неверно допущение (7). Опираясь на утверждение (6) и учитывая, что неверно допущение (7), получаем, что

(17) для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$

$$\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A', v\rangle) = 1$$

и существует такая оценка v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M_{\langle n'\rangle}$, что

$$\varphi_{M_{\langle n'\rangle}}(\langle A', v\rangle) \neq 1.$$

(18) Для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1/2)$

$$\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A', v\rangle) = 1 \text{ (из (17))}.$$

(19) Существует такая оценка v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M_{\langle n'\rangle}$, что

$$\varphi_{M_{\langle n'\rangle}}(\langle A', v\rangle) \neq 1 \text{ (из (17))}.$$

(20) Существует такая оценка v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M_{\langle n'\rangle}$, что $\varphi_{M_{\langle n'\rangle}}(\langle A', v\rangle)$ не принадлежит множеству $\{1,2,3,\dots\}$ (из (4), (5), (19), по лемме 28).

Пусть

(21) v' есть оценка языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице $M_{\langle n' \rangle}$ и $\varphi_{M_{\langle n' \rangle}}(\langle A', v' \rangle)$ не принадлежит множеству $\{1, 2, 3, \dots\}$.

(22) v' есть оценка языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице $M_{\langle n' \rangle}$ (из (21)).

(23) $\varphi_{M_{\langle n' \rangle}}(\langle A', v' \rangle)$ не принадлежит множеству $\{1, 2, 3, \dots\}$ (из (21)).

(24) $r(\varphi_{M_{\langle n' \rangle}}(\langle A', v' \rangle)) = \varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A', r(v') \rangle)$ (из (4), (5), (22), по лемме 26).

Ясно, что

(25) $\varphi_{M_{\langle n' \rangle}}(\langle A', v' \rangle) \in \{0, 1/2, 1, 2, 3, \dots\}$.

(26) $\varphi_{M_{\langle n' \rangle}}(\langle A', v' \rangle) \in \{0, 1/2\}$ (из (23) и (25)).

Опираясь на утверждение (26) и на соглашение 16, получаем, что

(27) $r(\varphi_{M_{\langle n' \rangle}}(\langle A', v' \rangle)) \neq 1$.

(28) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A', r(v') \rangle) \neq 1$ (из (24) и (27)).

(29) $r[v']$ есть оценка языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице $M(1, 0, 0, 1/2)$ (из (22), по замечанию 12).

(30) $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(< \langle A', r(v') \rangle) = 1$ (из (19) и (29)).

Утверждение (30) противоречит утверждению (28). Следовательно, неверно допущение (1).

Лемма 29 доказана.

Опираясь на теорему 1, лемму 29, определение 5 и замечание 9, делаем вывод о том, что верна следующая теорема 3.

Теорема 3. *Для всякой $L_{\supset}$-формулы A и для всякого целого положительного числа n: $A \in Cl_{\supset}$ тогда и только тогда, когда A есть $L_{\supset}$-формула, общезначимая в $L_{\supset}$-матрице $M_{\langle n \rangle}$.*

Теорема 4. *Для всякого целого положительного числа n и для всякой унарной операции f на множестве $\{1, 2, \dots, n, n+1, 1/2, 0\}$ упорядоченная пара $\langle M_{\langle n \rangle}, f \rangle$ есть такая $L_{\supset\neg}$-матрица, что множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M_{\langle n \rangle}, f \rangle$, не является $L_{\supset\neg}$-логикой $Cl_{\supset\neg}$.*

Докажем теорему 4.

(1) m есть целое положительное число (допущение).

(2) f' есть унарная операция на множестве $\{1, 2, \dots, n, n + 1, 1/2, 0\}$ (допущение).

Очевидно, что

(3) $\langle \{1, 2, \dots, n, n + 1, 1/2, 0\}, \supset_{\langle m \rangle}, f' \rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица.

Опираясь на утверждение (3) и на тот факт, что

$$\langle\{1, 2, \ldots, n, n+1, 1/2, 0\}, \supset_{\langle m\rangle}, f'\rangle = \langle\langle\{1, 2, \ldots, n, n+1, 1/2, 0\}, \supset_{\langle m\rangle}\rangle, f'\rangle,$$

получаем, что

(4) $\langle\langle\{1, 2, \ldots, n, n+1, 1/2, 0\}, \supset_{\langle m\rangle}\rangle, f'\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица.

(5) $\langle M_{\langle m\rangle}, f'\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица (из (4), по соглашению 15).

Принимая во внимание утверждение (2), приходим к выводу, что

(6) $f'(1) \in \{1, 2, \ldots, m, m+1\}$ или $f'(1) \in \{1/2, 0\}$.

Легко проверить, что верны следующие утверждения (7), (8), (9) и (10).

(7) Если $f'(1) \in \{1, 2, \ldots, m, m+1\}$, то $((p_1 \supset p_1) \supset (\neg(p_1 \supset p_1)))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M_{\langle m\rangle}, f'\rangle$.

(8) Если $f'(1) \in \{1/2, 0\}$, то $((\neg(p_1 \supset p_1)) \supset p_1)$ не есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M_{\langle m\rangle}, f'\rangle$.

(9) $((p_1 \supset p_1) \supset (\neg(p_1 \supset p_1)))$ не есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$.

(10) $((\neg(p_1 \supset p_1)) \supset p_1)$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$.

(11) $((p_1 \supset p_1) \supset (\neg(p_1 \supset p_1)))$ не принадлежит множеству $Cl_{\supset\neg}$ (из (9), по соглашению 11).

(12) $((\neg(p_1 \supset p_1)) \supset p_1)$ принадлежит множеству $Cl_{\supset\neg}$ (из (10), по соглашению 11).

В свете утверждений (7) и (11) ясно, что

(13) если $f'(1) \in \{1, 2, \ldots, m, m+1\}$, то множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M_{\langle m\rangle}, f'\rangle$ не равно $Cl_{\supset\neg}$.

В свете утверждений (8) и (12) ясно, что

(14) если $f'(1) \in \{1/2, 0\}$, то множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M_{\langle m\rangle}, f'\rangle$ не равно $Cl_{\supset\neg}$.

Опираясь на утверждения (6), (13), (14) и на замечание 5, получаем, что

(15) множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M_{\langle m\rangle}, f'\rangle$ не является $L_{\supset\neg}$-логикой $Cl_{\supset\neg}$.

Итак,

(16) $\langle M_{\langle m\rangle}, f'\rangle$ есть такая $L_{\supset\neg}$-матрица, что множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M_{\langle m\rangle}, f'\rangle$ не является $L_{\supset\neg}$-логикой $Cl_{\supset\neg}$.

Снимая допущения (2) и (4) и обобщая, завершаем доказательство теоремы 4.

Теорема 4 доказана.

Итак, найдена трехзначная логическая матрица $M(1,0,0,1/2)$ с одним выделенным значением, которая адекватна классической импликативной логике, но которая не может быть расширена до логической матрицы, адекватной классической импликативно-негативной логике (не может быть расширена в том смысле, что не существует такой унарной операции f, что упорядоченная пара $\langle M(1,0,0,1/2), f\rangle$ является логической матрицей, адекватной классической импликативно-негативной логике). Более того, не существует такой унарной операции f, что упорядоченная пара $\langle M(1,0,0,1/2), f\rangle$ является логической матрицей, адекватной регулярной $L_{\supset\neg}$-логике. Доказано также, что для всякого целого положительного числа n существует такая $(n+3)$-значная логическая матрица K с одним выделенным значением, адекватная классической импликативной логике, что для всякой унарной операции f на носителе этой логической матрицы упорядоченная пара $\langle K, f\rangle$ есть логическая матрица, не являющаяся логической матрицей, адекватной классической импликативно-негативной логике. Завершаем статью анонсом двух следующих результатов: (i) всякая адекватная классической импликативной логике трехзначная логическая матрица K с единственным выделенным значением, для которой не существует такой унарной операции f, что $\langle K, f\rangle$ является логической матрицей, адекватной классической импликативно-негативной логике, изоморфна логической матрице $M(1,0,0,1/2)$, (ii) $M(1/2,1,0,1/2)$ есть единственная логическая матрица, которая отлична от $M(1,0,0,1/2)$ и выполняет условия: (а) носитель логической матрицы $M(1/2,1,0,1/2)$ есть $\{1,1/2,0\}$, (б) выделенное множество логической матрицы $M(1/2,1,0,1/2)$ есть $\{1\}$, (в) логическая матрица $M(1/2,1,0,1/2)$ адекватна классической импликативной логике, (г) не существует такой унарной операции f, что упорядоченная пара $\langle M(1/2,1,0,1/2), f\rangle$ является логической матрицей, адекватной классической импликативно-негативной логике.

Литература

Соболев 1979 — *Соболев С. К.* Импликативное пропозициональное исчисление // Математическая энциклопедия : Гл. ред. И. М. Виноградов. Т. 2: Д — Коо. М.: Советская энциклопедия, 1979. С. 523.

Черч 1960 — *Черч А.* Введение в математическую логику. Т. 1. М.: Издательство иностранной литературы, 1960.