DOI: 10.52119/LPHS.2019.28.97.005

Владимир Попов[1]

ТРЕХЗНАЧНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ МАТРИЦЫ С ОДНИМ ВЫДЕЛЕННЫМ ЗНАЧЕНИЕМ, АДЕКВАТНЫЕ КЛАССИЧЕСКОЙ ИМПЛИКАТИВНОЙ ЛОГИКЕ[2]

Аннотация. Предлагаемая работа относится к исследованиям многозначных характеризаций классической импликативной логики. Здесь заданы девять трехзначных логических матриц, каждая из которых имеет одно выделенное значение и адекватна классической импликативной логике $Cl_{\supset}$. Множество всех этих логических матриц названо три-один-комплектом. В статье доказано, что для всякой логической матрицы $\mathcal{K}$, носитель которой есть $\{1, 1/2, 0\}$ и выделенное множество которой есть $\{1\}$, верно следующее: $\mathcal{K}$ является логической матрицей, адекватной логике $Cl_{\supset}$, тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}$ принадлежит три-один-комплекту. Здесь доказано также, что для всякой трехзначной логической матрицы $\mathcal{K}$ с одним выделенным значением верно следующее: $\mathcal{K}$ адекватна логике $Cl_{\supset}$ тогда и только тогда, когда существует логическая матрица из три-один-комплекта, изоморфная $\mathcal{K}$. В статье построены все множества, каждое множество X из которых выполняет следующие два условия: (1) X является множеством попарно неизоморфных логических матриц, адекватных логике $Cl_{\supset}$ и имеющих вид $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g\rangle$ (где g есть бинарная операция на $\{1, 1/2, 0\}$), и (2) для всякой трехзначной логической матрицы $\mathcal{K}$ с одним выделенным значением, адекватной логике $Cl_{\supset}$, существует логическая матрица из X, изоморфная $\mathcal{K}$.

Ключевые слова: трехзначная логическая матрица с одним выделенным значением, классическая импликативная логика, логическая матрица, адекватная пропозициональной логике L, изоморфизм логических матриц.

Vladimir Popov

THREE-VALUED LOGICAL MATRICES WITH ONE DESIGNATED VALUE, ADEQUATE TO CLASSICAL IMPLICATIVE LOGIC

Abstract. The proposed work relates to the study of multivalued characterizations of classical implicative logic. Nine three-valued logical matrices are presented, each of which has one designated value and is adequate to classical implicative logic $Cl_{\supset}$. The set of all these logical matrices we call the three-one-complete set. In this article it is proved that for every logical matrix $\mathcal{K}$ whose carrier is $\{1, 1/2, 0\}$ and whose designated set is $\{1\}$, the following is true: $\mathcal{K}$ is a logical matrix adequate to $Cl_{\supset}$ if and only if $\mathcal{K}$ belongs to the three-one-complete set. Here it is proved that for every three-valued logical matrix $\mathcal{K}$ with one designated value the following is true: $\mathcal{K}$ is adequate to $Cl_{\supset}$ if and only if there exists a logical matrix Q from the three-one-complete set such that Q is isomorphic to $\mathcal{K}$. We build all sets X such that X satisfies the following conditions: (1) X is a set of pairwise non-isomorphic logical matrices adequate to the logic $Cl_{\supset}$ and has the form $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g\rangle$

[1] *Попов Владимир Михайлович* — к. филос. н., доцент кафедры логики философского факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.
Vladimir Popov, PhD, associate professor, Dept. of Logic, Lomonosov Moscow State University.
pphiloslog@mail.ru

[2] Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 19-011-00536А.

(where g is a binary operation on $\{1, 1/2, 0\}$), and (2) for any three-valued logical matrix $\mathcal{K}$ with one designated value, adequate to the logic $Cl_{\supset}$, there is a logical matrix Q from X such that Q is isomorphic to K.

Keywords: three-valued logical matrix with one selected value, the classical implicative logic, logical matrix, adequate propositional logic L, isomorphism of logical matrices.

Нам потребуется стандартной определяемый пропозициональный язык $L_{\supset}$, алфавит которого есть множество $\{\supset,), (, p_1, p_2, p_3, \dots\}$ символов, где $\supset$ является бинарной логической связкой языка $L_{\supset}$,) и (являются техническими символами языка $L_{\supset}$, а $p_1, p_2, p_3, \dots$ являются пропозициональными переменными языка $L_{\supset}$. Определение формулы в $L_{\supset}$ ($L_{\supset}$-формулы) обычно.

Определение 1. *Называем $L_{\supset}$-логикой множество $L_{\supset}$-формул, замкнутое относительно правила modus ponens в $L_{\supset}$ и относительно правила пропозициональной подстановки в $L_{\supset}$.*

Определение 2. *Называем $L_{\supset}$-матрицей упорядоченную тройку $\langle M, N, g\rangle$, где M есть непустое множество, N есть подмножество множества M, g есть бинарная операция на M; при этом M называем носителем $L_{\supset}$-матрицы $\langle M, N, g\rangle$, N называем выделенным множеством $L_{\supset}$-матрицы $\langle M, N, g\rangle$, любой элемент из N называем выделенным значением $L_{\supset}$-матрицы $\langle M, N, g\rangle$, g называем операцией $L_{\supset}$-матрицы $\langle M, N, g\rangle$.*

Определение 3. *Называем трехзначной $L_{\supset}$-матрицей $L_{\supset}$-матрицу, носитель которой является трехэлементным множеством.*

Определение 4. *Называем $L_{\supset}$-матрицей с одним выделенным значением $L_{\supset}$-матрицу, выделенное множество которой одноэлементно.*

Определение 5. *Называем трехзначной $L_{\supset}$-матрицей с одним выделенным значением $L_{\supset}$-матрицу, которая является трехзначной $L_{\supset}$-матрицей и $L_{\supset}$-матрицей с одним выделенным значением.*

Определение 6. *Оценкой языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}$ называем отображение множества всех пропозициональных переменных языка $L_{\supset}$ в носитель $L_{\supset}$-матрицы $\mathcal{K}$.*

Замечание 1. *Можно доказать, что для всякой $L_{\supset}$-матрицы $\mathcal{K}$ существует единственное отображение (обозначаем его через $\varphi_{\mathcal{K}}$) множества всех упорядоченных пар, каждая из которых имеет вид $\langle A, w\rangle$ (где A есть $L_{\supset}$-формула и w есть оценка языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}$), в носитель матрицы $\mathcal{K}$, выполняющее следующие два условия: (1) для всякой пропозициональной переенной q языка $L_{\supset}$ и для всякой оценки v языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}$ верно, что $\varphi_{\mathcal{K}}(\langle q, v\rangle) = v(q)$, (2) для всякой $L_{\supset}$-формулы A, для всякой $L_{\supset}$-формулы B и для всякой оценки v языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}$ $\varphi_{\mathcal{K}}(\langle (A{\supset}B), v\rangle) = (\varphi_{\mathcal{K}}(\langle A, v\rangle)\ g\ \varphi_{\mathcal{K}}(\langle B, v\rangle))$, где g есть операция $L_{\supset}$-матрицы $\mathcal{K}$.*

Определение 7. *Говорим, что $L_{\supset}$-формула A общезначима в $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}$, если A есть такая $L_{\supset}$-формула, что для всякой оценки v языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}$ $\varphi_{\mathcal{K}}(\langle A, v\rangle)$ принадлежит выделенному множеству $L_{\supset}$-матрицы $\mathcal{K}$.*

Замечание 2. *Можно доказать, что для всякой $L_{\supset}$-матрицы $\mathcal{K}$ множество всех $L_{\supset}$-формул, общезначимых в $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}$, является $L_{\supset}$-логикой, если это множество замкнуто отсносительно правила modus ponens в $L_{\supset}$.*

Определение 8. *Называем $L_{\supset}$-матрицу $\mathcal{K}$ $L_{\supset}$-матрицей, адекватной $L_{\supset}$-логике L, если для всякой $L_{\supset}$-формулы A верно следующее: A есть $L_{\supset}$-формула, общезначимая в $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}$, тогда и только тогда, когда A принадлежит $L_{\supset}$-логике L.*

Соглашение 1. *Обозначаем через $\supset_{Cl}$ бинарную операцию на $\{0,1\}$, определяемую таблицей*

$\supset_{Cl}$	1	0
1	1	0
0	1	1

Замечание 3. *Для всяких x, y, z и t из $\{1, 1/2, 0\}$ существует единственная бинарная операция g на $\{1, 1/2, 0\}$, определяемая таблицей*

g	1	1/2	0
1	1	x	y
1/2	1	1	z
0	1	t	1

Соглашение 2. *Обозначаем через $\supset_{(x,y,z,t)}$ бинарную операцию на $\{1, 1/2, 0\}$, определяемую таблицей*

$\supset_{(x,y,z,t)}$	1	1/2	0
1	1	x	y
1/2	1	1	z
0	1	t	1

Соглашение 3. *Обозначаем через $M(Cl_{\supset})$ упорядоченную тройку*

$$\langle\{1,0\}, \{1\}, \supset_{Cl}\rangle.$$

Соглашение 4. *Обозначаем через $M(x, y, z, t)$ упорядоченную тройку*

$$\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset_{(x,y,z,t)}\rangle.$$

Замечание 4. *Упорядоченная тройка $M(Cl_{\supset})$ и все упорядоченные тройки вида $M(x, y, z, t)$ являются $L_{\supset}$-матрицами.*

Соглашение 5. *Обозначаем через $Cl_{\supset}$ множество всех $L_{\supset}$-формул, общезначимых в $L_{\supset}$-матрице $M(Cl_{\supset})$.*

Убедившись, что $Cl_{\supset}$ есть множество, замкнутое относительно правила modus ponens в $L_{\supset}$, и опираясь на замечание 2, замечание 4 и соглашение 5, приходим к выводу, что справедливо следующее замечание 5.

Замечание 5. *$Cl_{\supset}$ есть $L_{\supset}$-логика.*

Замечание 6. *Следуя традиции, называем $Cl_{\supset}$ классической импликативной логикой в языке $L_{\supset}$.*

Опишем теперь исчисление $HCl_{\supset}$, аксиоматизирующее $L_{\supset}$-логику $Cl_{\supset}$. Исчисление $HCl_{\supset}$ есть исчисление гильбертовского типа. Языком этого исчисления является $L_{\supset}$. Правило nodus ponens в $L_{\supset}$ есть единственное правило исчисления $HCl_{\supset}$. Аксиомами исчисления $HCl_{\supset}$ являются все те и только те $L_{\supset}$-формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих трёх видов (здесь A, B и C – $L_{\supset}$-формулы):

(1) $(A \supset (B \supset A))$

(2) $((A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C)))$

(3) $(((A \supset B) \supset A) \supset A)$

Определение $HCl_{\supset}$-доказательства $L_{\supset}$-формулы: α есть $HCl_{\supset}$-доказательство $L_{\supset}$-формулы A, если существует такое целое положительное число n и такие $L_{\supset}$-формулы $A_1, \dots, A_n$, что α есть n-членная последовательность $L_{\supset}$-формул, первый член которой есть $A_1, \dots, n$-ный член которой есть A_n, и выполняются следующие два условия: (I) A_n есть A, (II) для всякого целого положительного числа i, которое $\leq n$, A_i есть аксиома исчисления $HCl_{\supset}$ или существуют такие целые положительные числа k и l, каждое из которых меньше i, что $\langle A_k, A_l, A_i\rangle$ есть применение правила modus ponens в $L_{\supset}$.

Широко и хорошо известна следующая теорема об аксиоматизируемости $Cl_{\supset}$ посредством $HCl_{\supset}$ (эту теорему можно, например, доказать, опираясь на статью (Соболев 1979) и монографию (Черч 1960)).

Теорема (об аксиоматизируемости $Cl_{\supset}$ посредством $HCl_{\supset}$). *Для всякой $L_{\supset}$-формулы A: $A \in Cl_{\supset}$ тогда и только тогда, когда существует $HCl_{\supset}$-доказательство $L_{\supset}$-формулы A.*

Наша главная цель — дать описание всех $L_{\supset}$-матриц вида $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g\rangle$, каждая из которых адекватна $L_{\supset}$-логике $Cl_{\supset}$.

Лемма 1. *Если $\langle\{a, b, c\}, \{a\}, g\rangle$ есть $L_{\supset}$-матрица, Q есть множество всех $L_{\supset}$-формул, общезначимых в $L_{\supset}$-матрице $\langle\{a, b, c\}, \{a\}, g\rangle$ и $Cl_{\supset} \subseteq Q$, то верно следующее:* (I) *для всякого элемента x множества $\{a, b, c\}$ $(xgx) = a$,* (II) *для всякого элемента x множества $\{a, b, c\}$ $(xga) = a$.*

Докажем лемму 1.

(1) $\langle\{a,b,c\},\{a\},g\rangle$ есть $L_\supset$-матрица, Q есть множество всех $L_\supset$-формул, общезначимых в $L_\supset$-матрице $\langle\{a,b,c\},\{a\},g\rangle$ и $Cl_\supset \subseteq Q$ (допущение).

(2) $\langle\{a,b,c\},\{a\},g\rangle$ есть $L_\supset$-матрица (из (1)).

(3) Q есть множество всех $L_\supset$-формул, общезначимых в $L_\supset$-матрице

$$\langle\{a,b,c\},\{a\},g\rangle \qquad \text{(из (1))}.$$

(4) $Cl_\supset \subseteq Q$ (из (1)).

Можно убедиться, что верны следующие утверждения (5) и (6).

(5) $(p_1 \supset p_1)$ есть $L_\supset$-формула, общезначимая в $L_\supset$-матрице $M(Cl_\supset)$.

(6) $(p_1 \supset (p_1 \supset p_1))$ есть $L_\supset$-формула, общезначимая в $L_\supset$-матрице $M(Cl_\supset)$.

(7) $(p_1 \supset p_1) \in Cl_\supset$ (из (5), по соглашению 5).

(8) $(p_1 \supset (p_1 \supset p_1)) \in Cl_\supset$ (из (6), по соглашению 5).

(9) $(p_1 \supset p_1) \in Q$ (из (4) и (7)).

(10) $(p_1 \supset (p_1 \supset p_1)) \in Q$ (из (4) и (8)).

(11) $(p_1 \supset p_1)$ есть формула, общезначимая в $\langle\{a,b,c\},\{a\},g\rangle$ (из (3) и (9)).

(12) $(p_1 \supset (p_1 \supset p_1))$ есть формула, общезначимая в $\langle\{a,b,c\},\{a\},g\rangle$ (из (3) и (10)).

(13) Существует такой элемент x множества $\{a,b,c\}$, что $(xgx) \neq a$ (допущение).

Пусть

(14) $d \in \{a,b,c\}$ и $(dgd) \neq a$.

(15) $d \in \{a,b,c\}$ (из (14)).

(16) $(dgd) \neq a$ (из (14)).

Ясно, что

(17) Существует такая оценка v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $\langle\{a,b,c\},\{a\},g\rangle$, что $v(p_1) = d$.

Пусть

(18) τ есть оценка языка $L_\supset$ в $\langle\{a,b,c\},\{a\},g\rangle$ и $\tau(p_1) = d$.

(19) τ есть оценка языка $L_\supset$ в $\langle\{a,b,c\},\{a\},g\rangle$ (из (18)).

(20) $\tau(p_1) = d$ (из (18)).

Опираясь на утверждения (2) и (19), на замечание 1 и на тот факт, что p_1 является пропозициональной переменной языка $L_\supset$ и $L_\supset$-формулой, получаем, что

(21) $\varphi_{\langle\{a,b,c\},\{a\},g\rangle}(\langle(p_1 \supset p_1), \tau\rangle) = (\tau(p_1)\ g\ \tau(p_1))$.

(22) $\varphi_{\langle\{a,b,c\},\{a\},g\rangle}(\langle(p_1 \supset p_1), \tau\rangle) = (dgd)$ (из (20) и (21)).

(23) $\varphi_{\langle\{a,b,c\},\{a\},g\rangle}(\langle(p_1 \supset p_1), \tau\rangle) \neq a$ (из (16) и (22)).

Опираясь на утверждения (2) и (11), а также на определения 2 и 7, получаем, что

(24) для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $\langle\{a,b,c\},\{a\},g\rangle$

$$\varphi_{\langle\{a,b,c\},\{a\},g\rangle}(\langle(p_1 \supset p_1), v\rangle) \in \{a\}.$$

(25) $\varphi_{\langle\{a,b,c\},\{a\},g\rangle}(\langle(p_1 \supset p_1), \tau\rangle) \in \{a\}$ (из (19) и (24)).

(26) $\varphi_{\langle\{a,b,c\},\{a\},g\rangle}(\langle(p_1 \supset p_1), \tau\rangle) = a$ (из (25)).

Утверждение (26) противоречит утверждению (23). Следовательно, неверно допущение (13). Но тогда

(27) для всякого x из $\{a,b,c\}$ $(xgx) = a$.

(28) Существует такой элемент x множества $\{a,b,c\}$, что $(xga) \neq a$ (допущение).

Пусть

(29) $t \in \{a,b,c\}$ и $(tga) \neq a$.

(30) $t \in \{a,b,c\}$ (из (29)).

(31) $(tga) \neq a$ (из (29)).

Ясно, что

(32) существует такая оценка v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $\langle\{a,b,c\},\{a\},g\rangle$, что $v(p_1) = t$.

Пусть

(33) θ есть оценка языка $L_\supset$ в $\langle\{a,b,c\},\{a\},g\rangle$ и $\theta(p_1) = t$.

(34) θ есть оценка языка $L_\supset$ в $\langle\{a,b,c\},\{a\},g\rangle$ (из (33)).

(35) $\theta(p_1) = t$ (из (33)).

Опираясь на утверждения (2) и (34), на замечание 1 и на тот факт, что p_1 является пропозициональной переменной языка $L_\supset$ и $L_\supset$-формулой, получаем, что

(36) $\varphi_{\langle\{a,b,c\},\{a\},g\rangle}(\langle(p_1 \supset (p_1 \supset p_1)), \theta\rangle) = (\theta(p_1)\ g\ (\theta(p_1)\ g\ \theta(p_1)))$.

(37) $\varphi_{\langle\{a,b,c\},\{a\},g\rangle}(\langle(p_1 \supset (p_1 \supset p_1)), \theta\rangle) = (t\ g\ (t\ g\ t))$ (из (35) и (36)).

(38) $(tgt) = a$ (из (27) и (30)).

(39) $\varphi_{\langle\{a,b,c\},\{a\},g\rangle}(\langle(p_1 \supset (p_1 \supset p_1)), \theta\rangle) = tga$ (из (37) и (38)).

(40) $\varphi_{\langle\{a,b,c\},\{a\},g\rangle}(\langle(p_1 \supset (p_1 \supset p_1)), \theta\rangle) \neq a$ (из (31) и (39)).

Опираясь на утверждения (2) и (12), а также на определения (2) и (7), получаем, что

(41) $\varphi_{\langle\{a,b,c\},\{a\},g\rangle}(\langle(p_1 \supset (p_1 \supset p_1)), \theta\rangle) \in \{a\}$.

(42) $\varphi_{\langle\{a,b,c\},\{a\},g\rangle}(\langle(p_1 \supset (p_1 \supset p_1)), \theta\rangle) = a$ (из (41)).

Утверждение (42) противоречит утверждению (40). Следовательно, неверно допущение (28). Но тогда

(43) для всякого x из $\{a, b, c\}$ $(xga) = a$.

Опираясь на утверждения (27) и (43), получаем, что

(44) верно следующее: (I) для всякого x из $\{a, b, c\}$ $(xgx) = a$, (II) для всякого x из $\{a, b, c\}$ $(xga) = a$.

Снимая допущение (1), звершаем доказательство леммы 1.

Лемма 1 доказана.

В свете леммы 1 очевидна справедливость следующей леммы 2.

Лемма 2. *Если* $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g\rangle$ *есть* $L_\supset$*-матрица и* $L_\supset$*-логика* $Cl_\supset$ *включается в множество всех* $L_\supset$*-формул, общезначимых в этой* $L_\supset$*-матрице, то верно следующее:* (I) *для всякого элемента* x *множества* $\{1, 1/2, 0\}$ $(xgx) = 1$, (II) *для всякого элемента* x *множества* $\{1, 1/2, 0\}$ $(xg1) = 1$.

Для того чтобы перечислить все $L_\supset$-матрицы вида $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g\rangle$, каждая из которых такова, что множество всех $L_\supset$-формул, общезначимых в этой $L_\supset$-матрице, есть $Cl_\supset$, удобно воспользоваться тем очевидным в свете леммы 2 фактом, что любая такая $L_\supset$-матрица принадлежит множеству всех $L_\supset$-матриц вида $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset_{(x,y,z,t)}\rangle$, где $x, y, z, t \in \{1, 1/2, 0\}$.

Учитывая замечание 3, соглашение 2, соглашение 4 и замечание 4, приходим к выводу, что число всех $L_\supset$-матриц вида $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset_{(x,y,z,t)}\rangle$, где $x, y, z, t \in \{1, 1/2, 0\}$, равно 81 и верна следующая лемма 3.

Лемма 3. *Множество всех $L_\supset$-матриц вида*

$$\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\supset_{(x,y,z,t)}\rangle,$$

где $x,y,z,t\in\{1,1/2,0\}$, равно множеству

$$\{M(1,1,1,1),\quad M(1,1,1,1/2),\quad M(1,1,1,0),\quad M(1,1,1/2,1),\quad M(1,1,1/2,1/2),$$
$$M(1,1,1/2,0),\quad M(1,1,0,1),\quad M(1,1,0,1/2),\quad M(1,1,0,0),\quad M(1,1/2,1,1),$$
$$M(1,1/2,1,1/2),\quad M(1,1/2,1,0),\quad M(1,1/2,1/2,1),\quad M(1,1/2,1/2,1/2),$$
$$M(1,1/2,1/2,0),\quad M(1,1/2,0,1),\quad M(1,1/2,0,1/2),\quad M(1,1/2,0,0),$$
$$M(1,0,1,1),\quad M(1,0,1,1/2),\quad M(1,0,1,0),\quad M(1,0,1/2,1),\quad M(1,0,1/2,1/2),$$
$$M(1,0,1/2,0),\quad M(1,0,0,1),\quad M(1,0,0,1/2),\quad M(1,0,0,0),\quad M(1/2,1,1,1),$$
$$M(1/2,1,1,1/2),\quad M(1/2,1,1,0),\quad M(1/2,1,1/2,1),\quad M(1/2,1,1/2,1/2),$$
$$M(1/2,1,1/2,0),\quad M(1/2,1,0,1),\quad M(1/2,1,0,1/2),\quad M(1/2,1,0,0),$$
$$M(1/2,1/2,1,1),\quad M(1/2,1/2,1,1/2),\quad M(1/2,1/2,1,0),\quad M(1/2,1/2,1/2,1),$$
$$M(1/2,1/2,1/2,1/2),\quad M(1/2,1/2,1/2,0),\quad M(1/2,1/2,0,1),\quad M(1/2,1/2,0,1/2),$$
$$M(1/2,1/2,0,0),\quad M(1/2,0,1,1)\quad M(1/2,0,1,1/2),\quad M(1/2,0,1,0),$$
$$M(1/2,0,1/2,1),\quad M(1/2,0,1/2,1/2),\quad M(1/2,0,1/2,0),\quad M(1/2,0,0,1),$$
$$M(1/2,0,0,1/2),\quad M(1/2,0,0,0),\quad M(0,1,1,1),\quad M(0,1,1,1/2),\quad M(0,1,1,0),$$
$$M(0,1,1/2,1),\quad M(0,1,1/2,1/2),\quad M(0,1,1/2,0),\quad M(0,1,0,1),$$
$$M(0,1,0,1/2),\quad M(0,1,0,0),\quad M(0,1/2,1,1),\quad M(0,1/2,1,1/2),$$
$$M(0,1/2,1,0),\quad M(0,1/2,1/2,1),\quad M(0,1/2,1/2,1/2),\quad M(0,1/2,1/2,0),$$
$$M(0,1/2,0,1),\quad M(0,1/2,0,1/2),\quad M(0,1/2,0,0),\quad M(0,0,1,1),$$
$$M(0,0,1,1/2),\quad M(0,0,1,0),\quad M(0,0,1/2,1),\quad M(0,0,1/2,1/2),\quad M(0,0,1/2,0),$$
$$M(0,0,0,1),\quad M(0,0,0,1/2),\quad M(0,0,0,0)\}.$$

Используя стандартные приемы проверки общезначимости пропозициональных формул в конечных логических матрицах, приходим к выводу о том, что справедливы следующие замечания 7–16.

Замечание 7. *Для всякой $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}$ вида $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\supset_{(1,1,z,t)}\rangle$, где $z,t\in\{1,1/2,0\}$, верно, что $((p_1\supset p_1)\supset p_1)$ есть $L_\supset$-формула, общезначимая в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}$.*

Замечание 8. *Для всякой $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}$ вида $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\supset_{(1,1/2,z,t)}\rangle$, где $z,t\in\{1,1/2,0\}$, верно, что $((p_1\supset p_1)\supset((p_1\supset p_1)\supset p_1))$ есть $L_\supset$-формула, общезначимая в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}$.*

Замечание 9. *Для всякой $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}$ из*

$$\{M(1,0,1,1),M(1,0,1,1/2),M(1,0,1,0),M(1,0,1/2,1),$$
$$M(1,0,1/2,1/2),M(1,0,1/2,0),M(1,0,0,0)\}$$

верно, что $((p_1\supset(p_2\supset p_3))\supset((p_1\supset p_2)\supset(p_1\supset p_3)))$ есть $L_\supset$-формула, не общезначимая в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}$.

Замечание 10. *Для всякой $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}$ из*

$$\{M(1/2,1,1,1), M(1/2,1,1,0), M(1/2,1,1/2,1), M(1/2,1,1/2,1/2), M(1/2,1,1/2,0), M(1/2,1,0,1), M(1/2,1,0,0)\}$$

верно, что $((p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset ((p_1 \supset p_2) \supset (p_1 \supset p_3)))$ есть $L_\supset$-формула, не общезначимая в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}$.

Замечание 11. *Для всякой $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}$ из*

$$\{M(1/2,1/2,1,1/2), M(1/2,1/2,1,0), M(1/2,1/2,1/2,1), M(1/2,1/2,1/2,1/2), M(1/2,1/2,1/2,0), M(1/2,1/2,0,1), M(1/2,1/2,0,1/2), M(1/2,1/2,0,0)\}$$

верно, что $((p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset ((p_1 \supset p_2) \supset (p_1 \supset p_3)))$ есть $L_\supset$-формула, не общезначимая в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}$.

Замечание 12. (а) *Для всякой $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}$ из*

$$\{M(1/2,0,1,0), M(1/2,0,1/2,1), M(1/2,0,1/2,1/2), M(1/2,0,1/2,0), M(1/2,0,0,0)\}$$

верно, что $((p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset ((p_1 \supset p_2) \supset (p_1 \supset p_3)))$ есть $L_\supset$-формула, не общезначимая в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}$.

(б) *Для всякой $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}$ из*

$$\{M(1/2,0,1,1/2), M(1/2,0,0,1)\}$$

верно, что $(((p_1 \supset p_2) \supset p_1) \supset p_1)$ есть $L_\supset$-формула, не общезначимая в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}$.

Замечание 13. *Для всякой $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}$ вида $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\supset_{(0,1,z,t)}\rangle$, где $z,t \in \{1,1/2,0\}$, верно, что $((p_1 \supset p_1) \supset ((p_1 \supset p_1) \supset p_1))$ есть $L_\supset$-формула, общезначимая в $\mathcal{K}$.*

Замечание 14. *Для всякой $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}$ из*

$$\{M(0,1/2,1,1/2), M(0,1/2,1,0), M(0,1/2,1/2,1), M(0,1/2,1/2,1/2), M(0,1/2,1/2,0), M(0,1/2,0,1), M(0,1/2,0,1/2), M(0,1/2,0,0)\}$$

верно, что $(p_1 \supset (p_2 \supset p_1))$ есть $L_\supset$-формула, не общезначимая в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}$.

Замечание 15. (а) *Для всякой $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}$ из $\{M(0,0,1,1/2), M(0,0,1,0)\}$ верно, что $((p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset ((p_1 \supset p_2) \supset (p_1 \supset p_3)))$ есть $L_\supset$-формула, не общезначимая в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}$.*

(б) *Для всякой $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}$ из*

$$\{M(0,0,1/2,1), M(0,0,1/2,1/2), M(0,0,1/2,0), M(0,0,0,1), M(0,0,0,1/2), M(0,0,0,0)\}$$

верно, что $(p_1 \supset (p_2 \supset p_1))$ есть $L_\supset$-формула, не общезначимая в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}$.

Замечание 16. *Для всякой $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}$ из*

$$\{M(1,0,0,1), M(1,0,0,1/2), M(1/2,1/2,1,1),\\ M(1/2,0,1,1), M(1/2,0,0,1/2), M(0,1/2,1,1)\}$$

и для всяких $L_\supset$-формул A, B и C: $(A \supset (B \supset A)), ((A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))), (((A \supset B) \supset A) \supset A)$ являются $L_\supset$-формулами, общезначимыми в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}$.

Следует заметить, что можно сократить число замечаний 7–15 за счет «слияния» некоторых из них. Мы не пошли по этому пути, приводящему к неоправданно громоздким формулировкам замечаний.

Используя метод доказательства от противного, убеждаемся в справедливости следующей леммы 4.

Лемма 4. *Для всякой $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}$ из*

$$\{M(1/2,1/2,1,1), M(1/2,0,1,1), M(1/2,0,0,1/2), M(0,1/2,1,1)\}$$

и для всяких $L_\supset$-формул A и B: если A и $(A \supset B)$ являются $L_\supset$-формулами, общезначимыми в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}$, то B есть $L_\supset$-формула, общезначимая в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}$.

Очевидно, что верна следующая лемма 5.

Лемма 5. *Для всякой $L_\supset$-формулы A, для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1)$: если $\varphi_{M(1,0,0,1)}(\langle A, v\rangle) = 1/2$, то A есть пропозициональная переменная языка $L_\supset$.*

Лемма 6. *Для всякой $L_\supset$-формулы A, для всякой $L_\supset$-формулы B: если A есть $L_\supset$-формула, общезначимая в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1)$ и $(A \supset B)$ есть $L_\supset$-формула, общезначимая в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1)$, то B есть $L_\supset$-формула, общезначимая в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1)$.*

Докажем лемму 6.

(1) A_0 есть $L_\supset$-формула (допущение).

(2) B_0 есть $L_\supset$-формула (допущение).

(3) A_0 есть $L_\supset$-формула, общезначимая в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1)$ и $(A_0 \supset B_0)$ есть $L_\supset$-формула, общезначимая в $M(1,0,0,1)$ (допущение).

(4) A_0 есть $L_\supset$-формула, общезначимая в $L_\supset$-матрице $M(1,0,0,1)$ (из (3)).

(5) $(A_0 \supset B_0)$ есть $L_\supset$-формула, общезначимая в $M(1,0,0,1)$ (из (3)).

Ясно, что

(6) упорядоченная тройка $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\supset_{(1,0,0,1)}\rangle$ есть $L_\supset$-матрица.

(7) $\{1\}$ есть выделенное множество $L_\supset$-матрицы $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset_{(1,0,0,1)}\rangle$ (из (6), по определению 2).

(8) $M(1, 0, 0, 1)$ есть упорядоченная тройка $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset_{(1,0,0,1)}\rangle$ (по соглашению 4).

(9) $\{1\}$ есть выделенное множество $L_\supset$-матрицы $M(1, 0, 0, 1)$ (из (7) и (8)).

(10) Для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1, 0, 0, 1)$

$$\varphi_{M(1,0,0,1)}(\langle A_0, v\rangle) \in \{1\} \qquad \text{(из (4),(6),(8) и (9)).}$$

(11) Для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1, 0, 0, 1)$

$$\varphi_{M(1,0,0,1)}(\langle A_0 \supset B_0, v\rangle) \in \{1\} \qquad \text{(из (5),(6),(8) и (9)).}$$

(12) Для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1, 0, 0, 1)$

$$\varphi_{M(1,0,0,1)}(\langle A_0, v\rangle) = 1 \qquad \text{(из (10)).}$$

(13) Для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1, 0, 0, 1)$

$$\varphi_{M(1,0,0,1)}(\langle A_0 \supset B_0, v\rangle) = 1 \qquad \text{(из (11)).}$$

(14) Существует такая оценка v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1, 0, 0, 1)$

$$\varphi_{M(1,0,0,1)}(\langle B_0, v\rangle) \neq 1 \qquad \text{(допущение).}$$

Пусть

(15) v_0 есть оценка языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1, 0, 0, 1)$, $\varphi_{M(1,0,0,1)}(\langle B_0, v_0\rangle) \neq 1$.

(16) v_0 есть оценка языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1, 0, 0, 1)$ (из (15)).

(17) $\varphi_{M(1,0,0,1)}(\langle B_0, v_0\rangle) \neq 1$ (из (15)).

Очевидно, что

(18) $\varphi_{M(1,0,0,1)}(\langle B_0, v_0\rangle) \in \{1, 1/2, 0\}$.

В свете утверждений (17) и (18), ясно, что

(19) $\varphi_{M(1,0,0,1)}(\langle B_0, v_0\rangle) = 1/2$ или $\varphi_{M(1,0,0,1)}(\langle B_0, v_0\rangle) = 0$.

(20) $\varphi_{M(1,0,0,1)}(\langle B_0, v_0\rangle) = 1/2$ (допущение).

(21) B_0 есть пропозициональная переменная языка $L_\supset$ (из (2), (16), (20), по лемме 5).

Ясно, что

(22) существует единственное отображение множества всех пропозициональных переменных языка $L_{\supset}$ в $\{0\}$.

Условимся, что

(23) w есть отображение множества всех пропозициональных переменных языка $L_{\supset}$ в $\{0\}$.

Очевидно, что

(24) w есть оценка языка $L_{\supset}$ в $M(1,0,0,1)$.

Ясно, что

(25) $\varphi_{M(1,0,0,1)}(\langle B_0, w\rangle) = 0$.

(26) $\varphi_{M(1,0,0,1)}(\langle A_0, w\rangle) = 1$ (из (12) и (24)).

Опираясь на утверждения (1), (2) и (24), на замечание 1 и на тот факт, что $M(1,0,0,1)$ есть $L_{\supset}$-матрица и $\supset_{(1,0,0,1)}$ есть операция этой $L_{\supset}$-матрицы, получаем, что

(27) $\varphi_{M(1,0,0,1)}(\langle (A_0 \supset B_0), w\rangle) = (\varphi_{M(1,0,0,1)}(\langle A_0, w\rangle) \supset_{(1,0,0,1)} \varphi_{M(1,0,0,1)}(\langle B_0, w\rangle))$.

(28) $(\varphi_{M(1,0,0,1)}(\langle A_0, w\rangle) \supset_{(1,0,0,1)} \varphi_{M(1,0,0,1)}(\langle B_0, w\rangle)) = (1 \supset_{(1,0,0,1)} 0)$ (из (25) и (26)).

Руководствуясь табличным определением операции $\supset_{(1,0,0,1)}$, получаем, что

(29) $(1 \supset_{(1,0,0,1)} 0) = 0$.

(30) $\varphi_{M(1,0,0,1)}(\langle (A_0 \supset B_0), w\rangle) = 0$ (из (27), (28), (29)).

(31) $\varphi_{M(1,0,0,1)}(\langle (A_0 \supset B_0), w\rangle) \neq 1$ (из (30)).

(32) Существует такая оценка v языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице $M(1,0,0,1)$, что

$$\varphi_{M(1,0,0,1)}(\langle (A_0 \supset B_0), v\rangle) \neq 1 \qquad \text{(из (24) и (31))}.$$

Утверждение (32) противоречит утверждению (13). Следовательно, неверно допущение (14). Но тогда

(33) $\varphi_{M(1,0,0,1)}(\langle B_0, v_0\rangle) \neq 1/2$.

(34) $\varphi_{M(1,0,0,1)}(\langle B_0, v_0\rangle) = 0$ (из (19) и (33)).

(35) $\varphi_{M(1,0,0,1)}(\langle A_0, v_0\rangle) = 1$ (из (12) и (16)).

Опираясь на утверждения (34) и (35), получаем, что

(36) $(\varphi_{M(1,0,0,1)}(\langle A_0, v_0\rangle) \supset_{(1,0,0,1)} \varphi_{M(1,0,0,1)}(\langle B_0, v_0\rangle)) = (1 \supset_{(1,0,0,1)} 0)$.

Руководствуясь табличным определением $\supset_{(1,0,0,1)}$, получаем, что

(37) $(1 \supset_{(1,0,0,1)} 0) = 0$.

(38) $(\varphi_{M(1,0,0,1)}(\langle A_0, v_0\rangle) \supset_{(1,0,0,1)} \varphi_{M(1,0,0,1)}(\langle B_0, v_0\rangle)) = 0$ (из (36) и (37)).

(39) $\varphi_{M(1,0,0,1)}(\langle (A_0 \supset B_0), v_0\rangle) = 1$ (из (13) и (16)).

Опираясь на утверждения (1), (2), (6), (8), (16), на определение 2 и на замечание 1, получаем, что

(40) $\varphi_{M(1,0,0,1)}(\langle (A_0 \supset B_0), v_0\rangle) = (\varphi_{M(1,0,0,1)}(\langle A_0, v_0\rangle) \supset_{(1,0,0,1)} \varphi_{M(1,0,0,1)}(\langle B_0, v_0\rangle))$.

(41) $(\varphi_{M(1,0,0,1)}(\langle A_0, v_0\rangle) \supset_{(1,0,0,1)} \varphi_{M(1,0,0,1)}(\langle B_0, v_0\rangle)) = 1$ (из (39) и (40)).

(42) $(\varphi_{M(1,0,0,1)}(\langle A_0, v_0\rangle) \supset_{(1,0,0,1)} \varphi_{M(1,0,0,1)}(\langle B_0, v_0\rangle)) \neq 0$ (из (41)).

Утверждение (42) противоречит утверждению (38). Следовательно, неверно допущение (14).

Но тогда

(43) для всякой оценки v языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице $M(1,0,0,1)$

$$\varphi_{M(1,0,0,1)}(\langle B_0, v\rangle) = 1.$$

(44) Для всякой оценки v языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице $M(1,0,0,1)$

$$\varphi_{M(1,0,0,1)}(\langle B_0, v\rangle) \in \{1\} \qquad \text{(из (43))}.$$

Ясно, что

(45) $\{1\}$ есть выделенное множество $L_{\supset}$-матрицы $M(1,0,0,1)$.

(46) B_0 есть $L_{\supset}$-формула, общезначимая в $L_{\supset}$ матрице $M(1,0,0,1)$ (из (44) и (45), по определению 7).

Снимая допущения (3), (2) и (1) и обобщая, завершаем доказательство леммы 6.

Лемма 6 доказана.

В статье В. М. Попова «К проблеме расширения матричной семантики, адекватной классической импликативной логике, до матричной семантики, адекватной классической импликативно-негативной логике» (Попов 2019) доказана следующая лемма (лемма 6 в нумерации, используемой в указанной статье).

Лемма. *Для всякой $L_{\supset}$-формулы A и для всякой $L_{\supset}$-формулы B: если для всякой оценки v языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице $M(1,0,0,1/2)$ $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle A, v\rangle) = 1$ и для всякой оценки языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице $M(1,0,0,1/2)$ $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle (A \supset B), v\rangle) = 1$, то для всякой оценки v языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице $M(1,0,0,1/2)$ $\varphi_{M(1,0,0,1/2)}(\langle B, v\rangle) = 1$.*

Опираясь на эту лемму, на определение 7 и на тот факт, что выделенное множество $L_{\supset}$-матрицы $M(1,0,0,1/2)$ есть $\{1\}$, приходим к выводу, что справедлива следующая лемма 7.

Лемма 7. *Для всякой $L_\supset$-формулы A, для всякой $L_\supset$-формулы B: если A есть $L_\supset$-формула, общезначимая в $M(1,0,0,1/2)$, и $(A \supset B)$ есть $L_\supset$-формула, общезначимая в $M(1,0,0,1/2)$, то B есть $L_\supset$-формула, общезначимая в $M(1,0,0,1/2)$.*

Лемма 8. *Для всякой $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}$ из*

$$\{M(1,0,0,1), M(1,0,0,1/2), M(1/2,1/2,1,1), \\ M(1/2,0,1,1), M(1/2,0,0,1/2), M(0,1/2,1,1)\},$$

для всякого целого положительного числа n и для всяких $L_\supset$-формул $A_1, \ldots, A_n$: если для всякого целого положительного i, которое $\leq n$, A_i есть аксиома исчисления $HCl_\supset$ или существуют такие целые положительные числа k и l, каждое из которых меньше i, что $\langle A_k, A_l, A_n\rangle$ есть применение правила modus ponens в $L_\supset$, то для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}$ $\varphi_{\mathcal{K}}(\langle A_n, v\rangle) = 1$.

Стандартное индуктивное доказательство (методом возвратной индукции) леммы 8 проведено с использованием замечания 16 и лемм 4, 6 и 7.

Опираясь на лемму 8 и определение $HCl_\supset$-доказательства $L_\supset$-формулы, убеждаемся в справедливости следующей леммы 9.

Лемма 9. *Для всякой $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}$ из*

$$\{M(1,0,0,1), M(1,0,0,1/2), M(1/2,1/2,1,1), \\ M(1/2,0,1,1), M(1/2,0,0,1/2), M(0,1/2,1,1)\},$$

и для всякой $L_\supset$-формулы A: если существует $HCl_\supset$-доказательство $L_\supset$-формулы A, то для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}$ $\varphi_{\mathcal{K}}(\langle A, v\rangle) = 1$.

Из леммы 9 и теоремы об аксиоматизируемости $Cl_\supset$ посредством $HCl_\supset$ вытекает в силу определений 2 и 7, соглашения 4 и замечания 4 следующая лемма 10.

Лемма 10. *Для всякой $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}$ из*

$$\{M(1,0,0,1), M(1,0,0,1/2), M(1/2,1/2,1,1), \\ M(1/2,0,1,1), M(1/2,0,0,1/2), M(0,1/2,1,1)\},$$

и для всякой $L_\supset$-формулы A: если $A \in Cl_\supset$, то A общезначима в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}$.

Лемма 11. *Для всякой $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}$, для всякой $L_\supset$-формулы A и для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(Cl_\supset)$: если $\mathcal{K} = M(1,0,0,1)$, или $\mathcal{K} = M(1,0,0,1/2)$, или $\mathcal{K} = M(1/2,0,1,1)$, или $\mathcal{K} = M(1/2,0,0,1/2)$, то $\varphi_{\mathcal{K}}(\langle A, v\rangle) = \varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle A, v\rangle)$.*

Лемма 11 доказана с использованием метода индукции по построению $L_\supset$-формулы.

Лемма 12. *Для всякой $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}$ из*

$$\{M(1,0,0,1), M(1,0,0,1/2), M(1/2,0,1,1), M(1/2,0,0,1/2)\}$$

и для всякой $L_\supset$-формулы A: если A есть $L_\supset$-формула, общезначимая в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}$, то A есть $L_\supset$-формула, общезначимая в $L_\supset$-матрице $M(Cl_\supset)$.

Лемма 12 доказана с использованием леммы 11 и метода доказательства от противного.

Соглашение 6. *Обозначаем через Θ отображение множества $\{1,0\}$ на множество $\{1,1/2\}$, определяемое таблицей*

Θ	1	0
	1	1/2

Определение 9. *Называем Θ-предобразованием упорядоченной пары, первый член q которой есть пропозициональная переменная языка $L_\supset$ и второй член x которой есть элемент множества $\{1,0\}$, упорядоченную пару, первый член которой есть q и второй член которой есть $\Theta(x)$.*

Определение 10. *Называем Θ-преобразованием отображения v множества всех пропозициональных переменных языка $L_\supset$ в $\{0,1\}$ множество всех таких упорядоченных пар, каждая из которых есть Θ-преобразование упорядоченной пары из v.*

Замечание 17. *Для всякой оценки языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(Cl_\supset)$ существует единственное Θ-преобразование этой оценки языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(Cl_\supset)$.*

Соглашение 7. *Обозначаем Θ-преобразование оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(Cl_\supset)$ через $\Theta[v]$.*

Замечание 18. *Для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(Cl_\supset)$ $\Theta[v]$ является оценкой языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1/2,1/2,1,1)$.*

Лемма 13. *Для всякой $L_\supset$-формулы A и для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(Cl_\supset)$*

$$\Theta(\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle A, v\rangle)) = \varphi_{M(1/2,1/2,1,1)}(\langle A, \Theta[v]\rangle).$$

Доказательство леммы 13 проводим индукцией по построению $L_\supset$-формулы.

Базис. Для всякой пропозициональной переменной q языка $L_\supset$ и для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(Cl_\supset)$

$$\Theta(\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle q, v\rangle)) = \varphi_{M(1/2,1/2,1,1)}(\langle q, \Theta[v]\rangle).$$

Справдливость базиса очевидна.

Индукционный шаг. Для всякой $L_\supset$-формулы B, для всякой $L_\supset$-формулы C: если для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(Cl_\supset)$

$$\Theta(\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle B, v\rangle)) = \varphi_{M(1/2,1/2,1,1)}(\langle B, \Theta[v]\rangle)$$

и для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(Cl_\supset)$

$$\Theta(\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle C, v\rangle)) = \varphi_{M(1/2,1/2,1,1)}(\langle C, \Theta[v]\rangle),$$

то для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(Cl_\supset)$

$$\Theta(\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle (B \supset C), v\rangle)) = \varphi_{M(1/2,1/2,1,1)}(\langle (B \supset C), \Theta[v]\rangle).$$

Докажем индукционный шаг.

(1) B_0 есть $L_\supset$-формула (допущение).

(2) C_0 есть $L_\supset$-формула (допущение).

(3) Для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(Cl_\supset)$

$$\Theta(\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle B_0, v\rangle)) = \varphi_{M(1/2,1/2,1,1)}(\langle B_0, \Theta[v]\rangle)$$

и для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(Cl_\supset)$

$$\Theta(\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle C_0, v\rangle)) = \varphi_{M(1/2,1/2,1,1)}(\langle C_0, \Theta[v]\rangle) \qquad \text{(допущение)}.$$

(4) v_0 есть оценка языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(Cl_\supset)$ (допущение).

(5) Для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(Cl_\supset)$

$$\Theta(\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle B_0, v\rangle)) = \varphi_{M(1/2,1/2,1,1)}(\langle B_0, \Theta[v]\rangle) \qquad \text{(из (3))}.$$

(6) Для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(Cl_\supset)$

$$\Theta(\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle C_0, v\rangle)) = \varphi_{M(1/2,1/2,1,1)}(\langle C_0, \Theta[v]\rangle) \qquad \text{(из (3))}.$$

Опираясь на утверждения (1), (2), (4), на замечание 1 и на тот факт, что $M(Cl_\supset)$ есть $L_\supset$-матрица, а $\supset_{Cl}$ есть операция этой $L_\supset$-матрицы, получаем, что

(7) $\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle (B_0 \supset C_0), v_0\rangle) = (\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle B_0, v\rangle) \supset_{Cl} \varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle C_0, v\rangle))$.

В свете утверждения (7), соглашения 6 и того, что $\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle (B_0 \supset C_0), v_0\rangle) \in \{1, 0\}$, ясно, что

(8) $\Theta(\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle (B_0 \supset C_0), v_0\rangle) = \Theta((\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle B_0, v_0\rangle) \supset_{Cl} \varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle C_0, v_0\rangle))$.

(9) $\Theta[v_0]$ есть оценка языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1/2, 1/2, 1, 1)$ (из (4), по замечанию 18).

Опираясь на утверждения (1), (2), (9), на замечание 1 и на тот факт, что $M(1/2,1/2,1,1)$ есть $L_{\supset}$-матрица, а $\supset_{(1/2,1/2,1,1)}$ есть операция этой $L_{\supset}$-матрицы, получаем, что

(10) $\varphi_{M(1/2,1/2,1,1)}(\langle(B_0 \supset C_0), \Theta[v_0]\rangle) =$

$$= (\varphi_{M(1/2,1/2,1,1)}(\langle B_0, \Theta[v_0]\rangle) \supset_{(1/2,1/2,1,1)} \varphi_{M(1/2,1/2,1,1)}(\langle C_0, \Theta[v_0]\rangle)).$$

(11) $\Theta(\varphi_{M(Cl_{\supset})}(\langle B_0, v_0\rangle)) = \varphi_{M(1/2,1/2,1,1)}(\langle B_0, \Theta[v_0]\rangle)$ (из (4) и (5)).

(12) $\Theta(\varphi_{M(Cl_{\supset})}(\langle C_0, v_0\rangle)) = \varphi_{M(1/2,1/2,1,1)}(\langle C_0, \Theta[v_0]\rangle)$ (из (4) и (6)).

Опираясь на утверждения (11) и (12) и учитывая, что $\Theta(\varphi_{M(Cl_{\supset})}(\langle B_0, v_0\rangle)) \in \{1, 1/2, 0\}$, $\Theta(\varphi_{M(Cl_{\supset})}(\langle C_0, v_0\rangle)) \in \{1, 1/2, 0\}$ и $\supset_{(1/2,1/2,1,1)}$ есть бинарная операция на $\{1, 1/2, 0\}$, получаем, что

(13) $(\Theta(\varphi_{M(Cl_{\supset})}(\langle B_0, v_0\rangle)) \supset_{(1/2,1/2,1,1)} \Theta(\varphi_{M(Cl_{\supset})}(\langle C_0, v_0\rangle))) =$

$$(\varphi_{M(1/2,1/2,1,1)}(\langle B_0, \Theta[v_0]\rangle) \supset_{(1/2,1/2,1,1)} \varphi_{M(1/2,1/2,1,1)}(\langle C_0, \Theta[v_0]\rangle)).$$

Опираясь на то, что $\varphi_{M(Cl_{\supset})}(\langle B_0, v_0\rangle)$ и $\varphi_{M(Cl_{\supset})}(\langle C_0, v_0\rangle)$ принадлежат множеству $\{0, 1\}$, а также опираясь на определения отображений Θ, $\supset_{M(Cl_{\supset})}$ и $\supset_{(1/2,1/2,1,1)}$, получаем, что

(14) $\Theta(\varphi_{M(Cl_{\supset})}((\langle B_0, v_0\rangle) \supset_{Cl} (\varphi_{M(Cl_{\supset})}(\langle C_0, v_0\rangle)) =$

$$= (\Theta(\varphi_{M(Cl_{\supset})}(\langle B_0, v_0\rangle)) \supset_{(1/2,1/2,1,1)} \Theta(\varphi_{M(Cl_{\supset})}(\langle C_0, v_0\rangle))).$$

(15) $\Theta(\varphi_{M(Cl_{\supset})}(\langle(B_0 \supset C_0), v_0\rangle)) =$

$$(\Theta(\varphi_{M(Cl_{\supset})}(\langle B_0, v_0\rangle)) \supset_{(1/2,1/2,1,1)} \Theta(\varphi_{M(Cl_{\supset})}(\langle C_0, v_0\rangle))) \text{ (из (8) и (14))}.$$

(16) $\Theta(\varphi_{M(Cl_{\supset})}(\langle(B_0 \supset C_0), v_0\rangle)) =$

$$(\varphi_{M(1/2,1/2,1,1)}(\langle B_0, \Theta[v_0]\rangle) \supset_{(1/2,1/2,1,1)} \varphi_{M(1/2,1/2,1,1)}(\langle C_0, \Theta[v_0]\rangle))$$

(из (13) и (15)).

(17) $\Theta(\varphi_{M(Cl_{\supset})}(\langle(B_0 \supset C_0), v_0\rangle)) =$

$$\varphi_{M(1/2,1/2,1,1)}(\langle(B_0 \supset C_0), \Theta[v_0]\rangle) \text{ (из (10) и (16))}.$$

Снимая допущения (6), (3), (2), (1) и обобщая, завершаем доказательство индукционного шага.

Индукционный шаг доказан.

Лемма 13 доказана.

Лемма 14. *Для всякой $L_\supset$-формулы A: если A есть $L_\supset$-формула, общезначимая в $L_\supset$-матрице $M(1/2, 1/2, 1, 1)$, то A есть $L_\supset$-формула, общезначимая в $L_\supset$-матрице $M(Cl_\supset)$.*

Докажем лемму 14.

(1) A_0 есть $L_\supset$-формула (допущение).

(2) A_0 есть $L_\supset$-формула, общезначимая в $L_\supset$-матрице $M(1/2, 1/2, 1, 1)$ (допущение).

(3) Для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1/2, 1/2, 1, 1)$

$$\varphi_{M(1/2,1/2,1,1)}(\langle A_0, v\rangle)$$

принадлежит выделенному множеству $L_\supset$-матрицы $M(1/2, 1/2, 1, 1)$ (из (2), по определению 7).

Понятно, что

(4) выделенное множество $L_\supset$-матрицы $M(1/2, 1/2, 1, 1)$ есть $\{1\}$.

Опираясь на утверждения (3) и (4), получаем, что

(5) для всякой оценки v языка $L_\supset$ в матрице $M(1/2, 1/2, 1, 1)$

$$\varphi_{M(1/2,1/2,1,1)}(\langle A_0, v\rangle) = 1.$$

(6) Для некоторой оценки v языка $L_\supset$ в $M(Cl_\supset)$ $\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle A_0, v\rangle) \neq 1$ (допущение).

Пусть

(7) v_0 есть оценка языка $L_\supset$ в $M(Cl_\supset)$ $\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle A_0, v_0\rangle) \neq 1$.

(8) v_0 есть оценка языка $L_\supset$ в $M(Cl_\supset)$ (из (7)).

(9) $\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle A_0, v_0\rangle) \neq 1$ (из (7)).

Ясно, что

(10) для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(Cl_\supset)$:

$$\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle A_0, v\rangle) = 1 \text{ или } \varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle A_0, v\rangle) = 0.$$

(11) $\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle A_0, v\rangle) = 0$ (из (7), (9), (10)).

(12) $\Theta(\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle A_0, v_0\rangle)) = \varphi_{M(1/2,1/2,1,1)}(\langle A_0, \Theta[v_0]\rangle)$ (из (1) и (7), по лемме 13).

(13) $\Theta(0) = \varphi_{M(1/2,1/2,1,1)}(\langle A_0, \Theta[v_0]\rangle)$ (из (11) и (12)).

(14) $\Theta(0) = 1/2$ (по соглашению 6).

(15) $\varphi_{M(1/2,1/2,1,1)}(\langle A_0, \Theta[v_0]\rangle) = 1/2$ (из (13) и (14)).

(16) $\varphi_{M(1/2,1/2,1,1)}(\langle A_0, \Theta[v_0]\rangle) \neq 1$ (из (15)).

(17) $\Theta[v_0]$ есть оценка языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1/2, 1/2, 1, 1)$ (из (8), по замечанию 18).

(18) Для некоторой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1/2, 1/2, 1, 1)$

$$\varphi_{M(1/2,1/2,1,1)}(\langle A_0, v\rangle) \neq 1 \qquad \text{(из (16) и (17))}.$$

Утверждение (18) противоречит утверждению (3). Следовательно, неверно допущение (6).

Но тогда

(19) для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(Cl_\supset)$ $\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle A_0, v\rangle) = 1$.

Опираясь на утверждение (19) и определение 7, получаем, что

(20) A_0 есть $L_\supset$-формула, общезначимая в $L_\supset$-матрице $M(Cl_\supset)$.

Снимая допущения (2) и (1) и обобщая, завершаем доказательство леммы 14.

Лемма 14 доказана.

Соглашение 8. *Обозначаем через* τ *отображение множества* $\{1, 1/2, 0\}$ *на множество* $\{0, 1\}$*, определяемое таблицей*

τ	1	1/2	0
	1	0	0

Лемма 15. *Для всякой* $L_\supset$*-формулы* A *и для всякой оценки* v *языка* $L_\supset$ *в* $L_\supset$*-матрице* $M(Cl_\supset)$

$$\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle A, v\rangle) = \tau(\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle A, v\rangle)).$$

Доказательство леммы 15 проводим индукцией по построению $L_\supset$-формулы.

Базис. Для всякой пропозициональной переменной q языка $L_\supset$ и для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(Cl_\supset)$

$$\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle q, v\rangle) = \tau(\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle q, v\rangle)).$$

Справедливость базиса очевидна.

Индукционный шаг. Для всякой $L_\supset$-формулы B, для всякой $L_\supset$-формулы C: если для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(Cl_\supset)$

$$\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle B, v\rangle) = \tau(\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle B, v\rangle))$$

и для всякой оценки v языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице $M(Cl_{\supset})$

$$\varphi_{M(Cl_{\supset})}(\langle C, v\rangle) = \tau(\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle C, v\rangle)),$$

то для всякой оценки v языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице $M(Cl_{\supset})$

$$\varphi_{M(Cl_{\supset})}(\langle (B \supset C), v\rangle) = \tau(\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle (B \supset C), v\rangle)).$$

Докажем индукционный шаг.

(1) B_0 есть $L_{\supset}$-формула (допущение).

(2) C_0 есть $L_{\supset}$-формула (допущение).

(3) Для всякой оценки v языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице $M(Cl_{\supset})$

$$\varphi_{M(Cl_{\supset})}(\langle B_0, v\rangle) = \tau(\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle B_0, v\rangle))$$

и для всякой оценки v языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице $M(Cl_{\supset})$

$$\varphi_{M(Cl_{\supset})}(\langle C_0, v\rangle) = \tau(\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle C_0, v\rangle)) \qquad \text{(допущение).}$$

(4) v_0 есть оценка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице $M(Cl_{\supset})$ (допущение).

(5) Для всякой оценки v языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице $M(Cl_{\supset})$

$$\varphi_{M(Cl_{\supset})}(\langle B_0, v\rangle) = \tau(\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle B_0, v\rangle)) \qquad \text{(из (3)).}$$

(6) Для всякой оценки v языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице $M(Cl_{\supset})$

$$\varphi_{M(Cl_{\supset})}(\langle C_0, v\rangle) = \tau(\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle C_0, v\rangle)) \qquad \text{(из (3)).}$$

Опираясь на утверждения (1), (2), (4), на замечание 1 и на тот факт, что $M(Cl_{\supset})$ есть $L_{\supset}$-матрица, а $\supset_{Cl}$ есть операция этой $L_{\supset}$-матрицы, получаем, что

(7) $\varphi_{M(Cl_{\supset})}(\langle (B_0 \supset C_0), v_0\rangle) = (\varphi_{M(Cl_{\supset})}(\langle B_0, v_0\rangle) \supset_{Cl} \varphi_{M(Cl_{\supset})}(\langle C_0, v_0\rangle))$.

(8) v_0 есть оценка языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице $M(0, 1/2, 1, 1)$ (из (4) и того, что всякая оценка языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице $M(Cl_{\supset})$ является оценкой языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице $M(0, 1/2, 1, 1)$).

Опираясь на утверждения (1), (2), (8), на замечание 1 и тот факт, что $M(0, 1/2, 1, 1)$ есть $L_{\supset}$-матрица и $\supset_{(0,1/2,1,1)}$ есть операция на этой $L_{\supset}$-матрице, получаем, что

(9) $\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle (B_0 \supset C_0), v_0\rangle) =$

$$(\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle B_0, v_0\rangle) \supset_{(0,1/2,1,1)} \varphi_{M(0,1/2,1,1))}(\langle C_0, v_0\rangle)).$$

В свете утверждения (9), соглашения 8 и того, что $\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle(B_0 \supset C_0), v_0\rangle) \in \{1, 1/2, 0\}$, ясно, что

(10) $\tau(\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle(B_0 \supset C_0), v_0\rangle)) =$

$$\tau((\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle B_0, v_0\rangle) \supset_{(0,1/2,1,1)} \varphi_{M(0,1/2,1,1))}(\langle C_0, v_0\rangle)))$$

(11) $\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle B_0, v_0\rangle) = \tau(\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle B_0, v_0\rangle))$ (из (4) и (5)).

(12) $\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle C_0, v_0\rangle) = \tau(\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle C_0, v_0\rangle))$ (из (4) и (6)).

Опираясь на утверждения (11), (12) и на тот факт, что $\supset_{Cl}$ есть бинарная операция на $\{0, 1\}$ и $\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle B_0, v_0\rangle)$, $\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle C_0, v_0\rangle)$, $\tau(\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle B_0, v_0\rangle))$, $\tau(\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle C_0, v_0\rangle))$ являются элементами множества $\{0, 1\}$, получаем, что

(13) $(\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle B_0, v_0\rangle) \supset_{Cl} \varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle C_0, v_0\rangle)) =$

$$(\tau(\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle B_0, v_0\rangle)) \supset_{Cl} \tau(\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle C_0, v_0\rangle))).$$

Легко убедиться, что верны следующие утверждения (14) и (15).

(14) Для всяких x и y из $\{0, 1\}$ $(x \supset_{Cl} y) = (x \supset_{(0,1/2,1,1)} y)$.

(15) Для всяких x и y из $\{1, 1/2, 0\}$ $\tau((x \supset_{(0,1/2,1,1)} y)) = (\tau(x) \supset_{(0,1/2,1,1)} \tau(y))$.

(16) $(\tau(\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle B_0, v_0\rangle)) \supset_{Cl} \tau(\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle C_0, v_0\rangle)) =$

$$(\tau(\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle B_0, v_0\rangle)) \supset_{(0,1/2,1,1)} \tau(\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle C_0, v_0\rangle)))$$

(из (14) и того, что $\tau(\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle B_0, v_0\rangle))$ и $\tau(\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle C_0, v_0\rangle))$ являются элементами множества $\{0, 1\}$).

(17) $(\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle B_0, v_0\rangle) \supset_{Cl} \varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle C_0, v_0\rangle)) =$

$(\tau(\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle B_0, v_0\rangle)) \supset_{(0,1/2,1,1)} \tau(\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle C_0, v_0\rangle)))$ (из (13) и (16)).

(18) $\tau((\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle B_0, v_0\rangle) \supset_{(0,1/2,1,1)} \varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle C_0, v_0\rangle))) =$

$$(\tau(\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle B_0, v_0\rangle)) \supset_{(0,1/2,1,1)} \tau(\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle C_0, v_0\rangle)))$$

(из (15) и того, что $\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle B_0, v_0\rangle)$ и $\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle C_0, v_0\rangle)$ являются элементами множества $\{1, 1/2, 0\}$).

(19) $(\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle B_0, v_0\rangle) \supset_{Cl} \varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle C_0, v_0\rangle)) =$

$\tau((\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle B_0, v_0\rangle) \supset_{(0,1/2,1,1)} \varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle C_0, v_0\rangle)))$ (из (17) и (18)).

(20) $\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle(B_0 \supset C_0), v_0\rangle) =$

$$\tau((\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle B_0, v_0\rangle) \supset_{(0,1/2,1,1)} \varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle C_0, v_0\rangle)))\text{ (из (7) и (19)).}$$

(21) $\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle (B_0 \supset C_0), v_0\rangle) = \tau(\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle (B_0 \supset C_0), v_0\rangle))$ (из (10) и (20)).

Снимая допущения (4), (3), (2), (1) и обобщая, завершаем доказательство индукционного шага.

Индукционный шаг доказан.

Лемма 15 доказана.

Лемма 16. *Для всякой $L_\supset$-формулы A: если A есть $L_\supset$-формула, общезначимая в $L_\supset$-матрице $M(0,1/2,1,1)$, то A есть $L_\supset$-формула, общезначимая в $M(Cl_\supset)$.*

Докажем лемму 16.

(1) A_0 есть $L_\supset$-формула (допущение).

(2) A_0 есть $L_\supset$-формула, общезначимая в $L_\supset$-матрице $M(0,1/2,1,1)$ (допущение).

(3) Для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(0,1/2,1,1)$

$$\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle A_0, v\rangle)$$

принадлежит выделенному множеству $L_\supset$-матрицы $M(0,1/2,1,1)$ (из (2), по определению 7).

Понятно, что

(4) выделенное множество $L_\supset$-матрицы $M(0,1/2,1,1)$ есть $\{1\}$.

Опираясь на утверждения (3) и (4), получаем, что

(5) для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(0,1/2,1,1)$

$$\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle A_0, v\rangle) = 1.$$

(6) Для некоторой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(Cl_\supset)$ $\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle A_0, v\rangle) \neq 1$ (допущение).

Пусть

(7) v_0 есть оценка языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(Cl_\supset)$ $\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle A_0, v_0\rangle) \neq 1$.

(8) v_0 есть оценка языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(Cl_\supset)$ (из (7)).

(9) $\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle A_0, v_0\rangle) \neq 1$ (из (7)).

Ясно, что

(10) для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(Cl_\supset)$

$$\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle A_0, v\rangle) = 1 \text{ или } \varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle A_0, v\rangle) = 0.$$

(11) $\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle A_0, v_0\rangle) = 0$ (из (7), (9) и (10)).

(12) $\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle A_0, v_0\rangle) = \tau(\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle A_0, v_0\rangle))$ (из (1) и (8), по лемме 15).

(13) $\tau(\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle A_0, v_0\rangle)) = 0$ (из (11) и (12)).

Опираясь на утверждение 13 и соглашение 8, получаем, что

(14) $\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle A_0, v_0\rangle) \in \{1/2, 0\}$.

(15) $\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle A_0, v_0\rangle) \neq 1$ (из (14)).

Опираясь на утверждение (8) и тот факт, что всякая оценка языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(Cl_\supset)$ является оценкой языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(0, 1/2, 1, 1)$, получаем, что

(16) v_0 есть оценка языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(0, 1/2, 1, 1)$.

(17) Для некоторой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(0, 1/2, 1, 1)$

$$\varphi_{M(0,1/2,1,1)}(\langle A_0, v\rangle) \neq 1 \qquad \text{(из (15) и (16)).}$$

Утверждение (17) противоречит утверждению (5). Следовательно, неверно допущение (6). Но тогда

(18) для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(Cl_\supset)$ $\varphi_{M(Cl_\supset)}(\langle A_0, v\rangle) = 1$.

Опираясь на утверждение (18) и определение 7, получаем, что

(19) A_0 есть $L_\supset$-формула, общезначимая в $L_\supset$-матрице $M(Cl_\supset)$.

Снимая допущения (2) и (1) и обобщая, завершаем доказатальство леммы 16.

Лемма 16 доказана.

Опираясь на леммы 12, 14, 16 и на соглашение 5, получаем следующую лемму 17.

Лемма 17. *Для всякой $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}$ из*

$$\{M(1,0,0,1), M(1,0,0,1/2), M(1/2,1/2,1,1), \\ M(1/2,0,1,1), M(1/2,0,0,1/2), M(0,1/2,1,1)\}$$

и для всякой $L_\supset$-формулы A: если A общезначима в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}$, то $A \in Cl_\supset$.

Лемма 18. *Для всякой $L_{\supset}$-матрицы $\mathcal{K}$ из*

$$\{M(1,0,0,1), M(1,0,0,1/2), M(1/2,1/2,1,1),\\ M(1/2,0,1,1), M(1/2,0,0,1/2), M(0,1/2,1,1)\}$$

и для всякой $L_{\supset}$-формулы A: A общезначима в $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда $A \in Cl_{\supset}$.

Лемма 18 следует из лемм 10 и 17.

Наша ближайшая цель — доказать, что для всякой $L_{\supset}$-матрицы $\mathcal{K}$ из

$$\{M(1/2,1,1,1/2), M(1/2,1,0,1/2), M(0,0,1,1)\}$$

и для всякой $L_{\supset}$-формулы A: A общезначима в $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда $A \in Cl_{\supset}$.

Определение 11. *Изоморфизмом $L_{\supset}$-матрицы $\langle M_1, N_1, g_1\rangle$ на $L_{\supset}$-матрицу $\langle M_2, N_2, g_2\rangle$ называем такое взаимно-однозначное отображение I множества M_1 на множество M_2, что выполняются следующие два условия:* (1) *I отображает множество N_1 на множество N_2,* (2) *для всякого x из M_1 и для всякого y из M_1 $I((xg_1y)) = (I(x_1)g_2I(y))$.*

В свете определения 11 очевидна справедливость следующего замечания 19.

Замечание 19. *I есть изоморфизм $L_{\supset}$-матрицы $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},g_1\rangle$ на $L_{\supset}$-матрицу $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},g_2\rangle$ тогда и только тогда, когда I есть такое взаимно-однозначное отображение множества $\{1,1/2,0\}$ на себя, что выполняются следующие два условия:* (1) *$I(1) = 1$,* (2) *для всякого x из $\{1,1/2,0\}$ и для всякого y из $\{1,1/2,0\}$ $I((xg_1y)) = (I(x)g_2I(y))$.*

Определение 12. *Говорим, что $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}_1$ изоморфна $L_{\supset}$-матрица $\mathcal{K}_2$, если существует изморфизм $L_{\supset}$-матрицы $\mathcal{K}_1$ на $L_{\supset}$-матрицу $\mathcal{K}_2$.*

Можно доказать, что верны следующие замечания 20 и 21.

Замечание 20. *Для всяких $L_{\supset}$-матриц $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ и $\mathcal{K}_3$:* (1) *$L_{\supset}$-матрица $\mathcal{K}_1$ изоморфна $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}_1$,* (2) *если $L_{\supset}$-матрица $\mathcal{K}_1$ изоморфна $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}_2$, то $L_{\supset}$-матрица $\mathcal{K}_2$ изоморфна $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}_1$,* (3) *если $L_{\supset}$-матрица $\mathcal{K}_1$ изоморфна $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}_2$ и $L_{\supset}$-матрица $\mathcal{K}_2$ изоморфна $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}_3$, то $L_{\supset}$-матрица $\mathcal{K}_1$ изоморфна $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}_3$.*

Замечание 21. *Если $\langle M_1, N_1, g_1\rangle$ и $\langle M_2, N_2, g_2\rangle$ являются $L_{\supset}$-матрицами, v есть оценка языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице $\langle M_1, N_1, g_1\rangle$, и I есть изоморфизм $L_{\supset}$-матрицы $\langle M_1, N_1, g_1\rangle$ на $L_{\supset}$-матрицу $\langle M_2, N_2, g_2\rangle$, то существует единственное множество всех упорядоченных пар, каждая из которых имеет вид $\langle q, I(v(q))\rangle$, где q есть пропоизициональная переменная языка $L_{\supset}$.*

Ввиду замечания 21 корректно следующее соглашение 9.

Соглашение 9. *Условимся, что* $(I, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, v)$, *где* I *есть изоморфизм* $L_\supset$-*матрицы* $\mathcal{K}_1$ *на* $L_\supset$-*матрицу* $\mathcal{K}_2$ *и* v *есть оценка языка* $L_\supset$ *в* $L_\supset$-*матрице* $\mathcal{K}_1$, *есть множество всех упорядоченных пар, каждая из которых имеет вид* $\langle q, I(v(q))\rangle$, *где* q *есть пропозициональная переменная языка* $L_\supset$.

Можно доказать, что верно следующее замечание 22.

Замечание 22. *Для всякой* $L_\supset$-*матрицы* $\mathcal{K}_1$, *для всякой* $L_\supset$-*матрицы* $\mathcal{K}_2$, *для всякого изоморфизма* I $L_\supset$-*матрицы* $\mathcal{K}_1$ *на* $L_\supset$-*матрицу* $\mathcal{K}_2$ *и для всякой оценки* v *языка* $L_\supset$ *в* $L_\supset$-*матрице* $\mathcal{K}_1$ $(I, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, v)$ *есть отображение множества всех пропозициональных переменных языка* $L_\supset$ *в носитель* $L_\supset$-*матрицы* $\mathcal{K}_2$, *причем для всякой пропозициональной переменной языка* $L_\supset$ $(I, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, v)(q) = I(v(q))$.

Опираясь на замечания 22 и на определение 6, делаем следующее замечание 23.

Замечание 23. *Для всякой* $L_\supset$-*матрицы* $\mathcal{K}_1$, *для всякой* $L_\supset$-*матрицы* $\mathcal{K}_2$, *для всякого изоморфизма* I $L_\supset$-*матрицы* $\mathcal{K}_1$ *на* $L_\supset$-*матрицу* $\mathcal{K}_2$ *и для всякой оценки* v *языка* $L_\supset$ *в* $L_\supset$-*матрице* $\mathcal{K}_1$ $(I, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, v)$ *есть оценка языка* $L_\supset$ *в* $L_\supset$-*матрице* $\mathcal{K}_2$.

Лемма 19. *Для всякой* $L_\supset$-*формулы* A, *для всякой* $L_\supset$-*матрицы* $\mathcal{K}_1$, *для всякой* $L_\supset$-*матрицы* $\mathcal{K}_2$, *для всякого изоморфизма* I $L_\supset$-*матрицы* $\mathcal{K}_1$ *на* $L_\supset$-*матрицу* $\mathcal{K}_2$ *и для всякой оценки* v *языка* $L_\supset$ *в* $L_\supset$-*матрице* $\mathcal{K}_1$

$$I(\varphi_{\mathcal{K}_1}(\langle A, v\rangle)) = \varphi_{\mathcal{K}_2}(\langle A, (I, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, v)\rangle).$$

Доказательство леммы 19 проводим индукцией по построению $L_\supset$-формулы.

Базис. Для всякой пропозициональной переменной q языка $L_\supset$, для всякой $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}_1$, для всякой $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}_2$, для всякого изоморфизма I $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}_1$ на $L_\supset$-матрицу $\mathcal{K}_2$ и для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}_1$

$$I(\varphi_{\mathcal{K}_1}(\langle q, v\rangle)) = \varphi_{\mathcal{K}_2}(\langle q, (I, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, v)\rangle).$$

Докажем базис.

(i) q_0 есть пропозициональная переменная языка $L_\supset$ (допущение).

(ii) $\mathcal{K}'_1$ есть $L_\supset$-матрица (допущение).

(iii) $\mathcal{K}'_2$ есть $L_\supset$-матрица (допущение).

(iv) I' есть изоморфизм $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}_1$ на $L_\supset$-матрицу $\mathcal{K}_2$ (допущение).

(v) v_0 есть оценка языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}'_1$ (допущение).

(vi) $\varphi_{\mathcal{K}'_1}(\langle q_0, v_0\rangle) = v_0(q_0)$ (из (i), (ii), (v), по замечанию 1).

В свете утверждений (iv), (vi) и того, что $\varphi_{\mathcal{K}'_1}(\langle q_0, v_0\rangle)$ принадлежит носителю $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}'_1$, ясно, что

(vii) $I'(\varphi_{\mathcal{K}_1'}(\langle q_0, v_0\rangle)) = I'(v_0(q_0))$.

(viii) $(I', \mathcal{K}_1', \mathcal{K}_2', v_0)$ есть оценка в $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}_2'$ (из (ii),(iii),(iv) и (v), по замечанию 23).

(ix) $\varphi_{\mathcal{K}_2'}(\langle q_0, (I', \mathcal{K}_1', \mathcal{K}_2', v_0)\rangle) = (I', \mathcal{K}_1', \mathcal{K}_2', v_0)(q_0)$ (из (iii), (v) и (viii), по замечанию 1).

Опираясь на утверждения (i), (ii), (iii), (iv), (v) и на замечание 22, получаем, что

(x) $(I', \mathcal{K}_1', \mathcal{K}_2', v_0)(q_0) = I'(v_0(q))$.

(xi) $I'(\varphi_{\mathcal{K}_1'}(\langle q_0, v_0\rangle)) = \varphi_{\mathcal{K}_2'}(\langle q_0, (I', \mathcal{K}_1', \mathcal{K}_2', v_0)\rangle)$ (из (vii), (ix) и (x)).

Снимая допущения (v), (iv), (iii), (ii) и (i) и обобщая, завершаем доказательство базиса.

Базис доказан.

Индукционный шаг. Для всякой $L_{\supset}$-формулы A и для всякой $L_{\supset}$-формулы B: если (для всякой $L_{\supset}$-матрицы $\mathcal{K}_1$, для всякой $L_{\supset}$-матрицы $\mathcal{K}_2$, для всякого изоморфизма I $L_{\supset}$-матрицы $\mathcal{K}_1$ на $L_{\supset}$-матрицу $\mathcal{K}_2$ и для всякой оценки v языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}_1$

$$I(\varphi_{\mathcal{K}_1}(\langle A, v\rangle)) = \varphi_{\mathcal{K}_2}(\langle A, (I, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, v)\rangle)$$

и для всякой $L_{\supset}$-матрицы $\mathcal{K}_1$, для всякой $L_{\supset}$-матрицы $\mathcal{K}_2$, для всякого изоморфизма I $L_{\supset}$-матрицы $\mathcal{K}_1$ на $L_{\supset}$-матрицу $\mathcal{K}_2$ и для всякой оценки v языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}_1$

$$I(\varphi_{\mathcal{K}_1}(\langle B, v\rangle)) = \varphi_{\mathcal{K}_2}(\langle B, (I, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, v)\rangle)),$$

то для всякой $L_{\supset}$-матрицы $\mathcal{K}_1$, для всякой $L_{\supset}$-матрицы $\mathcal{K}_2$, для всякого изоморфизма I $L_{\supset}$-матрицы $\mathcal{K}_1$ на $L_{\supset}$-матрицу $\mathcal{K}_2$ и для всякой оценки v языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}_1$

$$I(\varphi_{\mathcal{K}_1}(\langle (A \supset B), v\rangle)) = \varphi_{\mathcal{K}_2}(\langle (A \supset B), (I, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, v)\rangle).$$

Докажем индукционный шаг.

(1) A_0 есть $L_{\supset}$-формула (допущение).

(2) B_0 есть $L_{\supset}$-формула (допущение).

(3) Для всякой $L_{\supset}$-матрицы $\mathcal{K}_1$, для всякой $L_{\supset}$-матрицы $\mathcal{K}_2$, для всякого изоморфизма I $L_{\supset}$-матрицы $\mathcal{K}_1$ на $L_{\supset}$-матрицу $\mathcal{K}_2$ и для всякой оценки v языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}_1$

$$I(\varphi_{\mathcal{K}_1}(\langle A_0, v\rangle)) = \varphi_{\mathcal{K}_2}(\langle A_0, (I, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, v)\rangle),$$

и для всякой $L_{\supset}$-матрицы $\mathcal{K}_1$, для всякой $L_{\supset}$-матрицы $\mathcal{K}_2$, для всякого изоморфизма I $L_{\supset}$-матрицы $\mathcal{K}_1$ на $L_{\supset}$-матрицу $\mathcal{K}_2$ и для всякой оценки v языка $L_{\supset}$ в $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}_1$

$$I(\varphi_{\mathcal{K}_1}(\langle B_0, v\rangle)) = \varphi_{\mathcal{K}_2}(\langle B_0, (I, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, v)\rangle) \qquad \text{(допущение).}$$

(4) Для всякой $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}_1$, для всякой $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}_2$, для всякого изоморфизма I $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}_1$ на $L_\supset$-матрицу $\mathcal{K}_2$ и для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}_1$ $I(\varphi_{\mathcal{K}_1}(\langle A_0, v\rangle)) = \varphi_{\mathcal{K}_2}(\langle A_0, (I, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, v)\rangle)$ (из (3)).

(5) Для всякой $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}_1$, для всякой $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}_2$, для всякого изоморфизма I $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}_1$ на $L_\supset$-матрицу $\mathcal{K}_2$ и для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}_1$ $I(\varphi_{\mathcal{K}_1}(\langle B_0, v\rangle)) = \varphi_{\mathcal{K}_2}(\langle B_0, (I, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, v)\rangle)$ (из (3)).

(6) $\mathcal{K}'_1$ есть $L_\supset$-матрицы (допущение).

(7) $\mathcal{K}'_2$ есть $L_\supset$-матрицы (допущение).

(8) I' есть изоморфизм $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}'_1$ на $L_\supset$-матрицу $\mathcal{K}'_2$ (допущение).

(9) v' есть оценка языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}'_1$ (допущение).

В свете утверждений (6) и (7) ясно, что верны следующие утверждения (10) и (11).

(10) Для некоторого M_1, для некоторого N_1 и для некоторого g_1 $\mathcal{K}'_1 = \langle M_1, N_1, g_1\rangle$.

(11) Для некоторого M_1, для некоторого N_1 и для некоторого g_2 $\mathcal{K}'_2 = \langle M_2, N_2, g_2\rangle$.

Пусть

(12) $\mathcal{K}'_1 = \langle M'_1, N'_1, g'_1\rangle$.

Пусть

(13) $\mathcal{K}'_2 = \langle M'_2, N'_2, g'_2\rangle$.

(14) $\varphi_{\mathcal{K}'_1}(\langle (A_0 \supset B_0), v'\rangle) = (\varphi_{\mathcal{K}'_1}(\langle A_0, v'\rangle) g_1 \varphi_{\mathcal{K}'_1}(\langle B_0, v'\rangle))$ (из (1), (2), (6), (9) и (12), по замечанию 1).

В свете утверждений (8), (14) и того, что $\varphi_{\mathcal{K}'_1}(\langle (A_0 \supset B_0), v'\rangle)$ принадлежит носителю $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}'_1$, ясно, что

(15) $I'(\varphi_{\mathcal{K}'_1}(\langle (A_0 \supset B_0), v'\rangle)) = I'(\varphi_{\mathcal{K}'_1}(\langle A_0, v'\rangle) g'_1 \varphi_{\mathcal{K}'_1}(\langle B_0, v'\rangle))$.

Руководствуясь утверждениями (6), (7), (8), (12), (13) и определением 11, получаем, что

(16) $I'((\varphi_{\mathcal{K}'_1}(\langle A_0, v'\rangle) g'_1 \varphi_{\mathcal{K}'_1}(\langle B_0, v'\rangle))) = (I'(\varphi_{\mathcal{K}'_1}(\langle A_0, v'\rangle)) g'_2 I'(\varphi_{\mathcal{K}'_1}(\langle B_0, v'\rangle)))$.

(17) $(I'(\varphi_{\mathcal{K}'_1}(\langle A_0, v'\rangle)) g'_2 I'(\varphi_{\mathcal{K}'_1}(\langle B_0, v'\rangle))) =$

$$(\varphi_{\mathcal{K}'_2}(\langle A_0, (I', \mathcal{K}'_1, \mathcal{K}'_2, v')\rangle) g'_2 \varphi_{\mathcal{K}'_2}(\langle B_0, (I', \mathcal{K}'_1, \mathcal{K}'_2, v')\rangle))$$

(из (4), (5), (6), (7), (8) и (9)).

(18) $(I', \mathcal{K}_1', \mathcal{K}_2', v')$ есть оценка в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}_2'$ (из (6), (7), (8), (9), по замечанию 23).

(19) $\varphi_{\mathcal{K}_2'}(\langle (A_0 \supset B_0), (I', \mathcal{K}_1', \mathcal{K}_2', v')\rangle) =$

$$(\varphi_{\mathcal{K}_2'}(\langle A_0, (I', \mathcal{K}_1', \mathcal{K}_2', v')\rangle) g_2' \varphi_{\mathcal{K}_2'}(\langle B_0, (I', \mathcal{K}_1', \mathcal{K}_2', v')\rangle))$$

(из (1), (2), (7), (13) и (18), по замечанию 1).

(20) $I'(\varphi_{\mathcal{K}_1'}(\langle (A_0 \supset B_0), v'\rangle)) =$

$\varphi_{\mathcal{K}_2'}(\langle (A_0 \supset B_0), (I', \mathcal{K}_1', \mathcal{K}_2', v')\rangle)$ (из (15), (16), (17) и (19)).

Снимая допущения (9), (8), (7) и (6) и обобщая, получаем, что

(21) для всякой $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}_1$, для всякой $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}_2$, для всякого изоморфизма I $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}_1$ на $L_\supset$-матрицу $\mathcal{K}_2$ и для всякой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}_1$

$$I(\varphi_{\mathcal{K}_1}(\langle (A_0 \supset B_0), v\rangle)) = \varphi_{\mathcal{K}_2}(\langle (A_0 \supset B_0), (I, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, v)\rangle).$$

Снимая допущения (3), (2), (1) и обобщая, завершаем доказательство индукционного шага.

Индукционный шаг доказан.

Лемма 19 доказана.

Лемма 20. *Для всякой $L_\supset$-формулы A, для всякой $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}_1$ и для всякой $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}_2$: если $L_\supset$-матрица $\mathcal{K}_1$ изоморфна $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}_2$ и $L_\supset$-формула A общезначима в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}_2$, то $L_\supset$-формула A общезначима в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}_1$.*

Докажем лемму 20.

(1) A_0 есть $L_\supset$-формула (допущение).

(2) $\mathcal{K}_1'$ есть $L_\supset$-матрица (допущение).

(3) $\mathcal{K}_2'$ есть $L_\supset$-матрица (допущение).

(4) $L_\supset$-матрица $\mathcal{K}_1'$ изоморфна $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}_2'$ и $L_\supset$-формула A общезначима в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}_2$ (допущение).

(5) $L_\supset$-матрица $\mathcal{K}_1'$ изоморфна $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}_2'$ (из (4)).

(6) $L_\supset$-формула A общезначима в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}_2'$ (из (4)).

(7) Существует изоморфизм $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}_1'$ на $L_\supset$-матрицу $\mathcal{K}_2'$ (из (5), по определению 12).

Пусть

(8) I' есть изоморфизм $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}_1'$ на $L_\supset$-матрицу $\mathcal{K}_2'$.

(9) Неверно, что $L_\supset$-формула A_0 общезначима в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}_1'$ (допущение).

(10) Для некоторой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}_1'$ $\varphi_{\mathcal{K}_1'}(\langle A_0, v\rangle)$ не принадлежит выделенному множеству $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}_1'$ (из (1) и (9)).

Пусть

(11) v' есть оценка языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}_1'$, $\varphi_{\mathcal{K}_1'}(\langle A_0, v'\rangle)$ не принадлежит выделенному множеству $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}_1'$.

(12) v' есть оценка языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}_1'$ (из (11)).

(13) $\varphi_{\mathcal{K}_1'}(\langle A_0, v'\rangle)$ не принадлежит выделенному множеству $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}_1'$ (из (11)).

Опираясь на утверждения (8), (13) и на определения 2, 11, получаем, что

(14) $\varphi_{\mathcal{K}_1'}(\langle A_0, v'\rangle)$ не принадлежит выделенному множеству $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}_2'$.

(15) $I'(\varphi_{\mathcal{K}_1'}(\langle A_0, v'\rangle)) = \varphi_{\mathcal{K}_1'}(\langle A_0, (I', \mathcal{K}_1', \mathcal{K}_2', v')\rangle)$ (из (1), (2), (3), (8) и (12), по лемме 19).

(16) $\varphi_{\mathcal{K}_1'}(\langle A_0, (I', \mathcal{K}_1', \mathcal{K}_2', v')\rangle)$ не принадлежит выделенному множеству $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}_2'$ (из (14) и (15)).

(17) $(I', \mathcal{K}_1', \mathcal{K}_2', v')$ есть оценка языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}_2'$ (из (2), (3), (8) и (12), по замечанию 23).

(18) Для некоторой оценки v языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}_2'$ $\varphi_{\mathcal{K}_2'}(\langle A_0, v\rangle)$ не принадлежит выделенному множеству $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}_2'$ (из (16) и (17)).

(19) Неверно, что $L_\supset$-формула A_0 общезначима в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}_2'$ (из (18), по определению 7).

Утверждение (19) противоречит утверждению (6).

Следовательно, неверно допущение (9).

Но тогда

(20) $L_\supset$-формула A_0 общезначима в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}_1'$.

Снимая допущения (4), (3), (2) и (1) и обобщая, звершаем доказательство леммы 20.

Лемма 20 доказана.

Лемма 21. *Для всякой $L_\supset$-формулы A, для всякой $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}_1$ и для всякой $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}_2$: если $L_\supset$-матрица $\mathcal{K}_1$ изоморфна $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}_2$ и $L_\supset$-формула A общезначима в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}_1$, то $L_\supset$-формула A общезначима в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}_2$.*

Докажем лемму 21.

(1) A_0 есть $L_\supset$-формула (допущение).

(2) $\mathcal{K}_1'$ есть $L_\supset$-матрица (допущение).

(3) $\mathcal{K}_2'$ есть $L_\supset$-матрица (допущение).

(4) $L_\supset$-матрица $\mathcal{K}_1$ изоморфна $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}_2$ и $L_\supset$-формула A общезначима в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}_1$ (допущение).

(5) $L_\supset$-матрица $\mathcal{K}_1$ изоморфна $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}_2$ (из (4)).

(6) Если $L_\supset$-матрица $\mathcal{K}_1$ изоморфна $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}_2$, то $L_\supset$-матрица $\mathcal{K}_2$ изоморфна $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}_1$ (из (2) и (3), по замечанию 20 (пункт 2)).

(7) $L_\supset$-матрица $\mathcal{K}_2$ изоморфна $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}_1$ (из (5) и (6)).

(8) $L_\supset$-формула A общезначима в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}_1$ (из (4)).

(9) $L_\supset$-формула A общезначима в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}_2$ (из (1), (2), (3), (7) и (8), по лемме 20).

Снимая допущения (4), (3), (2) и (1) и обобщая, завершаем доказательство леммы 21.

Лемма 21 доказана.

Простым следствием леммы 20 и леммы 21 является следующая лемма 22.

Лемма 22. *Для всякой $L_\supset$-формулы A, для всякой $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}_1$ и для всякой $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}_2$: если $L_\supset$-матрица $\mathcal{K}_1$ изоморфна $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}_2$, то $L_\supset$-формула A общезначима в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}_1$ тогда и только тогда, когда $L_\supset$-формула A общезначима в $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}_2$.*

Соглашение 10. *Обозначаем через* И *множество* $\{\langle 1,1\rangle, \langle 1/2,0\rangle, \langle 0,1/2\rangle\}$.

Замечание 24. И *есть взаимно-однозначное отображение множества*

$$\{1, 1/2, 0\}$$

на себя.

Лемма 23. *$L_\supset$-матрица $M(1,0,0,1)$ изоморфна $L_\supset$-матрице $M(1/2,1,1,1/2)$.*

Докажем лемму 23.

Используя соглашение 10, получаем, что

(1) $\langle 1,1\rangle \in$ И, $\langle 1/2,0\rangle \in$ И, $\langle 0,1/2\rangle \in$ И.

Опираясь на замечение 24, получаем, что

(2) И есть отображение множества $\{1, 1/2, 0\}$.

В свете утверждений (1) и (2) ясно, что

(3) И(1) = 1, И(1/2) = 0, И(0) = 1/2.

Ввиду соглашения 2 верны следующие утверждения (4) и (5).

(4) $\supset_{(1,0,0,1)}$ есть бинарная операция на множестве $\{1, 1/2, 0\}$, определяемая таблицей

$\supset_{(1,0,0,1)}$	1	1/2	0
1	1	1	0
1/2	1	1	0
0	1	1	1

(5) $\supset_{(1/2,1,1,1/2)}$ есть бинарная операция на множестве $\{1, 1/2, 0\}$, определяемая таблицей

$\supset_{(1/2,1,1,1/2)}$	1	1/2	0
1	1	1/2	1
1/2	1	1	1
0	1	1/2	1

Опираясь на утверждения (3), (4) и (5), убеждаемся, что

(6) для всякого x из $\{1, 1/2, 0\}$ и для всякого y из $\{1, 1/2, 0\}$

$$\text{И}((x \supset_{(1,0,0,1)} y)) = (\text{И}(x) \supset_{(1/2,1,1,1/2)} \text{И}(y)).$$

Используя замечание 24 и утверждения (3) и (6), получаем, что

(7) И есть такое взаимно-однозначное отображение множества $\{1, 1/2, 0\}$ на себя, что выполняются следующие два условия: (У1) И(1) = 1, (У2) для всякого x из $\{1, 1/2, 0\}$ и для всякого y из $\{1, 1/2, 0\}$ $\text{И}((x \supset_{(1,0,0,1)} y)) = (\text{И}(x) \supset_{(1/2,1,1,1/2)} \text{И}(y))$.

Опираясь на замечание 13 и на обсуловленный соглашением 4 и замечанием 4 факт, что $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset_{(1,0,0,1)}\rangle$ и $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset_{(1/2,1,1,1/2)}\rangle$ являются $L_\supset$-матрицами, получаем, что

(8) И есть изоморфизм $L_\supset$-матрицы $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset_{(1,0,0,1)}\rangle$ на $L_\supset$-матрицу $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset_{(1/2,1,1,1/2)}\rangle$.

(9) Существует изоморфизм $L_\supset$-матрицы $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset_{(1,0,0,1)}\rangle$ на $L_\supset$-матрицу $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset_{(1/2,1,1,1/2)}\rangle$ (из (8)).

(10) $L_\supset$-матрица $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset_{(1,0,0,1)}\rangle$ изоморфна $L_\supset$-матрице

$$\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset_{(1/2,1,1,1/2)}\rangle$$

(из (9), по определению 11).

Из утверждения (10) получаем по соглашению 4, что $L_{\supset}$-матрица $M(1,0,0,1)$ изоморфна $L_{\supset}$-матрице $M(1/2,1,1,1/2)$.

Лемма 23 доказана.

Можно построить доказательства нижеследующих лемм 24 и 25, аналогично тому, как построено доказательство леммы 23.

Лемма 24. *$L_{\supset}$-матрица $M(1,0,0,1/2)$ изоморфна $L_{\supset}$-матрице $M(1/2,1,0,1/2)$.*

Лемма 25. *$L_{\supset}$-матрица $M(1/2,1/2,1,1)$ изоморфна $L_{\supset}$-матрице $M(0,0,1,1)$.*

Опираясь на леммы 18, 22, 23, 24 и 25, легко доказать следующую лемму 26.

Лемма 26. *Для всякой $L_{\supset}$-матрицы $\mathcal{K}$ из*

$$\{M(1/2,1,1,1/2), M(1/2,1,0,1/2), M(0,0,1,1)\}$$

и для всякой $L_{\supset}$-формулы A: A общезначима в $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда $A \in Cl_{\supset}$.

Лемма 27. *Для всякой $L_{\supset}$-матрицы $\mathcal{K}$, носитель которой есть $\{1,1/2,0\}$ и выделенное множество которой есть $\{1\}$, верно следующее: если $\mathcal{K}$ есть $L_{\supset}$-матрица, адекватная $L_{\supset}$-логике $Cl_{\supset}$, то $\mathcal{K}$ принадлежит множеству*

$$\{M(1,0,0,1), M(1,0,0,1/2), M(1/2,1,1,1/2), M(1/2,1,0,1/2),$$
$$M(1/2,1/2,1,1), M(1/2,0,1,1), M(1/2,0,0,1/2), M(0,1/2,1,1), M(0,0,1,1)\}.$$

Докажем лемму 27.

(1) $\mathcal{K}_0$ есть $L_{\supset}$-матрица, $\{1,1/2,0\}$ есть носитель $L_{\supset}$-матрицы $\mathcal{K}_0$, $\{1\}$ есть выделенное множество $L_{\supset}$-матрицы $\mathcal{K}_0$ (допущение).

(2) $\mathcal{K}_0$ есть $L_{\supset}$-матрица, адекватная $L_{\supset}$-логике $Cl_{\supset}$ (допущение).

Опираясь на утверждение (1) и определение 2, получаем, что

(3) для некоторой бинарной операции g на $\{1,1/2,0\}$ верно, что

$$\mathcal{K}_0 = \langle\{1,1/2,0\},\{1\},g\rangle.$$

Пусть

(4) g_0 есть бинарная операция на $\{1,1/2,0\}$, $\mathcal{K}_0 = \langle\{1,1/2,0\},\{1\},g_0\rangle$.

(5) $\mathcal{K}_0 = \langle\{1,1/2,0\},\{1\},g_0\rangle$ (из (4)).

(6) $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},g_0\rangle$ есть $L_{\supset}$-матрица (из (1) и (5)).

(7) $L_{\supset}$-матрица $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},g_0\rangle$ адекватна $L_{\supset}$-логике $Cl_{\supset}$ (из (2) и (5)).

Разумеется, что

(8) для всякой $L_{\supset}$-логики $\mathbb{L}$ верно следующее: множество всех $L_{\supset}$-формул, принадлежащих $\mathbb{L}$, равно $\mathbb{L}$.

Опираясь на утверждения (7), (8) и на определение 8, получаем, что

(9) множество всех $L_{\supset}$-формул, общезначимых в $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_0\rangle$ равно $L_{\supset}$-логике $Cl_{\supset}$.

(10) $L_{\supset}$-логика $Cl_{\supset}$ включается в множество всех $L_{\supset}$-формул, общезначимых в $L_{\supset}$-матрице $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_0\rangle$ (из (9)).

Опираясь на утверждения (6), (10) и на лемму 2, получаем, что верны следующие утверждения (11) и (12).

(11) Для всякого x из $\{1, 1/2, 0\}$ верно, что $(xg_0x) = 1$.

(12) Для всякого x из $\{1, 1/2, 0\}$ верно, что $(xg_01) = 1$.

(13) g_0 есть бинарная операция на $\{1, 1/2, 0\}$ (из (4)).

В свете утверждений (11), (12) и (13) ясно, что

(14) g_0 есть бинарная операция на $\{1, 1/2, 0\}$, определяемая таблицей

g_0	1	1/2	0
1	1	$(1g_01/2)$	$(1g_00)$
1/2	1	1	$(1/2g_00)$
0	1	$(0g_01/2)$	1

Опираясь на утверждение (14) и соглашение 2, получаем, что

(15) $g_0 = \supset_{((1g_01/2),(1g_00),(1/2g_00),(0g_01/2))}$.

(16) $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_0\rangle$ принадлежит множеству всех $L_{\supset}$-матриц вида

$$\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset_{(x,y,z,t)}\rangle,$$

где $x, y, z, t \in \{1, 1/2, 0\}$ (из (6), (15) и того, что $(1g_01/2), (1g_00), (1/2g_00)$, $(0g_01/2)$ принадлежат множеству $\{1, 1/2, 0\}$).

(17) $\mathcal{K}_0$ принадлежит множеству всех $L_{\supset}$-матриц вида $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset_{(x,y,z,t)}\rangle$, где $x, y, z, t \in \{1, 1/2, 0\}$ (из (5) и (16)).

(18) Множество всех $L_{\supset}$-формул, общезначимых в $\mathcal{K}_0$, равно $L_{\supset}$-логике $Cl_{\supset}$ (из (5) и (9)).

Можно убедиться, что верны следующие утверждения (19)–(23).

(19) $(p_1 \supset (p_2 \supset p_1)) \in Cl_{\supset}$.

(20) $((p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset ((p_1 \supset p_2) \supset (p_1 \supset p_2))) \in Cl_{\supset}$.

(21) $(((p_1 \supset p_2) \supset p_1) \supset p_1) \in Cl_{\supset}$.

(22) $((p_1 \supset p_1) \supset p_1) \notin Cl_{\supset}$.

(23) $((p_1 \supset p_1) \supset ((p_1 \supset p_1) \supset p_1)) \notin Cl_{\supset}$.

Опираясь на утверждения (18), (22) и на замечание 7, получаем, что

(24) $\mathcal{K}_0$ не принадлежит множеству всех $L_{\supset}$-матриц, каждая из которых имеет вид
$$\langle \{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset_{(1,1,z,t)} \rangle.$$

Опираясь на утверждения (18), (23) и на замечание 8, получаем, что

(25) $\mathcal{K}_0$ не принадлежит множеству всех $L_{\supset}$-матриц, каждая из которых имеет вид
$$\langle \{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset_{(1,1/2,z,t)} \rangle.$$

Опираясь на утверждениия (18), (20) и на замечание 9, получаем, что

(26) $\mathcal{K}_0$ не принадлежит множеству
$$\{M(1,0,1,1), M(1,0,1,1/2), M(1,0,1,0),\\ M(1,0,1/2,1), M(1,0,1/2,1/2), M(1,0,1/2,0), M(1,0,0,0)\}.$$

Опираясь на утверждения (18), (20) и на замечание 10, получаем, что

(27) $\mathcal{K}_0$ не принадлежит множеству
$$\{M(1/2,1,1,1), M(1/2,1,1,0), M(1/2,1,1/2,1),\\ M(1/2,1,1/2,1/2), M(1/2,1,1/2,0), M(1/2,1,0,1), M(1/2,1,0,0)\}.$$

Опираясь на утверждения (18), (20) и на замечание 11, получаем, что

(28) $\mathcal{K}_0$ не принадлежит множеству
$$\{M(1/2,1/2,1,1/2), M(1/2,1/2,1,0), M(1/2,1/2,1/2,1),\\ M(1/2,1/2,1/2,1/2), M(1/2,1/2,1/2,0),\\ M(1/2,1/2,0,1/2), M(1/2,1/2,0,1), M(1/2,1/2,0,0)\}.$$

Опираясь на утверждения (18), (20) и на пункт (a) замечания 12, получаем, что

(29) $\mathcal{K}_0$ не принадлежит множеству
$$\{M(1/2,0,1,0), M(1/2,0,1/2,1), M(1/2,0,1/2,1/2),\\ M(1/2,0,1/2,0), M(1/2,0,0,0)\}.$$

Опираясь на утверждения (18), (21) и на пункт (б) замечания 12, получаем, что

(30) $\mathcal{K}_0$ не принадлежит множеству

$$\{M(1/2, 0, 1, 1/2), M(1/2, 0, 0, 1)\}.$$

Опираясь на утверждения (18), (23) и на замечание 13, получаем, что

(31) $\mathcal{K}_0$ не принадлежит множеству всех $L_{\supset}$-матриц, каждая из которых имеет вид

$$\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset_{(0,1,z,t)}\rangle.$$

Опираясь на утверждения (18), (19) и на замечание 14, получаем, что

(32) $\mathcal{K}_0$ не принадлежит множеству

$$\{M(0, 1/2, 1, 1/2), M(0, 1/2, 1, 0), M(0, 1/2, 1/2, 1), M(0, 1/2, 1/2, 1/2),\\ M(0, 1/2, 1/2, 0), M(0, 1/2, 0, 1), M(0, 1/2, 0, 1/2), M(0, 1/2, 0, 0)\}.$$

Опираясь на утверждения (18),(20) и на пункт (а) замечания 15, получаем, что

(33) $\mathcal{K}_0$ не принадлежит множеству $\{M(0, 0, 1, 1/2), M(0, 0, 1, 0)\}$.

Опираясь на утверждения (18), (19) и на пункт (б) замечания 15, получаем, что

(34) $\mathcal{K}_0$ не принадлежит множеству

$$\{M(0, 0, 1/2, 1), M(0, 0, 1/2, 1/2), M(0, 0, 1/2, 0),\\ M(0, 0, 0, 1), M(0, 0, 0, 1/2), M(0, 0, 0, 0)\}.$$

Теперь, опираясь на утверждения (17), (24)–(34) и используя лемму 3, можно провести рутинную проверку того, что

$$\mathcal{K}_0 \in \{M(1, 0, 0, 1), M(1, 0, 0, 1/2), M(1/2, 1, 1, 1/2), M(1/2, 1, 0, 1/2),\\ M(1/2, 1/2, 1, 1), M(1/2, 0, 1, 1), M(1/2, 0, 0, 1/2), M(0, 1/2, 1, 1), M(0, 0, 1, 1)\}.$$

Снимая допущения (2) и (1) и обобщая, завершаем доказательство леммы 27.

Лемма 27 доказана.

Лемма 28. *Для всякой $L_{\supset}$-матрицы $\mathcal{K}$: если $\mathcal{K}$ принадлежит множеству*

$$\{M(1, 0, 0, 1), M(1, 0, 0, 1/2), M(1/2, 1, 1, 1/2), M(1/2, 1, 0, 1/2),\\ M(1/2, 1/2, 1, 1), M(1/2, 0, 1, 1), M(1/2, 0, 0, 1/2), M(0, 1/2, 1, 1), M(0, 0, 1, 1)\},$$

то $\mathcal{K}$ есть $L_{\supset}$-матрица, адекватная $L_{\supset}$-логике $Cl_{\supset}$.

Доказательство леммы 28 можно построить, применяя лемму 18, лемму 26, определение 8 и учитывая, что множество

$$\{M(1,0,0,1), M(1,0,0,1/2), M(1/2,1,1,1/2), M(1/2,1,0,1/2),\\ M(1/2,1/2,1,1), M(1/2,0,1,1), M(1/2,0,0,1/2), M(0,1/2,1,1), M(0,0,1,1)\}$$

равно теоретико-множественному объединению множества

$$\{M(1,0,0,1), M(1,0,0,1/2), M(1/2,1/2,1,1),\\ M(1/2,0,1,1), M(1/2,0,0,1/2), M(0,1/2,1,1)\}$$

с множеством

$$\{M(1/2,1,1,1/2), M(1/2,1,0,1/2), M(0,0,1,1)\}.$$

Из леммы 27 и леммы 28 вытекает следующая теорема 1.

Теорема 1. *Для всякой $L_{\supset}$-матрицы $\mathcal{K}$, носитель которой есть $\{1,1/2,0\}$ и выделенное множество которой есть $\{1\}$, верно следующее: $\mathcal{K}$ есть $L_{\supset}$-матрица, адекватная $L_{\supset}$-логике $Cl_{\supset}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}$ принадлежит множеству*

$$\{M(1,0,0,1), M(1,0,0,1/2), M(1/2,1,1,1/2), M(1/2,1,0,1/2),\\ M(1/2,1/2,1,1), M(1/2,0,1,1), M(1/2,0,0,1/2), M(0,1/2,1,1), M(0,0,1,1)\}.$$

Итак, в силу теоремы 1 множество

$$\{M(1,0,0,1), M(1,0,0,1/2), M(1/2,1,1,1/2), M(1/2,1,0,1/2),\\ M(1/2,1/2,1,1), M(1/2,0,1,1), M(1/2,0,0,1/2), M(0,1/2,1,1), M(0,0,1,1)\}$$

является множеством всех $L_{\supset}$-матриц, носитель каждой из которых есть

$$\{1,1/2,0\},$$

выделенное множество каждой из которых есть $\{1\}$ и каждая из которых адекватна $L_{\supset}$-логике $Cl_{\supset}$.

Определение 13. *Три-один-комплектом называем множество*

$$\{M(1,0,0,1), M(1,0,0,1/2), M(1/2,1,1,1/2), M(1/2,1,0,1/2),\\ M(1/2,1/2,1,1), M(1/2,0,1,1), M(1/2,0,0,1/2), M(0,1/2,1,1), M(0,0,1,1)\}.$$

Теорема 2. *Для всякой трехзначной $L_{\supset}$-матрицы $\mathcal{K}$ с одним выделенным значение верно следующее: $\mathcal{K}$ есть $L_{\supset}$-матрица, адекватная $L_{\supset}$-логике $Cl_{\supset}$, тогда и только тогда, когда существует $L_{\supset}$-матрица из три-один-комплекта, изофморфная $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}$.*

Докажем теорему 2.

(1) $\mathcal{K}_0$ есть трехзначная $L_\supset$-матрица с одним выделенным значение (допущение).

Ясно, что

(2) существует x, существует y, существует z и существует g, удовлетворяющие следующим условиям:

(i) x, y, z попарно различны;

(ii) $\mathcal{K}_0 = \langle\{x, y, z\}, \{x\}, g\rangle$.

Пусть

(3) a, b, c попарно различны, $\mathcal{K}_0 = \langle\{a, b, c\}, \{a\}, g_0\rangle$.

(4) a, b, c попарно различны (из (3)).

(5) $\mathcal{K}_0 = \langle\{a, b, c\}, \{a\}, g_0\rangle$ (из (3)).

(6) $\mathcal{K}_0$ есть $L_\supset$-матрица, адеватная $L_\supset$-логике $Cl_\supset$ (допущение).

(7) $\langle\{a, b, c\}, \{a\}, g_0\rangle$ есть $L_\supset$-матрица, адеватная $L_\supset$-логике $Cl_\supset$ (из (5) и (6)).

Тогда понятно, что

(8) $Cl_\supset$ включается в мгножество всех $L_\supset$-формул, общезначимых в $L_\supset$-матрице $\langle\{a, b, c\}, \{a\}, g_0\rangle$.

Опираясь на утверждение 8 и лемму 1, получаем, что верны утверждения (9) и (10).

(9) Для всякого x из $\{a, b, c\}$ верно, что $(xg_0x) = a$.

(10) Для всякого x из $\{a, b, c\}$ верно, что $(xg_0a) = a$.

Очевидно, что

(11) g_0 есть бинарная операция на множестве $\{a, b, c\}$.

Принимая во внимание утверждения (9), (10) и (11), делаем вывод, что

(12) g_0 есть бинарная операция на множестве $\{a, b, c\}$, определяемая таблицей

g_0	a	b	c
a	a	(ag_0b)	(ag_0c)
b	a	a	(bg_0c)
c	a	(cg_0b)	a

Условимся о том, что

(13) h есть отображение множества $\{a, b, c\}$ на множество $\{1, 1/2, 0\}$, определяемое следующей таблицей

h	a	b	c
	1	1/2	0

Поскольку $h((ag_0b)), h((ag_0c)), h((bg_0c)), h((cg_0b))$ принадлежат множеству $\{1, 1/2, 0\}$, то в силу соглашения 2 верно, что

(14) $\supset_{(h((ag_0b)),h((ag_0c)),h((bg_0c)),h((cg_0b)))}$ есть бинарная операция на множестве $\{1, 1/2, 0\}$.

Условимся для удобства, что

(15) $\mapsto = \supset_{(h((ag_0b)),h((ag_0c)),h((bg_0c)),h((cg_0b)))}$.

Опираясь на утверждения (14), (15) и соглашение 2, получаем, что

(16) $\mapsto$ есть бинарная операция на множестве $\{1, 1/2, 0\}$, определяемая таблицей

$\mapsto$	1	1/2	0
1	1	$h((ag_0b))$	$h((ag_0c))$
1/2	1	1	$h((bg_0c))$
0	1	$h((cg_0b))$	1

Поскольку $\{1, 1/2, 0\}$ есть непустое множество, $\{1\}$ есть подмножество множества $\{1, 1/2, 0\}$ и $\mapsto$ есть бинарная операция на $\{1, 1/2, 0\}$, то в силу определения 2 верно, что

(17) $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \mapsto\rangle$ есть $L_\supset$-матрица.

Опираясь на утверждения (12), (13) и (16), убеждаемся, что

(18) для всякого x из $\{a, b, c\}$ и для всякого y из $\{a, b, c\}$

$$h((xg_0y)) = (h(x) \mapsto h(y)).$$

В свете утверждения (13) понятно, что

(19) h есть взаимно-однозначное отображение множества $\{a, b, c\}$ на множество $\{1, 1/2, 0\}$, удовлетворяющее условию: h отображает множество $\{a\}$ на множество $\{1\}$.

(20) h есть изоморфизм $L_\supset$-матрицы $\langle\{a, b, c\}, \{a\}, g_0\rangle$ на $L_\supset$-матрицу

$$\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \mapsto\rangle$$

(из (18) и (19), по определению 11).

(21) Существует изоморфизм $L_{\supset}$-матрицы $\langle\{a,b,c\},\{a\},g_0\rangle$ на $L_{\supset}$-матрицу

$$\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\mapsto\rangle$$

(из (20)).

(22) $L_{\supset}$-матрица $\langle\{a,b,c\},\{a\},g_0\rangle$ изоморфна $L_{\supset}$-матрице $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\mapsto\rangle$ (из (21), по определению 12).

Опираясь на утверждение (22) и на лемму 22, приходим к выводу, что

(23) для всякой $L_{\supset}$-формулы A: $L_{\supset}$-формула A общезначима в $L_{\supset}$-матрице $\langle\{a,b,c\},\{a\},g_0\rangle$ тогда и только тогда, когда $L_{\supset}$-формула A общезначима в $L_{\supset}$-матрице $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\mapsto\rangle$.

(24) $\langle\{a,b,c\},\{a\},g_0\rangle$ есть $L_{\supset}$-матрица, адекватная $L_{\supset}$-логике $Cl_{\supset}$ (из (5) и (6)).

(25) Для всякой $L_{\supset}$-формулы A верно следующее: A общезначима в $L_{\supset}$-матрице $\langle\{a,b,c\},\{a\},g_0\rangle$ тогда и только тогда, когда A принадлежит $L_{\supset}$-логике $Cl_{\supset}$ (из (24), по определению 8).

(26) Для всякой $L_{\supset}$-формулы A верно следующее: A общезначима в $L_{\supset}$-матрице $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\mapsto\rangle$ тогда и только тогда, когда A принадлежит $L_{\supset}$-логике $Cl_{\supset}$ (из (23) и (25)).

(27) $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\mapsto\rangle$ есть $L_{\supset}$-матрица, адекватная $L_{\supset}$-логике $Cl_{\supset}$ (из (26), по определению 8).

Очевидно, что

(28) $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\mapsto\rangle$ есть $L_{\supset}$-матрица, носитель которой есть $\{1,1/2,0\}$ и выделенное множество которой есть $\{1\}$.

(29) $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\mapsto\rangle$ есть $L_{\supset}$-матрица, адекватная $L_{\supset}$-логике $Cl_{\supset}$, тогда и только тогда, когда $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\mapsto\rangle$ принадлежит три-один-комплекту (из (28), по теореме 1 и по соглашению 11).

(30) $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\mapsto\rangle$ принадлежит три-один-комплекту (из (27) и (29)).

(31) $L_{\supset}$-матрица $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\mapsto\rangle$ изоморфна $L_{\supset}$-матрице $\langle\{a,b,c\},\{a\},g_0\rangle$ (из (22), по замечанию 20 (пункт 2)).

(32) $L_{\supset}$-матрица $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\mapsto\rangle$ изоморфна $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}_0$ (из (5) и (31)).

(33) Существует $L_{\supset}$-матрица из три-один-комплекта, изофморфная $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}_0$ (из (30) и (32)).

Снимая допущение (6), получаем, что

(34) если $\mathcal{K}_0$ есть $L_{\supset}$-матрица, адекватная $L_{\supset}$-логике $Cl_{\supset}$, то существует $L_{\supset}$-матрица из три-один-комплекта, изоморфная $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}_0$.

(35) Существует $L_{\supset}$-матрица из три-один-комплекта, изоморфная $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}_0$ (допущение).

Пусть

(36) $\mathcal{K}'$ есть $L_{\supset}$-матрица из три-один-комплекта, изоморфная $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}_0$.

(37) $\mathcal{K}'$ есть $L_{\supset}$-матрица из три-один-комплекта (из (36)).

(38) $\mathcal{K}'$ есть $L_{\supset}$-матрица, изоморфная $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}_0$ (из (36)).

Опираясь на утверждение (37) и на определение 12, легко установить, что

(39) $\mathcal{K}'$ есть $L_{\supset}$-матрица, носитель которой есть $\{1, 1/2, 0\}$ и выделенное множество которой есть $\{1\}$.

Опираясь на теорему 1 и на определение 13, получаем, что

(40) для всякой $L_{\supset}$-матрицы $\mathcal{K}$, носитель которой есть $\{1, 1/2, 0\}$ и выделенное множество которой есть $\{1\}$, верно следующее: $\mathcal{K}$ есть $L_{\supset}$-матрица, адекватная $L_{\supset}$-логике $Cl_{\supset}$, тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}$ принадлежит три-один-комплекту.

(41) $\mathcal{K}'$ есть $L_{\supset}$-матрица, адекватная $L_{\supset}$-логике $Cl_{\supset}$, тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}'$ принадлежит три-один-комплекту (из (39) и (40)).

(42) $\mathcal{K}'$ есть $L_{\supset}$-матрица, адекватная $L_{\supset}$-логике $Cl_{\supset}$ (из (37) и (41)).

Опираясь на лемму 22 и на то, что $\mathcal{K}'$ и $\mathcal{K}_0$ являются $L_{\supset}$-матрицами, получаем, что

(43) для всякой $L_{\supset}$-формулы A: если $L_{\supset}$-матрица $\mathcal{K}'$ изоморфна $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}_0$, то $L_{\supset}$-формула A общезначима в $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}'$ тогда и только тогда, когда $L_{\supset}$-формула A общезначима в $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}_0$.

(44) Для всякой $L_{\supset}$-формулы A: $L_{\supset}$-формула A общезначима в $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}'$ тогда и только тогда, когда $L_{\supset}$-формула A общезначима в $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}_0$ (из (38) и (43)).

(45) Для всякой $L_{\supset}$-формулы A: $L_{\supset}$-формула A общезначима в $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}'$ тогда и только тогда, когда A принадлежит $L_{\supset}$-логике $Cl_{\supset}$ (из (42), по определению 8).

(46) Для всякой $L_{\supset}$-формулы A: $L_{\supset}$-формула A общезначима в $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}_0$ тогда и только тогда, когда A принадлежит $L_{\supset}$-логике $Cl_{\supset}$ (из (44) и (45)).

(47) $\mathcal{K}_0$ есть $L_{\supset}$-матрица, адекватная $L_{\supset}$-логике $Cl_{\supset}$ (из (46), по определению 8).

Снимая допущение (35), получаем, что

(48) если существует $L_{\supset}$-матрица из три-один-комплекта, изоморфная $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}_0$, то $\mathcal{K}_0$ есть $L_{\supset}$-матрица, адекватная $L_{\supset}$-логике $Cl_{\supset}$.

(49) $\mathcal{K}_0$ есть $L_{\supset}$-матрица, адекватная $L_{\supset}$-логике $Cl_{\supset}$ тогда и только тогда, когда существует $L_{\supset}$-матрица из три-один-комплекта, изоморфная $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}_0$ (из (34) и (48)).

Снимая допущение (1) и обобщая, завершаем доказательство теоремы 2.

Теорема 2 доказана.

Соглашение 11. *Обозначаем через* **S** *множество всех множеств, имеющих вид*

$$\{M(1/2,0,1,1), M(1/2,0,0,1/2), M(0,1/2,1,1), \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3\},$$

где

$$\mathcal{K}_1 \in \{M(1,0,0,1), M(1/2,1,1,1/2)\},$$
$$\mathcal{K}_2 \in \{M(1,0,0,1/2), M(1/2,1,0,1/2)\},$$
$$\mathcal{K}_3 \in \{M(1/2,1/2,1,1), M(0,0,1,1)\}.$$

Замечание 25. *Всякий элемент множества* **S** *включается в три-один-комплект.*

Определение 14. *i-независимым множеством $L_{\supset}$-матриц называем такое множество $\mathcal{M}$ $L_{\supset}$-матриц, что для любых различных $L_{\supset}$-матриц $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$, принадлежащих множеству $\mathcal{M}$, неверно, что $L_{\supset}$-матрица $\mathcal{K}_1$ изоморфна $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}_2$.*

Можно доказать следующую лемму 29.

Лемма 29. *Для всякого $\mathcal{M}$: если $\mathcal{M} \in$* **S***, то $\mathcal{M}$ является i-независимым множеством $L_{\supset}$-матриц.*

Определение 15. *i-$Cl_{\supset}$-комплектным множеством $L_{\supset}$-матриц называем такое множество $\mathcal{M}$ трехзначных $L_{\supset}$-матриц с одним выделенным значением, адекватных $L_{\supset}$-логике $Cl_{\supset}$, что для всякой трехзначной $L_{\supset}$-матрицы с одним выделенным значением, адекватной $L_{\supset}$-логике $Cl_{\supset}$, существует изоморфная ей $L_{\supset}$-матрица из $\mathcal{M}$.*

Определение 16. *Минимальным i-$Cl_{\supset}$-комплектным множеством $L_{\supset}$-матриц называем такое $i - Cl_{\supset}$-комлпектное множество $L_{\supset}$-матриц, в которое не включается никакое, отличное от него, i-$Cl_{\supset}$-комплектное множество $L_{\supset}$-матриц.*

Лемма 30. *Всякий элемент X множества* **S** *есть минимальное i-$Cl_{\supset}$-комплектное множество $L_{\supset}$-матриц.*

Докажем лемму 30.

(1) X_0 есть элемент множества $\mathbf{S}$ (допущение).

Ясно, что

(2) три-один-комплект есть множество трехзначных $L_{\supset}$-матриц с одним выделенным значением.

Опираясь на лемму 28 и определение 13, получаем, что

(3) три-один-комплект есть множество $L_{\supset}$-матриц, адекватных $L_{\supset}$-логике $Cl_{\supset}$.

(4) X_0 включается в три-один-комплект (из (1), по замечанию 25).

Опираясь на утверждения (2), (3) и (4), делаем вывод, что

(5) X_0 есть множество трехзначных $L_{\supset}$-матриц с одним выделенным значением, адекватных $L_{\supset}$-логике $Cl_{\supset}$.

Используя леммы 23, 24, 25 и замечание 20 (пункт 1), получаем, что

(6) для всякой $L_{\supset}$-матрицы $\mathcal{K}$ из три-один-комплекта существует такая $L_{\supset}$-матрица $\mathcal{K}'$ из X_0, что $\mathcal{K}'$ есть $L_{\supset}$-матрица, изоморфная $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}$.

(7) $\mathcal{K}_0$ есть трехзначная $L_{\supset}$-матрица с одним выделенным значение, адекватная $L_{\supset}$-логике $Cl_{\supset}$ (допущение).

(8) Для всякой трехзначной $L_{\supset}$-матрицы $\mathcal{K}$ с одним выделенным значением, адекватной $L_{\supset}$-логике $Cl_{\supset}$, существует $L_{\supset}$-матрица из три-один-комплекта, изоморфная $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}$ (по теореме 2).

(9) Существует $L_{\supset}$-матрица из три-один-комплекта, изоморфная $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}_0$ (из (7) и (8)).

Пусть

(10) R есть $L_{\supset}$-матрица из три-один-комплекта, изоморфная $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}_0$.

(11) R есть $L_{\supset}$-матрица из три-один-комплекта (из (10)).

(12) R есть $L_{\supset}$-матрица, изоморфная $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}_0$ (из (10)).

(13) Существует такая $L_{\supset}$-матрица R' из X_0, что R' есть $L_{\supset}$-матрица, изоморфная $L_{\supset}$-матрице R (из (6) и (11)).

Пусть

(14) U есть $L_{\supset}$-матрица из X_0, изоморфная $L_{\supset}$-матрице R.

Опираясь на утверждения (12), (14) и замечание 20 (пункт 3), получаем, что

(15) U есть $L_{\supset}$-матрица из X_0, изоморфная $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}_0$.

(16) Существует $L_{\supset}$-матрица из X_0, изоморфная $L_{\supset}$-матрице R (из (15)).

Снимая допущение (7) и обобщая, получаем, что

(17) для всякого $\mathcal{K}$: если $\mathcal{K}$ есть трехзначная $L_{\supset}$-матрица с одним выделенным значением, адекватная $L_{\supset}$-логике $Cl_{\supset}$, то существует $L_{\supset}$-матрица из X_0, изоморфная $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}_0$.

(18) X_0 является i-$Cl_{\supset}$-комплектным множеством $L_{\supset}$-матриц (из (5) и (17), по определению 14).

(19) Существует такое i-$Cl_{\supset}$-комплектное множество Y $L_{\supset}$-матриц, что $Y \subseteq X_0$ и $Y \neq X_0$ (допущение).

Пусть

(20) Y_0 есть i-$Cl_{\supset}$-комплектное множество $L_{\supset}$-матриц, $Y \subseteq X_0$ и $Y \neq X_0$.

(21) Y_0 есть i-$Cl_{\supset}$-комплектное множество $L_{\supset}$-матриц (из (20)).

(22) $Y \subseteq X_0$ (из (20)).

(23) $Y \neq X_0$ (из (20)).

В свете утверждений (22) и (23) очевидно, что

(24) существует $\mathcal{K}$: $\mathcal{K} \in X_0$ и $\mathcal{K} \notin Y_0$.

Пусть

(25) $\mathcal{K}_0 \in X_0$ и $\mathcal{K}_0 \notin Y_0$.

(26) $\mathcal{K}_0 \in X_0$ (из (25)).

(27) $\mathcal{K}_0 \notin Y_0$ (из (25)).

(28) $\mathcal{K}_0$ есть трехзначная $L_{\supset}$-матрица с одним выделенным значением (из (5) и (26)).

(29) X_0 является i-независимым множеством $L_{\supset}$-матриц (из (1), по лемме 29).

(30) $\mathcal{K}_0$ принадлежит три-один-комплекту (из (4) и (26)).

(31) $\mathcal{K}_0$ есть $L_{\supset}$-матрица, адекватная $L_{\supset}$-логике $Cl_{\supset}$ (из (3) и (30)).

(32) Существует $L_{\supset}$-матрица из Y_0, изоморфная $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}_0$ (из (21), (28), (31), по определению 15).

Пусть

(33) T есть $L_{\supset}$-матрица из Y_0, изоморфная $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}_0$.

(34) $T \in Y_0$ (из (33)).

(35) $T \neq \mathcal{K}_0$ (из (27) и (34)).

(36) $T \in X_0$ (из (22) и (34)).

Опираясь на утверждения (26), (33), (35) и (36), получаем, что

(37) существуют такие различные $L_\supset$-матрицы $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$, принадлежащие множеству X_0, что $L_\supset$-матрица $\mathcal{K}_1$ изоморфна $L_\supset$-матрице $\mathcal{K}_2$.

(38) Неверно, что x_0 является i-независимым множеством $L_\supset$-матриц (из (37), по определению 14).

Утверждение (38) противоречит утверждению (29).

Следовательно, неверно допущение (19).

Но тогда

(39) в X_0 не включается никакое i-$Cl_\supset$-комплектное множество $L_\supset$-матриц, отличное от X_0.

(40) X_0 есть минимальное i-$Cl_\supset$-комплектное множество $L_\supset$-матриц (из (18) и (39), по определению 16).

Снимая допущение (1) и обобщая, получаем, что для всякого X: если X есть элемент множества $\mathbf{S}$, то X есть минимальное i-$Cl_\supset$-комплектное множество $L_\supset$-матриц.

Иначе говоря, всякий элемент X множества $\mathbf{S}$ есть минимальное i-$Cl_\supset$-комплектное множество $L_\supset$-матриц.

Лемма 30 доказана.

Очевидна справедливость следующего замечания 26.

Замечание 26. *Всякий элемент X множества $\mathbf{S}$ есть множество $L_\supset$-матриц, носитель каждой из которых есть $\{1, 1/2, 0\}$, а выделенное множество каждой из которых есть $\{1\}$.*

Лемма 31. *Если $\mathcal{K}$ есть $L_\supset$-матрица, носитель которой $\{1, 1/2, 0\}$ и выделенное множество которой есть $\{1\}$, и при этом $\mathcal{K}$ есть $L_\supset$-матрица, изоморфная $L_\supset$-матрице $M(1/2, 0, 1, 1)$, то $\mathcal{K} = M(1/2, 0, 1, 1)$.*

Докажем лемму 31.

(1) $\mathcal{K}$ есть $L_\supset$-матрица, носитель которой $\{1, 1/2, 0\}$ и выделенное множество которой есть $\{1\}$, и при этом $\mathcal{K}$ есть $L_\supset$-матрица, изоморфная $L_\supset$-матрице $M(1/2, 0, 1, 1)$ (допущение).

(2) $\mathcal{K}$ есть $L_\supset$-матрица, носитель которой $\{1, 1/2, 0\}$ и выделенное множество которой есть $\{1\}$ (из (1)).

(3) $\mathcal{K}$ есть $L_{\supset}$-матрица, изоморфная $L_{\supset}$-матрице $M(1/2, 0, 1, 1)$ (из (1)).

Опираясь на утверждение (3) и лемму 22, получаем, что

(4) для всякой $L_{\supset}$-формулы A: $L_{\supset}$-формула A общезначима в $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда $L_{\supset}$-формула A общезначима в $L_{\supset}$-матрице $M(1/2, 0, 1, 1)$.

Опираясь на утверждение 1 и на теорему 1, получаем, что

(5) $M(1/2, 0, 1, 1)$ есть $L_{\supset}$-матрица, адекватная $L_{\supset}$-логике $Cl_{\supset}$.

Исходя из утверждений (4) и (5) и используя определение 8, получаем, что

(6) $\mathcal{K}$ есть $L_{\supset}$-матрица, адекватная $L_{\supset}$-логике $Cl_{\supset}$.

(7) $\mathcal{K}$ принадлежит три-один-комплекту (из (2) и (6), по теореме 1).

Далее убеждаемся, что

(8) ни одна $L_{\supset}$-матрица из три-один-комплекта, отличная от $M(1/2, 0, 1, 1)$, не изоморфна этой $L_{\supset}$-матрице.

(9) Если $\mathcal{K}$ есть $L_{\supset}$-матрица из три-один-комплекта и $\mathcal{K} \neq M(1/2, 0, 1, 1)$, то неверно, что $\mathcal{K}$ есть $L_{\supset}$-матрица, изоморфная $L_{\supset}$-матрице $M(1/2, 0, 1, 1)$ (из (8)).

(10) Если $\mathcal{K} \neq M(1/2, 0, 1, 1)$, то неверно, что $\mathcal{K}$ есть $L_{\supset}$-матрица, изоморфная $L_{\supset}$-матрице $M(1/2, 0, 1, 1)$ (из (7) и (9)).

(11) $\mathcal{K} = M(1/2, 0, 1, 1)$ (из (3) и (10)).

Снимая допущение (1), завершаем доказательство леммы 31.

Лемма 31 доказана.

Лемма 32. *Если $\mathcal{K}$ есть $L_{\supset}$-матрица, носитель которой есть $\{1, 1/2, 0\}$ и выделенное множество которой есть $\{1\}$, и при этом $\mathcal{K}$ есть $L_{\supset}$-матрица, изоморфная $L_{\supset}$-матрице $M(1/2, 0, 0, 1/2)$, то $\mathcal{K} = M(1/2, 0, 0, 1/2)$.*

Доказательство леммы 32 аналогично данному выше доказательству леммы 31.

Лемма 33. *Если $\mathcal{K}$ есть $L_{\supset}$-матрица, носитель которой есть $\{1, 1/2, 0\}$ и выделенное множество которой есть $\{1\}$, и при этом $\mathcal{K}$ есть $L_{\supset}$-матрица, изоморфная $L_{\supset}$-матрице $M(0, 1/2, 1, 1)$, то $\mathcal{K} = M(0, 1/2, 1, 1)$.*

Доказательство леммы 33 аналогично данному выше доказательству леммы 31.

Лемма 34. *Если $\mathcal{K}$ есть $L_{\supset}$-матрица, носитель которой есть $\{1, 1/2, 0\}$ и выделенное множество которой есть $\{1\}$, и при этом $\mathcal{K}$ есть $L_{\supset}$-матрица, изоморфная $L_{\supset}$-матрице $M(1, 0, 0, 1)$, то $\mathcal{K} = M(1, 0, 0, 1)$ или $\mathcal{K} = M(1/2, 1, 1, 1/2)$.*

Докажем лемму 34.

(1) $\mathcal{K}$ есть $L_{\supset}$-матрица, носитель которой есть $\{1, 1/2, 0\}$ и выделенное множество которой есть $\{1\}$, и при этом $\mathcal{K}$ есть $L_{\supset}$-матрица, изоморфная $L_{\supset}$-матрице $M(1, 0, 0, 1)$ (допущение).

(2) $\mathcal{K}$ есть $L_{\supset}$-матрица, носитель которой есть $\{1, 1/2, 0\}$ и выделенное множество которой есть $\{1\}$ (из (1)).

(3) $\mathcal{K}$ есть $L_{\supset}$-матрица, изоморфная $L_{\supset}$-матрице $M(1, 0, 0, 1)$ (из (1)).

Опираясь на утверждение (3) и лемму 22, получаем, что

(4) для всякой $L_{\supset}$-формулы A: $L_{\supset}$-формула A общезначима в $L_{\supset}$-матрице $\mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда $L_{\supset}$-формула A общезначима в $L_{\supset}$-матрице $M(1, 0, 0, 1)$.

Опираясь на утверждение (1) и на теорему 1, получаем, что

(5) $M(1, 0, 0, 1)$ есть $L_{\supset}$-матрица, адекватная $L_{\supset}$-логике $Cl_{\supset}$.

Исходя из утверждений (4) и (5) и используя определение 8, получаем, что

(6) $\mathcal{K}$ есть $L_{\supset}$-матрица, адекватная $L_{\supset}$-логике $Cl_{\supset}$.

(7) $\mathcal{K}$ принадлежит три-один-комплекту (из (2) и (6), по теореме 1 и по определению 13).

Можно убедиться, что

(8) для всякой $L_{\supset}$-матрицы U из три-один-комплекта: если $U \neq M(1, 0, 0, 1)$ и $U \neq M(1/2, 1, 1, 1/2)$, то U есть $L_{\supset}$-матрица, не изоморфная $L_{\supset}$-матрице $M(1, 0, 0, 1)$.

(9) $\mathcal{K} = M(1, 0, 0, 1)$ или $\mathcal{K} = M(1/2, 1, 1, 1/2)$ (из (3), (7) и (8)).

Снимая допущение (1), завершаем доказательство леммы 34.

Леммы 34 доказана.

Лемма 35. *Если $\mathcal{K}$ есть $L_{\supset}$-матрица, носитель которой есть $\{1, 1/2, 0\}$ и выделенное множество которой есть $\{1\}$, и при этом $\mathcal{K}$ есть $L_{\supset}$-матрица, изоморфная $L_{\supset}$-матрице $M(1, 0, 0, 1/2)$, то*

$$\mathcal{K} = M(1, 0, 0, 1/2) \quad \textit{или} \quad \mathcal{K} = M(1/2, 1, 0, 1/2).$$

Доказательство леммы 35 аналогично данному выше доказательству леммы 34.

Лемма 36. *Если $\mathcal{K}$ есть $L_{\supset}$-матрица, носитель которой есть $\{1, 1/2, 0\}$ и выделенное множество которой есть $\{1\}$, и при этом $\mathcal{K}$ есть $L_{\supset}$-матрица, изоморфная $L_{\supset}$-матрице $M(1/2, 1/2, 1, 1)$, то $\mathcal{K} = M(1/2, 1/2, 1, 1)$ или $\mathcal{K} = M(0, 0, 1, 1)$.*

Доказательство леммы 36 аналогично данному выше доказательству леммы 34.

Лемма 37. *Если Y есть i-$Cl_\supset$-комплектное множество $L_\supset$-матриц, носитель каждой из которых есть $\{1, 1/2, 0\}$ и выделенное множество каждой из которых есть $\{1\}$, то существует такой элемент X множества* $\mathbf{S}$*, что $X \subseteq Y$.*

Докажем лемму 37.

(1) Y есть i-$Cl_\supset$-комплектное множество $L_\supset$-матриц, носитель каждой из которых есть $\{1, 1/2, 0\}$ и выделенное множество каждой из которых есть $\{1\}$ (допущение).

(2) Y есть i-$Cl_\supset$-комплектное множество $L_\supset$-матриц (из (1)).

(3) Для всякой трехзначной $L_\supset$-матрицы с одним выделенным значением, адекватной $L_\supset$-логике $Cl_\supset$, существует изоморфная ей $L_\supset$-матрица из Y_0 (из (2), по определению 15).

Опираясь на утверждение (3), на теорему 1 и на определение 13, получаем, что

(4) для всякой $L_\supset$-матрицы из три-один-комплекта существует изоморфная ей $L_\supset$-матрица из Y.

Очевидно, что

(5) множество

$$\{M(1/2, 0, 1, 1), M(1/2, 0, 0, 1/2), M(0, 1/2, 1, 1), \\ M(1, 0, 0, 1), M(1, 0, 0, 1/2), M(1/2, 1/2, 1, 1)\}$$

включается в три-один-комплект.

(6) Для всякой матрицы из

$$\{M(1/2, 0, 1, 1), M(1/2, 0, 0, 1/2), M(0, 1/2, 1, 1), \\ M(1, 0, 0, 1), M(1, 0, 0, 1/2), M(1/2, 1/2, 1, 1)\}$$

существует изоморфная ей $L_\supset$-матрица из Y (из (4) и (5)).

(7) $M(1/2, 0, 1, 1) \in Y$.

Докажем утверждение (7).

В свете утверждения (6) ясно, что

(7.1) Существует $L_\supset$-матрица из Y, изоморфная $L_\supset$-матрице $M(1/2, 0, 1, 1)$.

Пусть

(7.2) $\mathcal{K}'$ есть $L_\supset$-матрица из Y, $\mathcal{K}'$ есть $L_\supset$-матрица, изоморфная $L_\supset$-матрице $M(1/2, 0, 1, 1)$.

(7.3) $\mathcal{K}'$ есть $L_\supset$-матрица из Y (из (7.2)).

(7.4) $\mathcal{K}'$ есть $L_\supset$-матрица, изоморфная $L_\supset$-матрице $M(1/2, 0, 1, 1)$ (из (7.2)).

(7.5) $\mathcal{K}'$ есть $L_\supset$-матрица, носитель которой есть $\{1, 1/2, 0\}$ и выделенное множество которой есть $\{1\}$ (из (1) и (7.3)).

(7.6) $\mathcal{K}' = M(1/2, 0, 1, 1)$ (из (7.4) и (7.5), по лемме 31).

(7.7) $M(1/2, 0, 1, 1) \in Y$ (из (7.3) и (7.6)).

Утверждение 7 доказано.

(8) $M(1/2, 0, 0, 1/2) \in Y$.

В доказательстве утверждения (8), аналогичном данному выше доказательству утверждения (7), роль, подобную роли леммы 31 в предложенном здесь доказательстве утверждения (7), выполняет лемма 32.

(9) $M(0, 1/2, 1, 1) \in Y$.

В доказательстве утверждения (9), аналогичном данному выше доказательству утверждения (7), роль, подобную роли леммы 31 в предложенном здесь доказательстве утверждения (7), выполняет лемма 33.

(10) $M(1, 0, 0, 1) \in Y$ или $M(1/2, 1, 1, 1/2) \in Y$.

Докажем утверждение (10).

В свете утверждения (6) ясно, что

(10.1) существует $L_\supset$-матрица из Y, изоморфная $L_\supset$-матрице $M(1, 0, 0, 1)$.

Пусть

(10.2) $\mathcal{K}^\times$ есть $L_\supset$-матрица из Y, $\mathcal{K}^\times$ есть $L_\supset$-матрица, изоморфная $L_\supset$-матрице $M(1, 0, 0, 1)$.

(10.3) $\mathcal{K}^\times$ есть $L_\supset$-матрица из Y (из (10.2)).

(10.4) $\mathcal{K}^\times$ есть $L_\supset$-матрица, изоморфная $L_\supset$-матрице $M(1, 0, 0, 1)$ (из (10.2)).

(10.5) $\mathcal{K}^\times$ есть $L_\supset$-матрица, носитель которой есть $\{1, 1/2, 0\}$ и выделенное множество которой есть $\{1\}$ (из (1) и (10.3)).

(10.6) $\mathcal{K}^\times = M(1, 0, 0, 1)$ или $\mathcal{K}^\times = M(1/2, 1, 1, 1/2)$ (из (10.4) и (10.5), по лемме 34).

(10.7) $M(1, 0, 0, 1) \in Y$ или $M(1/2, 1, 1, 1/2) \in Y$ (из (10.3) и (10.6)).

Утверждение (10) доказано.

(11) $M(1,0,0,1/2) \in Y$ или $M(1/2,1,0,1/2) \in Y$.

В доказательстве утверждения (11), аналогичном данному выше доказательству утверждения (10), роль, подобную роли леммы 34 в предложенном здесь доказательстве утверждения (10), выполняет лемма 35.

(12) $M(1/2,1/2,1,1) \in Y$ или $M(0,0,1,1) \in Y$.

В доказательстве утверждения (12), аналогичном данному выше доказательству утверждения (10), роль, подобную роли леммы 34 в предложенном здесь доказательстве утверждения (10), выполняет лемма 36.

(13) $\{M(1/2,0,1,1), M(1/2,0,0,1/2), M(0,1/2,1,1)\} \subseteq Y$ (из (7), (8) и (9)).

(14) Из (10) и (13):

$$\{M(1/2,0,1,1), M(1/2,0,0,1/2), M(0,1/2,1,1), M(1,0,0,1)\} \subseteq Y$$

или

$$\{M(1/2,0,1,1), M(1/2,0,0,1/2), M(0,1/2,1,1), M(1/2,1,1,1/2)\} \subseteq Y$$

(15) Из (11) и (14):

$$\begin{gathered}\{M(1/2,0,1,1), M(1/2,0,0,1/2), M(0,1/2,1,1),\\ M(1,0,0,1), M(1,0,0,1/2)\} \subseteq Y,\end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered}\{M(1/2,0,1,1), M(1/2,0,0,1/2), M(0,1/2,1,1),\\ M(1,0,0,1), M(1/2,1,0,1/2)\} \subseteq Y,\end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered}\{M(1/2,0,1,1), M(1/2,0,0,1/2), M(0,1/2,1,1),\\ M(1/2,1,1,1/2), M(1,0,0,1/2)\} \subseteq Y,\end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered}\{M(1/2,0,1,1), M(1/2,0,0,1/2), M(0,1/2,1,1),\\ M(1/2,1,1,1/2), M(1/2,1,0,1/2)\} \subseteq Y\end{gathered}$$

(16) В силу утверждений (12) и (15) верно, что

$$\begin{gathered}\{M(1/2,0,1,1), M(1/2,0,0,1/2), M(0,1/2,1,1),\\ M(1,0,0,1), M(1,0,0,1/2), M(1/2,1/2,1,1)\} \subseteq Y,\end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered}\{M(1/2,0,1,1), M(1/2,0,0,1/2), M(0,1/2,1,1),\\ M(1,0,0,1), M(1,0,0,1/2), M(0,0,1,1)\} \subseteq Y,\end{gathered}$$

$$\text{или}$$
$$\{M(1/2,0,1,1), M(1/2,0,0,1/2), M(0,1/2,1,1),$$
$$M(1,0,0,1), M(1/2,1,0,1/2), M(1/2,1/2,1,1)\} \subseteq Y,$$
$$\text{или}$$
$$\{M(1/2,0,1,1), M(1/2,0,0,1/2), M(0,1/2,1,1),$$
$$M(1,0,0,1), M(1/2,1,0,1/2), M(0,0,1,1)\} \subseteq Y,$$
$$\text{или}$$
$$\{M(1/2,0,1,1), M(1/2,0,0,1/2), M(0,1/2,1,1),$$
$$M(1/2,1,1,1/2), M(1,0,0,1/2), M(1/2,1/2,1,1)\} \subseteq Y,$$
$$\text{или}$$
$$\{M(1/2,0,1,1), M(1/2,0,0,1/2), M(0,1/2,1,1),$$
$$M(1/2,1,1,1/2), M(1,0,0,1/2), M(0,0,1,1)\} \subseteq Y,$$
$$\text{или}$$
$$\{M(1/2,0,1,1), M(1/2,0,0,1/2), M(0,1/2,1,1),$$
$$M(1/2,1,1,1/2), M(1/2,1,0,1/2), M(1/2,1/2,1,1)\} \subseteq Y,$$
$$\text{или}$$
$$\{M(1/2,0,1,1), M(1/2,0,0,1/2), M(0,1/2,1,1),$$
$$M(1/2,1,1,1/2), M(1/2,1,0,1/2), M(0,0,1,1)\} \subseteq Y.$$

Заметив, что всякое множество, включение которого в Y констатируется в утверждении (16), принадлежит множеству $\mathbf{S}$, и опираясь на утверждение (16), делаем вывод, что

(17) существует такой элемент X множества $\mathbf{S}$, что $X \subseteq Y$.

Снимая допущение (1), завершаем доказательство леммы 37.

Лемма 37 доказана.

Лемма 38. *Для всякого минимального i-$Cl_\supset$-комплектного множества X $L_\supset$-матриц: если X есть множество, каждый элемент которого является $L_\supset$-матрицей, носитель которой есть $\{1, 1/2, 0\}$ и выделенное множество которой есть $\{1\}$, то $X \in \mathbf{S}$.*

Докажем лемму 38.

(1) X_0 есть минимальное i-$Cl_\supset$-комплектное множество $L_\supset$-матриц (допущение).

(2) X_0 есть множество, каждый элемент которого является $L_\supset$-матрицей, носитель которой есть $\{1, 1/2, 0\}$ и выделенное множество которой есть $\{1\}$ (допущение).

(3) X_0 есть i-$Cl_\supset$-комплектное множество $L_\supset$-матриц (из (1), по определению 15).

(4) X_0 есть i-$Cl_\supset$-комплектное множество $L_\supset$-матриц, носитель каждой из которых есть $\{1, 1/2, 0\}$ и выделенное множество которой есть $\{1\}$ (из (2) и (3)).

(5) Существует такой элемент Z множества $\mathbf{S}$, что $Z \subseteq X_0$ (из (4), по лемме 37).

Пусть

(6) $Z_0 \in \mathbf{S}$ и $Z_0 \subseteq X_0$.

(7) $Z_0 \in \mathbf{S}$ (из (6)).

(8) $Z_0 \subseteq X_0$ (из (6)).

(9) Z_0 есть минимальное i-$Cl_\supset$-комплектное множество $L_\supset$-матриц (из (7), по лемме 30).

(10) Z_0 есть i-$Cl_\supset$-комплектное множество $L_\supset$-матриц (из (9), по определению 15).

(11) Существует i-$Cl_\supset$-комплектное множество $L_\supset$-матриц, включающееся в X_0 (из (8) и (10)).

(12) $Z_0 \neq X_0$ (допущение).

(13) Неверно, что X_0 есть минимальное i-$Cl_\supset$-комплектное множество $L_\supset$-матриц (из (11) и (12), по определению 16).

Утверждение (13) противоречит утверждению (1).

Следовательно, неверно допущение (12).

Но тогда

(14) $Z_0 = X_0$.

(15) $X_0 \in \mathbf{S}$ (из (7) и (14)).

Снимая допущения (2) и (1) и обобщая, завершаем доказательство леммы 38.

Лемма 38 доказана.

Из лемм 30, 38 и замечания 26 вытекает следующая теорема 3.

Теорема 3. $\mathbf{S}$ *есть множество всех минимальных i-$Cl_\supset$-комплектных множеств $L_\supset$-матриц, каждому из которых принадлежат только $L_\supset$-матрицы, носитель каждой из которых* $\{1, 1/2, 0\}$*, а выделенное множество каждой из которых есть* $\{1\}$.

Литература

Попов 2019 — *Попов В. М.* К проблеме расширения матричной семантики, адекватной классической импликативной логике, до матричной семантики, адекватной классической импликативно-негативной логике // Логико-философские штудии. 2019. Т. 17, № 1. С. 1–31.

Соболев 1979 — *Соболев С. К.* Импликативное пропозициональное исчисление // Математическая энциклопедия : Гл. ред. И. М. Виноградов. Т. 2: Д — Коо. М.: Советская энциклопедия, 1979. С. 523.

Черч 1960 — *Черч А.* Введение в математическую логику. Т. 1. М.: Издательство иностранной литературы, 1960.