DOI: 10.52119/LPHS.2019.82.28.006

Владимир Попов[1]

НЕМНОГО О ТРЕХЗНАЧНЫХ ЛОГИЧЕСКИХ МАТРИЦАХ С ОДНИМ ВЫДЕЛЕННЫМ ЗНАЧЕНИЕМ[2]

Аннотация. Эта статья дополняет работу В. М. Попова «Трехзначные логические матрицы с одним выделенным значением, адекватные классической импликативной логике», которая опубликована в настоящем номере журнала. Представленный в предлагаемой статье результат исследования: указаны две логические матрицы $M(1/2, 0, 1, 1/2)$ и $M(1/2, 0, 0, 1)$, такие, что множество всех логических матриц вида $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g\rangle$ (где g есть бинарная операция на $\{1, 1/2, 0\}$), каждая из которых такова, что множество всех $L_\supset$-формул, общезначимых в этой $L_\supset$-матрице, включает интуиционистскую импликативную логику и включается в классическую импликативную логику, но отлично от последней, есть множество $\{M(1/2, 0, 1, 1/2), M(1/2, 0, 0, 1)\}$; при этом логические матрицы $M(1/2, 0, 1, 1/2)$ и $M(1/2, 0, 0, 1)$ изоморфны.

Ключевые слова: трехзначная логическая матрица с одним выделенным значением, классическая импликативная логика, интуиционистская импликативная логика, изоморфизм логических матриц.

Vladimir Popov

A NOTE ON THREE-VALUED LOGICAL MATRICES WITH ONE DESIGNATED VALUE

Abstract. This article supplements the paper “Three-Valued Logical Matrices with One Designated Value, Adequate to Classical Implicative Logic” by Vladimir Popov, published in the present issue of the journal. The result of the study presented in the present article: two such logical matrices $M(1/2, 0, 1, 1/2)$ and $M(1/2, 0, 0, 1)$ are indicated that the set of all logical matrices of the form $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g\rangle$ (where g is a binary operation on $\{1, 1/2, 0\}$), each of which is adequate to implicative logic, including implicative intuitionistic logic and included in implicative classical logic, but different from the last, is the set $\{M(1/2, 0, 1, 1/2), M(1/2, 0, 0, 1)\}$; the logical matrices $M(1/2, 0, 1, 1/2)$ and $M(1/2, 0, 0, 1)$ are isomorphic.

Keywords: three-valued logical matrix with one designated value, classical implicative logic, intuitionistic implicative logic, isomorphism of logical matrices.

Эта статья написана как дополнение к работе В. М. Попова «Трехзначные логические матрицы с одним выделенным значением, адекватные классической импликативной логике», опубликованной в настоящем номере журнала (Попов 2019), поэтому терминология работы (Попов 2019) применяется в предлагаемой статье без каких-либо комментариев.

Нам потребуется исчисление $HInt_\supset$ гильбертовского типа. Языком этого

[1] *Попов Владимир Михайлович* — к. филос. н., доцент кафедры логики философского факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.
Vladimir Popov, PhD, associate professor, Dept. of Logic, Lomonosov Moscow State University. pphiloslog@mail.ru

[2] Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 19-011-00536А.

исчисления является $L_\supset$. Правило modus ponens в $L_\supset$ есть единственное правило исчисления $HInt_\supset$. Аксиомами исчисления $HInt_\supset$ являются все те и только те $L_\supset$-формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих видов (здесь A, B и C — $L_\supset$-формулы): (1) $(A \supset (B \supset A))$, (2) $((A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C)))$. Определение $HInt_\supset$-доказательства $L_\supset$-формулы аналогично определению $HCl_\supset$-доказательства $L_\supset$-формулы, данному в (Попов 2019). Определение $HInt_\supset$-доказуемой $L_\supset$-формулы обычно. Следуя традиции, мы называем множество $Int_\supset$ всех $HInt_\supset$-доказуемых $L_\supset$-формул интуиционистской импликативной логикой.

В силу замечания 4 из (Попов 2019) верно, что

(I) $M(1/2, 0, 1, 1/2)$ и $M(1/2, 0, 0, 1)$ являются $L_\supset$-матрицами.

Нетрудно доказать, что

(II) множество всех $L_\supset$-формул, общезначимых в $L_\supset$-матрице $M(1/2, 0, 1, 1/2)$, и множество всех $L_\supset$-формул, общезначимых в $L_\supset$-матрице $M(1/2, 0, 0, 1)$, замкнуты относительно правила modus ponens в $L_\supset$.

Легко установить, что

(III) всякая аксиома исчисления $HInt_\supset$ является $L_\supset$-формулой, которая общезначима как в $L_\supset$-матрице $M(1/2, 0, 1, 1/2)$, так и $L_\supset$-матрице $M(1/2, 0, 0, 1)$.

Основываясь на утверждениях (II) и (III) и используя возвратную индукцию по длине $HInt_\supset$-доказательства $L_\supset$-формулы, можно доказать, что

(IV) всякая $HInt_\supset$-доказуемая $L_\supset$-формула является $L_\supset$-формулой, которая общезначима как в как в $L_\supset$-матрице $M(1/2, 0, 1, 1/2)$, так и $L_\supset$-матрице $M(1/2, 0, 0, 1)$.

В свете утверждения (IV) ясно, что

(V) $Int_\supset$ включается и в множество всех $L_\supset$-формул, общезначимых в $L_\supset$-матрице $M(1/2, 0, 1, 1/2)$, и в множество всех $L_\supset$-формул, общезначимых в $L_\supset$-матрице $M(1/2, 0, 0, 1)$.

Опираясь на табличные определения операций $\supset_{(1/2,0,1,1/2)}, \supset_{(1/2,0,0,1)}$ и $\supset_{Cl}$, а также на тот факт, что всякая оценка языка $L_\supset$ в $M(Cl_\supset)$ является оценкой языка $L_\supset$ в $L_\supset$-матрице $M(1/2, 0, 1, 1/2)$ и является оценкой в $L_\supset$-матрице $M(1/2, 0, 0, 1)$, приходим к выводу о том, что

(VI) множество всех $L_\supset$-формул, общезначимых в $L_\supset$-матрице $M(1/2, 0, 1, 1/2)$, и множество всех $L_\supset$-формул, общезначимых в $L_\supset$-матрице $M(1/2, 0, 0, 1)$, включаются в $Cl_\supset$.

Используя замечание 12(б) из (Попов 2019) и тот факт, что $(((p_1 \supset p_2) \supset p_1) \supset p_1) \in Cl_\supset$, делаем вывод о том, что верны утверждения (VII) и (VIII).

(VII) Множество всех $L_\supset$-формул, общезначимых в $L_\supset$-матрице $M(1/2, 0, 1, 1/2)$, не равно $Cl_\supset$.

(VIII) Множество всех $L_\supset$-формул, общезначимых в $L_\supset$-матрице $M(1/2, 0, 0, 1)$, не равно $Cl_\supset$.

Определение INC-матрицы: INC-матрицей называем $L_\supset$-матрицу

$$\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g\rangle,$$

удовлетворяющую следующим трем условиям: (1) множество всех $L_\supset$-формул, общезначимых в $L_\supset$-матрице $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g\rangle$, включает $Int_\supset$, (2) множество всех $L_\supset$-формул, общезначимых в $L_\supset$-матрице $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g\rangle$, включается в $Cl_\supset$, (3) множество всех $L_\supset$-формул, общезначимых в $L_\supset$-матрице

$$\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g\rangle,$$

не равно $Cl_\supset$. Ясно, что

(IX) $M(1/2, 0, 1, 1/2)$ и $M(1/2, 0, 0, 1)$ являются $L_\supset$-матрицами вида

$$\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g\rangle.$$

Опираясь на утверждения (V), (VI), (VII), (VIII) и (IX), получаем, что

(X) $M(1/2, 0, 1, 1/2)$ и $M(1/2, 0, 0, 1)$ являются INC-матрицами.

Покажем, что

(XI) для всяких x, y, z и t из $\{1, 1/2, 0\}$: если $\langle x, y, z, t\rangle \neq \langle 1/2, 0, 1, 1/2\rangle$ и $\langle x, y, z, t\rangle \neq \langle 1/2, 0, 1, 1/2\rangle$, то $M(x, y, z, t)$ не является INC-матрицей.

Используя замечание 7 из (Попов 2019) и тот факт, что $((p_1 \supset p_1) \supset p_1) \notin Cl_\supset$, получаем, что

(XI.1) ни одна $L_\supset$-матрица вида $M(1, 1, z, t)$ не является INC-матрицей.

Используя замечание 8 из (Попов 2019) и тот факт, что $((p_1 \supset p_1) \supset ((p_1 \supset p_1) \supset p_1)) \notin Cl_\supset$, получаем, что

(XI.2) ни одна $L_\supset$-матрица вида $M(1, 1/2, z, t)$ не является INC-матрицей.

Используя замечание 9 из (Попов 2019) и тот факт, что $((p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset ((p_1 \supset p_2) \supset (p_1 \supset p_3))) \in Int_\supset$, получаем, что

(XI.3) ни одна $L_\supset$-матрица из

$$\{M(1, 0, 1, 1), M(1, 0, 1, 1/2), M(1, 0, 1, 0), M(1, 0, 1/2, 1), \\ M(1, 0, 1/2, 1/2), M(1, 0, 1/2, 0), M(1, 0, 0, 0)\}$$

не является INC-матрицей.

Используя замечание 10 из (Попов 2019) и тот факт, что $((p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset ((p_1 \supset p_2) \supset (p_1 \supset p_3))) \in Int_\supset$, получаем, что

(XI.4) ни одна $L_\supset$-матрица из

$$\{M(1/2, 1, 1, 1), M(1/2, 1, 1, 0), M(1/2, 1, 1/2, 1), M(1/2, 1, 1/2, 1/2), \\ M(1/2, 1, 1/2, 0), M(1/2, 1, 0, 1), M(1/2, 1, 0, 0)\}$$

не является INC-матрицей.

Используя замечание 11 из (Попов 2019) и тот факт, что $((p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset ((p_1 \supset p_2) \supset (p_1 \supset p_3))) \in Int_\supset$, получаем, что

(XI.5) ни одна $L_\supset$-матрица из

$$\{M(1/2, 1/2, 1, 1/2), M(1/2, 1/2, 1, 0), M(1/2, 1/2, 1/2, 1), M(1/2, 1/2, 1/2, 1/2), M(1/2, 1/2, 1/2, 0), M(1/2, 1/2, 0, 1), M(1/2, 1/2, 0, 1/2), M(1/2, 1/2, 0, 0)\}$$

не является INC-матрицей.

Используя замечание 12(а) из (Попов 2019) и тот факт, что $((p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset ((p_1 \supset p_2) \supset (p_1 \supset p_3))) \in Int_\supset$, получаем, что

(XI.6) ни одна $L_\supset$-матрица из

$$\{M(1/2, 0, 1, 0), M(1/2, 0, 1/2, 1), M(1/2, 0, 1/2, 1/2), M(1/2, 0, 1/2, 0), M(1/2, 0, 0, 0)\}$$

не является INC-матрицей.

Используя замечание 13 из (Попов 2019) и тот факт, что $((p_1 \supset p_1) \supset ((p_1 \supset p_1) \supset p_1)) \notin Cl_\supset$, получаем, что

(XI.7) ни одна $L_\supset$-матрица вида $M(0, 1, z, t)$ не является INC-матрицей.

Используя замечание 14 из (Попов 2019) и тот факт, что $(p_1 \supset (p_2 \supset p_1)) \in Int_\supset$, получаем, что

(XI.8) ни одна $L_\supset$-матрица из

$$\{M(0, 1/2, 1, 1/2), M(0, 1/2, 1, 0), M(0, 1/2, 1/2, 1), M(0, 1/2, 1/2, 1/2), M(0, 1/2, 1/2, 0), M(0, 1/2, 0, 1), M(0, 1/2, 0, 1/2), M(0, 1/2, 0, 0)\}$$

не является INC-матрицей.

Используя замечание 15(а) из (Попов 2019) и тот факт, что $((p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset ((p_1 \supset p_2) \supset (p_1 \supset p_3))) \in Int_\supset$, получаем, что

(XI.9) ни одна $L_\supset$-матрица из $\{M(0, 0, 1, 1/2), M(0, 0, 1, 0)\}$ не является INC-матрицей.

Используя замечание 15(б) из (Попов 2019) и тот факт, что $(p_1 \supset (p_2 \supset p_1)) \in Int_\supset$, получаем, что

(XI.10) ни одна $L_\supset$-матрица из

$$\{M(0, 0, 1/2, 1), M(0, 0, 1/2, 1/2), M(0, 0, 1/2, 0), M(0, 0, 0, 1), M(0, 0, 0, 1/2), M(0, 0, 0, 0)\}$$

не является INC-матрицей.

Используя теорему 1 из (Попов 2019), получаем, что

(XI.11) ни одна $L_{\supset}$-матрица из

$$\{M(1,0,0,1), M(1,0,0,1/2), M(1/2,1,1,1/2), M(1/2,1,0,1/2), M(1/2,1/2,1,1), M(1/2,0,1,1), M(1/2,0,0,1/2), M(0,1/2,1,1), M(0,0,1,1)\}$$

не является INC-матрицей.

Опираясь на лемму 3 из (Попов 2019) и на утверждения (XI.1)–(XI.11), убеждаемся, что справедливо утверждение (XI). Теперь, исходя из утверждений (X) и (XI), делаем вывод о том, что

(XII) для всякой $L_{\supset}$-матрицы K вида $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},g\rangle$ верно следующее: множество всех $L_{\supset}$-формул, общезначимых в $L_{\supset}$-матрице K, включает $L_{\supset}$-логику $Int_{\supset}$, включается в $L_{\supset}$-логику $Cl_{\supset}$ и не равно $Cl_{\supset}$ тогда и только тогда, когда $K \in \{M(1/2,0,1,1/2), M(1/2,0,0,1)\}$.

В заключение сделаем два замечания: замечание 1 и замечание 2.

Замечание 1. *$L_{\supset}$-матрицы $M(1/2,0,1,1/2)$ и $M(1/2,0,0,1)$ изоморфны (действительно, легко проверить, что $\{\langle 1,1\rangle, \langle 1/2,0\rangle, \langle 0,1/2\rangle\}$ есть отображение множества $\{1,1/2,0\}$ на себя, являющееся изоморфизмом $L_{\supset}$-матрицы $M(1/2,0,1,1/2)$ на $L_{\supset}$-матрицу $M(1/2,0,0,1)$).*

Замечание 2. *Операция $\supset_{(1/2,0,0,1)}$ $L_{\supset}$-матрицы $M(1/2,0,0,1)$ идентична известной трехзначной импликации Гейтинга.*

Литература

Попов 2019 — *Попов В. М.* Трехзначные логические матрицы с одним выделенным значением, адекватные классической импликативной логике // Логико-философские штудии. 2019. Т. 17, № 2. С. 142–193.