DOI: 10.52119/LPHS.2020.81.10.003

Владимир Попов[1]

К ПРОБЛЕМЕ РАСШИРЕНИЯ МАТРИЧНОЙ СЕМАНТИКИ, АДЕКВАТНОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ИМПЛИКАТИВНОЙ ЛОГИКЕ, ДО МАТРИЧНОЙ СЕМАНТИКИ, АДЕКВАТНОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ИМПЛИКАТИВНО-НЕГАТИВНОЙ ЛОГИКЕ (ЧАСТЬ 2)[2]

Аннотация. Эта работа продолжает представленные в (Попов 2019a) исследования проблемы расширения семантики, адекватной собственному фрагменту логики, до семантики, адекватной этой логике. В предлагаемой статье мы используем результаты, полученные в работах (Попов 2019a) и (Попов 2019b), и опираемся на определения, соглашения и замечания из этих работ. Основное содержание статьи размещено в двух разделах (первый раздел и второй раздел). В первом разделе изучается вопрос о возможности построения логической матрицы вида $\langle M(1/2, 1, 0, 1/2), f\rangle$ (где f есть унарная операция на множестве $\{1, 1/2, 0\}$), адекватной классической импликативно-негативной логике $Cl_{\supset\neg}$. Заметим, что $M(1/2, 1, 0, 1/2)$ принадлежит пересчету всех адекватных классической импликативной логике $Cl_{\supset}$ трехзначных логических матриц, носителем каждой из которых является множество $\{1, 1/2, 0\}$, а выделенным множеством каждой из которых является множество $\{1\}$ (см. Попов 2019b). Здесь мы даем отрицательный ответ на указанный вопрос. Центральный вопрос второго раздела — вопрос о возможности построения логической матрицы вида $\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), f\rangle$ (где f есть унарная операция на множестве $\{1, 1/2, 0\}$), адекватной классической импликативно-негативной логике $Cl_{\supset\neg}$. Заметим, что $M(1/2, 0, 0, 1/2)$ принадлежит пересчету всех адекватных классической импликативной логике $Cl_{\supset}$ трехзначных логических матриц, носителем каждой из которых является множество $\{1, 1/2, 0\}$, а выделенным множеством каждой из которых является множество $\{1\}$ (см. Попов 2019b). Мы даем отрицательный ответ на центральный вопрос второго раздела и вносим исправление в анонс, сделанный в (Попов 2019a).

Ключевые слова: трехзначная логическая матрица с одним выделенным значением, $L_{\supset\neg}$-матрица, $L_{\supset\neg}$-логика, $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в (заданной) $L_{\supset\neg}$-матрице, изоморфизм логических матриц.

---

[1] *Попов Владимир Михайлович* — кандидат философских наук, доцент кафедры логики философского факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.

Vladimir Popov, PhD, associate professor, Department of Logic, Faculty of Philosophy, Lomonosov Moscow State University.

pphiloslog@mail.ru

[2] Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 19-011-00536 А.

Vladimir Popov

ON THE PROBLEM OF EXPANSION OF MATRIX SEMANTICS ADEQUATE TO CLASSICAL IMPLICATIVE LOGIC TO MATRIX SEMANTICS ADEQUATE TO CLASSICAL IMPLICATIVE-NEGATIVE LOGIC (PART 2)

Abstract. This work continues the studies presented in (Popov 2019a) of the problem of expansion of a semantics adequate to a proper fragment of a logic, to semantics which is adequate to this logic. In the present article, we rely on the results obtained in (Popov 2019a) and (Popov 2019b), and rely on definitions, agreements, and comments from these works. The main content of the article is placed in two sections (the first section and the second section). In the first section, we study the question of the possibility of constructing a logical matrix of the form $\langle M(1/2, 1, 0, 1/2), f\rangle$ (where f is a unary operation on the set $\{1, 1/2, 0\}$), adequate to the classical implicative-negative logic $Cl_{\supset\neg}$. Note that $M(1/2, 1, 0, 1/2)$ belongs to the set of all three-valued logical matrices adequate to the classical implicative logic $Cl_{\supset}$, each of which is supported by the set $\{1, 1/2, 0\}$, and the designated set of each of which is the set $\{1\}$ (see Popov 2019b). Here we give a negative answer to this question. The central question of the second section is the question of the possibility of constructing a logical matrix of the form $\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), f\rangle$ (where f is a unary operation on the set $\{1, 1/2, 0\}$), adequate to the classical implicative- negative logic $Cl_{\supset\neg}$. Note that $M(1/2, 0, 0, 1/2)$ belongs to the set of all three-valued logical matrices adequate to the classical implicative logic $Cl_{\supset}$, each of which is supported by the set $\{1, 1/2, 0\}$, and the designated set of each of which is the set $\{1\}$ (see Popov 2019b). We give a negative answer to the central question of the second section and make corrections to the announcement made in (Popov 2019a).

Keywords: three-valued logical matrix with one designated value, $L_{\supset\neg}$-matrix, $L_{\supset\neg}$-logic, $L_{\supset\neg}$-formula, which is valid in a (given) $L_{\supset\neg}$-matrix, isomorphism of logical matrices.

Первый раздел

В этом разделе мы используем определенное в (Попов 2019a) понятие регулярной $L_{\supset\neg}$-логики (согласно этому определению, $Cl_{\supset\neg}$ служит примером регулярной $L_{\supset\neg}$-логики) и доказываем, что для всякой унарной оерации f на носителе $L_{\supset\neg}$-матрицы $M(1/2, 1, 0, 1/2)$ упорядоченная пара $\langle M(1/2, 1, 0, 1/2), f\rangle$ есть такая $L_{\supset\neg}$-матрица, что множество всех, общезначимых в $\langle M(1/2, 1, 0, 1/2), f\rangle$ $L_{\supset\neg}$-формул не является регулярной $L_{\supset\neg}$-логикой (в частности, не является $L_{\supset\neg}$-логикой $Cl_{\supset\neg}$).

Определение 1. *I есть изоморфизм $L_{\supset\neg}$-матрицы M_1 на $L_{\supset\neg}$-матрицу M_2 тогда и только тогда, когда M_1 и M_2 являются $L_{\supset\neg}$-матрицами и I есть такое взаимно-однозначное отображение носителя $L_{\supset\neg}$-матрицы M_1 на носитель $L_{\supset\neg}$-матрицы M_2, что выполняются следующие три условия:* (1) *I отображает выделенное множество $L_{\supset\neg}$-матрицы M_1 на выделенное множество $L_{\supset\neg}$-матрицы*

M_2, (2) для всякого x из носителя $L_{\supset\neg}$-матрицы M_1 и для всякого y из носителя $L_{\supset\neg}$-матрицы M_1 $I((xg_1y)) = (I(x)g_2I(y))$, где g_1 есть бинарная операция $L_{\supset\neg}$-матрицы M_1, а g_2 есть бинарная операция $L_{\supset\neg}$-матрицы M_2, (3) для всякого x из носителя $L_{\supset\neg}$-матрицы M_1 $I(f_1(x)) = f_2(I(x_1))$, где f_1 есть унарная операция $L_{\supset\neg}$-матрицы M_1, а f_2 есть унарная операция $L_{\supset\neg}$-матрицы M_2.

В свете этого определения очевидна справедливость следующего замечания 1.

Замечание 1. *Если $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_1, f_1\rangle$ и $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_2, f_2\rangle$ являются $L_{\supset\neg}$-матрицами, то I есть изоморфизм $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_1, f_1\rangle$ на $L_{\supset\neg}$-матрицу $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_2, f_2\rangle$ тогда и только тогда, когда I есть такое взаимно-однозначное отображение множества $\{1, 1/2, 0\}$ на себя, что выполняются следующие три условия: (1) $I(1) = 1$, (2) для всякого x из $\{1, 1/2, 0\}$ и для всякого y из $\{1, 1/2, 0\}$ $I((xg_1y)) = (I(x)g_2I(y))$, (3) для всякого x из $\{1, 1/2, 0\}$ $I(f_1(x)) = f_2(I(x))$.*

Определение 2. *Говорим, что $L_{\supset\neg}$-матрица R изоморфна $L_{\supset\neg}$-матрице U, если существует изоморфизм $L_{\supset\neg}$-матрицы R на $L_{\supset\neg}$-матрицу U.*

Замечание 2. *Для всяких $L_{\supset\neg}$-матриц M_1 и M_2, для всякого изоморфизма I $L_{\supset\neg}$-матрицы M_1 на $L_{\supset\neg}$-матрицу M_2 и для всякой оценки v языка $L_{\supset\neg}$ в $L_{\supset\neg}$-матрице M_1 существует единственное множество $I[v]$ всех упорядоченных пар, каждая из которых имеет вид $\langle q, x\rangle$, где q есть пропозициональная переменная языка $L_{\supset\neg}$, а $x = I(v(q))$. При этом для всяких $L_{\supset\neg}$-матриц M_1 и M_2, для всякого изоморфизма I в $L_{\supset\neg}$-матрицы M_1 на $L_{\supset\neg}$-матрицу M_2 и для всякой оценки v языка $L_{\supset\neg}$ в $L_{\supset\neg}$-матрице M_1 $I[v]$ есть оценка языка $L_{\supset\neg}$ в $L_{\supset\neg}$-матрице M_2.*

Вспомним замечание 2 из (Попов 2019a), согласно которому для всякой $L_{\supset\neg}$-матрицы K существует единственное отображение (обозначим его через φ_K) множества всех упорядочнных пар, каждая из которых имеет вид $\langle A, w\rangle$, где A есть $L_{\supset\neg}$-формула и w есть оценка языка $L_{\supset\neg}$ в $L_{\supset\neg}$-матрице K, в носитель $L_{\supset\neg}$-матрицы K, выполняющее следующие три условия: (1) для всякой пропозициональной переменной q языка $L_{\supset\neg}$ и для всякой оценки v языка $L_{\supset\neg}$ в $L_{\supset\neg}$-матрице K верно, что $\varphi_K(\langle q, v\rangle) = v(q)$, (2) для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A, для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы B и для всякой оценки v языка $L_{\supset\neg}$ в $L_{\supset\neg}$-матрице K

$$\varphi_K(\langle (A \supset B), v\rangle) = (\varphi_K(\langle A, v\rangle) g \varphi_K(\langle B, v\rangle)),$$

где g есть бинарная операция $L_{\supset\neg}$-матрицы K, (3) для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A и для всякой оценки v языка $L_{\supset\neg}$ в $L_{\supset\neg}$-матрице K $\varphi_K(\langle(\neg A), v\rangle) = f(\varphi_K(\langle A, v\rangle)$, где f есть бинарная операция $L_{\supset\neg}$-матрицы K.

Лемма 1. *Если I есть изоморфизм $L_{\supset\neg}$-матрицы R на $L_{\supset\neg}$-матрицу U, то для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A и для всякой оценки v языка $L_{\supset\neg}$ в $L_{\supset\neg}$-матрице R $I(\varphi_R(\langle A, v\rangle)) = \varphi_U(\langle A, I[v]\rangle)$.*

Лемма 1 доказана индукцией по построению $L_{\supset\neg}$-формулы.

Лемма 2. *Если существует изоморфизм $L_{\supset\neg}$-матрицы R на $L_{\supset\neg}$-матрицу U, то для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A: если A есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице U, то A есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице R.*

Лемма 2 доказана с использованием леммы 1.

Нижеследующая лемма 3 является «заимствованием» из теории алгебраических систем.

Лемма 3. *Если $L_{\supset\neg}$-матрица R изоморфна $L_{\supset\neg}$-матрице U, то $L_{\supset\neg}$-матрица U изоморфна $L_{\supset\neg}$-матрице R.*

Используя леммы 2 и 3, получаем следующую теорему 1.

Теорема 1. *Если $L_{\supset\neg}$-матрица R изоморфна $L_{\supset\neg}$-матрице U, то множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице R, равно множеству всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице U.*

Теорема 2. *Для всякой унарной операции f на множестве $\{1, 1/2, 0\}$ упорядоченная пара $\langle M(1/2, 1, 0, 1/2), f\rangle$ есть такая $L_{\supset\neg}$-матрица, что множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1/2, 1, 0, 1/2), f\rangle$, не является регулярной $L_{\supset\neg}$-логикой*[3].

Докажем теорему 2 методом от противного.

(1) Неверно, что для всякой унарной операции f на множестве $\{1, 1/2, 0\}$ упорядоченная пара $\langle M(1/2, 1, 0, 1/2), f\rangle$ есть такая $L_{\supset\neg}$-матрица, что множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1/2, 1, 0, 1/2), f\rangle$, не является регулярной $L_{\supset\neg}$-логикой (допущение).

(2) Для некоторой унарной операции f на множестве $\{1, 1/2, 0\}$ упорядоченная пара $\langle M(1/2, 1, 0, 1/2), f\rangle$ есть такая $L_{\supset\neg}$-матрица, что множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1/2, 1, 0, 1/2), f\rangle$, является регулярной $L_{\supset\neg}$-логикой (из (1)).

(3) Пусть f_0 есть унарная операция на множестве $\{1, 1/2, 0\}$ и упорядоченная пара $\langle M(1/2, 1, 0, 1/2), f_0\rangle$ есть такая $L_{\supset\neg}$-матрица, что множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1/2, 1, 0, 1/2), f_0\rangle$, является регулярной $L_{\supset\neg}$-логикой.

(4) f_0 есть унарная операция на множестве $\{1, 1/2, 0\}$ (из (3)).

(5) $\langle M(1/2, 1, 0, 1/2), f_0\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица (из (3)).

[3]Регулярной $L_{\supset\neg}$-логикой называется $L_{\supset\neg}$-логика, которая включается в $Cl_{\supset\neg}$ (см. определение 9 из (Попов 2019a)).

(6) Множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице

$$\langle M(1/2, 1, 0, 1/2), f_0\rangle,$$

является регулярной $L_{\supset\neg}$-логикой (из (3)).

В силу соглашения 7 из (Попов 2019a) верно, что

(7) $M(1/2, 1, 0, 1/2) = \langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset (1/2, 1, 0, 1/2)\rangle$.

Опираясь на утверждение 7, делаем вывод, что

(8) $\langle M(1/2, 1, 0, 1/2), f_0\rangle = \langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset (1/2, 1, 0, 1/2), f_0\rangle$.

(9) $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset (1/2, 1, 0, 1/2), f_0\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица (из (5) и (8)).

Следуя соглашению 5 из (Попов 2019a), имеем, что

(10) s есть отображение множества $\{1, 1/2, 0\}$ на себя, определяемое таблицей

s	1	1/2	0
	1	0	1/2

Ясно, что

(11) $\{\langle 1, s(f_0(s(1)))\rangle, \langle 1/2, s(f_0(s(1/2)))\rangle, \langle 0, s(f_0(s(0)))\rangle\}$ есть унарная операция на множестве $\{1, 1/2, 0\}$.

Условимся, что

(12) $\{\langle 1, s(f_0(s(1)))\rangle, \langle 1/2, s(f_0(s(1/2)))\rangle, \langle 0, s(f_0(s(0)))\rangle\} = f'$.

Таким образом,

(13) для всякого x из $\{1, 1/2, 0\}$ $f'(x) = s(f_0(s(x)))$.

Учитывая, что $\supset (1/2, 1, 0, 1/2)$ есть бинарная операция на непустом множестве $\{1, 1/2, 0\}$, включающем множество $\{1\}$, и опираясь на утверждения (11) и (12), получаем по определению 2 из (Попов 2019a), что

(14) $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset (1/2, 1, 0, 1/2), f'\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица.

Ясно, что

(15) $s(1) = 1$.

Легко проверить, проведя рассуждение по случаям, что

(16) для всякого x из $\{1, 1/2, 0\}$ и для всякого y из $\{1, 1/2, 0\}$

$$s((x \supset (1/2, 1, 0, 1/2)y)) = (s(x) \supset (1, 0, 0, 1/2)s(y)).$$

Докажем, что

(17) для всякого x из $\{1, 1/2, 0\}$ $s(f'(x)) = f_0(s(x))$.

Доказательство.

(17.1) $x_0 \in \{1, 1/2, 0\}$ (допущение).

(17.2) $s(x_0) \in \{1, 1/2, 0\}$ (из (17.1) и (10)).

(17.3) $f'(s(x_0)) = s(f_0(s(s(x_0))))$ (из (17.2) и (13)).

Очевидно, что

(17.4) для всякого x из $\{1, 1/2, 0\}$ $s(s(x)) = x$.

Опираясь на утверждения (17.3) и (17.4), получаем, что

(17.5) $s(f_0(x_0)) = f'(s(x_0))$.

Снимая допущение (17.1) и обобщая, завершаем доказательство утверждения (17).

Утверждение (17) *доказано.*

Опираясь на утверждения (9), (10), (14), (15), (16), (17) и на определение 1, делаем вывод, что

(18) s есть изоморфизм $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset(1/2, 1, 0, 1/2), f_0\rangle$ на $L_{\supset\neg}$-матрицу $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset(1, 0, 0, 1/2), f'\rangle$.

Из утверждения (18), используя определение 2, делаем вывод, что

(19) $L_{\supset\neg}$-матрица $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset(1/2, 1, 0, 1/2), f_0\rangle$ изоморфна $L_{\supset\neg}$-матрице

$$\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset(1, 0, 0, 1/2), f'\rangle.$$

Опираясь на утверждение (19) и на теорему 1, получаем, что

(20) множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице

$$\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset(1/2, 1, 0, 1/2), f_0\rangle,$$

равно множеству всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице

$$\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset(1, 0, 0, 1/2), f'\rangle.$$

(21) Множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице

$$\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset(1/2, 1, 0, 1/2), f_0\rangle$$

является регулярной $L_{\supset\neg}$-логикой (из (6) и (9)).

(22) Множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице

$$\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset(1, 0, 0, 1/2), f'\rangle$$

является регулярной $L_{\supset\neg}$-логикой (из (20) и (21)).

(23) Существует такая унарная операция f на множестве $\{1, 1/2, 0\}$, что множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице

$$\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset(1, 0, 0, 1/2), f\rangle,$$

является регулярной $L_{\supset\neg}$-логикой (из (22)).

Используя теорему 2 из (Попов 2019a), получаем, что

(24) для всяко унарной операции f на множестве $\{1, 1/2, 0\}$, что множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице

$$\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset(1, 0, 0, 1/2), f\rangle,$$

не является регулярной $L_{\supset\neg}$-логикой.

Утверждение (24) противоречит утверждению (23). Следовательно, неверно допущение (1).

Итак, теорема 2 доказана методом от противного.

В свете теоремы 2 ясно, что не существует логическая матрица вида

$$\langle M(1/2, 1, 0, 1/2), f\rangle$$

(где f есть унарная операция на $\{1, 1/2, 0\}$), адекватная классической импликативно-негативной логике $Cl_{\supset\neg}$.

Второй раздел

Теорема 3. *Для всякой унарной операции f на множестве $\{1, 1/2, 0\}$*

$$\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), f\rangle$$

есть такая $L_{\supset\neg}$-матрица, что множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), f\rangle$ не равно классической импликативно-негативной логике $Cl_{\supset\neg}$.

Докажем теорему 3.

(1) f_0 есть унарная операция на множестве $\{1, 1/2, 0\}$ (допущение).
Используя замечание 9 из (Попов 2019a) и соглашение 13 из (Попов 2019a), можно доказать, что

(2) для всякого i: i есть унарная операция на множестве $\{1, 1/2, 0\}$ тогда и только тогда, когда верно следующее: i есть $\neg(1, y, z)$, где $y, z \in \{1, 1/2, 0\}$, или i есть $\neg(1/2, 1, z)$, где $z \in \{1, 1/2, 0\}$, или i есть $\neg(1/2, 1/2, z)$, где $z \in \{1, 1/2, 0\}$, или i есть $\neg(1/2, 0, 1)$, или i есть $\neg(1/2, 0, 1/2)$, или i есть $\neg(1/2, 0, 0)$, или i есть $\neg(0, 1, 1)$, или i есть $\neg(0, 1, 1/2)$, или i есть $\neg(0, 1, 0)$, или i есть $\neg(0, 1/2, 1)$, или i есть $\neg(0, 1/2, 1/2)$, или i есть $\neg(0, 1/2, 0)$, или i есть $\neg(0, 0, 1)$, или i есть $\neg(0, 0, 1/2)$, или i есть $\neg(0, 0, 0)$.

(3) f_0 есть $\neg(1, y, z)$, где $y, z \in \{1, 1/2, 0\}$, или f_0 есть $\neg(1/2, 1, z)$, где $z \in \{1, 1/2, 0\}$, или f_0 есть $\neg(1/2, 1/2, z)$, где $z \in \{1, 1/2, 0\}$, или f_0 есть $\neg(1/2, 0, 1)$, или f_0 есть $\neg(1/2, 0, 1/2)$, или f_0 есть $\neg(1/2, 0, 0)$, или f_0 есть $\neg(0, 1, 1)$, или f_0 есть $\neg(0, 1, 1/2)$, или f_0 есть $\neg(0, 1, 0)$, или f_0 есть $\neg(0, 1/2, 1)$, или f_0 есть $\neg(0, 1/2, 1/2)$, или f_0 есть $\neg(0, 1/2, 0)$, или f_0 есть $\neg(0, 0, 1)$, или f_0 есть $\neg(0, 0, 1/2)$, или f_0 есть $\neg(0, 0, 0)$ (из (1) и (3)).

Здесь прервем доказательство теоремы 3 и сделаем следующие замечания 3–17, в справедливости которых нетрудно убедиться, применив простую процедуру проверки общезначимости пропозициональных формул в конечных логических матрицах.

Замечание 3. *Для всякой $L_{\supset\neg}$-матрицы K вида $\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), \neg(1, y, z)\rangle$, где $y, z \in \{1, 1/2, 0\}$, верно, что $(\neg(p_1 \supset p_1))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице K.*

Замечание 4. *Для всякой $L_{\supset\neg}$-матрицы K вида $\langle M(1/2,0,0,1/2),\neg(1/2,1,z)\rangle$, где $z\in\{1,1/2,0\}$, верно, что $((\neg p_1)\supset(p_1\supset p_2))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, не общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице K.*

Замечание 5. *Для всякой $L_{\supset\neg}$-матрицы K вида $\langle M(1/2,0,0,1/2),\neg(1/2,1/2,z)\rangle$, где $z\in\{1,1/2,0\}$, верно, что $((\neg(\neg(p_1\supset p_1)))\supset(\neg(p_1\supset p_1)))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице K.*

Замечание 6. *Для всякой $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle M(1/2,0,0,1/2),\neg(1/2,0,1)\rangle$ верно, что $((p_1\supset p_1)\supset(\neg(\neg(\neg(p_1\supset p_1)))))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в этой $L_{\supset\neg}$-матрице.*

Замечание 7. *Для $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle M(1/2,0,0,1/2),\neg(1/2,0,1/2)\rangle$ верно, что*

$$(\neg(\neg(p_1\supset p_1)))$$

есть $L_{\supset\neg}$-формула, не общезначимая в этой $L_{\supset\neg}$-матрице.

Замечание 8. *Для $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle M(1/2,0,0,1/2),\neg(1/2,0,0)\rangle$ верно, что*

$$((\neg(\neg(p_1\supset p_1)))\supset(\neg(\neg(\neg(p_1\supset p_1)))))$$

есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в этой $L_{\supset\neg}$-матрице.

Замечание 9. *Для $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle M(1/2,0,0,1/2),\neg(0,1,1)\rangle$ верно, что*

$$((\neg p_1)\supset(p_1\supset p_1))$$

есть $L_{\supset\neg}$-формула, не общезначимая в этой $L_{\supset\neg}$-матрице.

Замечание 10. *Для $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle M(1/2,0,0,1/2),\neg(0,1,1/2)\rangle$ верно, что*

$$(\neg(\neg(\neg(p_1\supset p_1))))$$

есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в этой $L_{\supset\neg}$-матрице.

Замечание 11. *Для $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle M(1/2,0,0,1/2),\neg(0,1,0)\rangle$ верно, что*

$$((\neg(\neg(p_1\supset p_1)))\supset(\neg(p_1\supset p_1)))$$

есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в этой $L_{\supset\neg}$-матрице.

Замечание 12. *Для $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle M(1/2,0,0,1/2),\neg(0,1/2,1)\rangle$ верно, что*

$$((\neg p_1)\supset(p_1\supset p_2))$$

есть $L_{\supset\neg}$-формула, не общезначимая в этой $L_{\supset\neg}$-матрице.

Замечание 13. *Для $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), \neg(0, 1/2, 1/2)\rangle$ верно, что*

$$((\neg(\neg(p_1 \supset p_1))) \supset (\neg(\neg(\neg(p_1 \supset p_1)))))$$

есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в этой $L_{\supset\neg}$-матрице.

Замечание 14. *Для $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), \neg(0, 1/2, 0)\rangle$ верно, что*

$$((\neg(\neg(p_1 \supset p_1))) \supset (\neg(p_1 \supset p_1)))$$

есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в этой $L_{\supset\neg}$-матрице.

Замечание 15. *Для $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), \neg(0, 0, 1)\rangle$ верно, что*

$$((\neg p_1) \supset (p_1 \supset p_2))$$

есть $L_{\supset\neg}$-формула, не общезначимая в этой $L_{\supset\neg}$-матрице.

Замечание 16. *Для $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), \neg(0, 0, 1/2)\rangle$ верно, что*

$$(\neg(\neg(p_1 \supset p_1)))$$

есть $L_{\supset\neg}$-формула, не общезначимая в этой $L_{\supset\neg}$-матрице.

Замечание 17. *Для $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), \neg(0, 0, 0)\rangle$ верно, что*

$$((\neg(\neg(p_1 \supset p_1))) \supset (\neg(p_1 \supset p_1)))$$

есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в этой $L_{\supset\neg}$-матрице.

Вернемся к доказательству теоремы 3.

Опираясь на замечание 3 и тот факт, что $(\neg(p_1 \supset p_1))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, не общезначимая в $M(Cl_{\supset\neg})$, получаем, что

(4) если f_0 есть $\neg(1, y, z)$, где $x, y \in \{1, 1/2, 0\}$, то $\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), f_0\rangle$ есть такая $L_{\supset\neg}$-матрица, что множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в этой $L_{\supset\neg}$-матрице, не равно классической импликативно-негативной логике $Cl_{\supset\neg}$.
Опираясь на замечание 4 и тот факт, что $((\neg p_1) \supset (p_1 \supset p_2))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$, получаем, что

(5) если f_0 есть $\neg(1/2, 1, z)$, где $z \in \{1, 1/2, 0\}$, то $\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), f_0\rangle$ есть такая $L_{\supset\neg}$-матрица, что множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в этой $L_{\supset\neg}$-матрице, не равно классической импликативно-негативной логике $Cl_{\supset\neg}$.
Опираясь на замечание 5 и тот факт, что $((\neg(\neg(p_1 \supset p_1))) \supset (\neg(p_1 \supset p_1)))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, не общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$, получаем, что

(6) если f_0 есть $\neg(1/2, 1/2, z)$, где $z \in \{1, 1/2, 0\}$, то $\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), f_0\rangle$ есть такая $L_{\supset\neg}$-матрица, что множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в этой $L_{\supset\neg}$-матрице, не равно классической импликативно-негативной логике $Cl_{\supset\neg}$.
Опираясь на замечание 6 и тот факт, что $((p_1 \supset p_1) \supset (\neg(\neg(\neg(p_1 \supset p_1)))))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, не общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$, получаем, что

(7) если f_0 есть $\neg(1/2, 0, 1)$, то $\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), f_0\rangle$ есть такая $L_{\supset\neg}$-матрица, что множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в этой $L_{\supset\neg}$-матрице, не равно классической импликативно-негативной логике $Cl_{\supset\neg}$.
Опираясь на замечание 7 и тот факт, что $(\neg(\neg(p_1 \supset p_1)))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$, получаем, что

(8) если f_0 есть $\neg(1/2, 0, 1/2)$, то $\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), f_0\rangle$ есть такая $L_{\supset\neg}$-матрица, что множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в этой $L_{\supset\neg}$-матрице, не равно классической импликативно-негативной логике $Cl_{\supset\neg}$.
Опираясь на замечание 8 и тот факт, что $((\neg(\neg(p_1 \supset p_1))) \supset (\neg(\neg(\neg(p_1 \supset p_1)))))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, не общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$, получаем, что

(9) если f_0 есть $\neg(1/2, 0, 0)$, то $\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), f_0\rangle$ есть такая $L_{\supset\neg}$-матрица, что множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в этой $L_{\supset\neg}$-матрице, не равно классической импликативно-негативной логике $Cl_{\supset\neg}$.
Опираясь на замечание 9 и тот факт, что $((\neg p_1) \supset (p_1 \supset p_2))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$, получаем, что

(10) если f_0 есть $\neg(0, 1, 1)$, то $\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), f_0\rangle$ есть такая $L_{\supset\neg}$-матрица, что множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в этой $L_{\supset\neg}$-матрице, не равно классической импликативно-негативной логике $Cl_{\supset\neg}$.
Опираясь на замечание 10 и тот факт, что $(\neg(\neg(\neg(p_1 \supset p_1))))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, не общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$, получаем, что

(11) если f_0 есть $\neg(0, 1, 1/2)$, то $\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), f_0\rangle$ есть такая $L_{\supset\neg}$-матрица, что множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в этой $L_{\supset\neg}$-матрице, не равно классической импликативно-негативной логике $Cl_{\supset\neg}$.
Опираясь на замечание 11 и тот факт, что $((\neg(\neg(p_1 \supset p_1))) \supset (\neg(p_1 \supset p_1)))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, не общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$, получаем, что

(12) если f_0 есть $\neg(0, 1, 0)$, то $\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), f_0\rangle$ есть такая $L_{\supset\neg}$-матрица, что множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в этой $L_{\supset\neg}$-матрице, не равно классической импликативно-негативной логике $Cl_{\supset\neg}$.
Опираясь на замечание 12 и тот факт, что $((\neg p_1) \supset (p_1 \supset p_2))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$, получаем, что

(13) если f_0 есть $\neg(0, 1/2, 1)$, то $\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), f_0\rangle$ есть такая $L_{\supset\neg}$-матрица, что множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в этой $L_{\supset\neg}$-матрице, не равно классической импликативно-негативной логике $Cl_{\supset\neg}$.
Опираясь на замечание 13 и тот факт, что $((\neg(\neg(p_1 \supset p_1))) \supset (\neg(\neg(\neg(p_1 \supset p_1)))))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, не общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$, получа-

ем, что

(14) если f_0 есть $\neg(0, 1/2, 1/2)$, то $\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), f_0\rangle$ есть такая $L_{\supset\neg}$-матрица, что множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в этой $L_{\supset\neg}$-матрице, не равно классической импликативно-негативной логике $Cl_{\supset\neg}$.

Опираясь на замечание 14 и тот факт, что $((\neg(\neg(p_1 \supset p_1))) \supset (\neg(p_1 \supset p_1)))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, не общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$, получаем, что

(15) если f_0 есть $\neg(0, 1/2, 0)$, то $\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), f_0\rangle$ есть такая $L_{\supset\neg}$-матрица, что множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в этой $L_{\supset\neg}$-матрице, не равно классической импликативно-негативной логике $Cl_{\supset\neg}$.

Опираясь на замечание 15 и тот факт, что $((\neg p_1) \supset (p_1 \supset p_2))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$, получаем, что

(16) если f_0 есть $\neg(0, 0, 1)$, то $\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), f_0\rangle$ есть такая $L_{\supset\neg}$-матрица, что множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в этой $L_{\supset\neg}$-матрице, не равно классической импликативно-негативной логике $Cl_{\supset\neg}$.

Опираясь на замечание 16 и тот факт, что $(\neg(\neg(p_1 \supset p_1)))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$, получаем, что

(17) если f_0 есть $\neg(0, 0, 1/2)$, то $\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), f_0\rangle$ есть такая $L_{\supset\neg}$-матрица, что множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в этой $L_{\supset\neg}$-матрице, не равно классической импликативно-негативной логике $Cl_{\supset\neg}$.

Опираясь на замечание 17 и тот факт, что $((\neg(\neg(p_1 \supset p_1))) \supset (\neg(p_1 \supset p_1)))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, не общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$, получаем, что

(18) если f_0 есть $\neg(0, 0, 0)$, то $\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), f_0\rangle$ есть такая $L_{\supset\neg}$-матрица, что множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в этой $L_{\supset\neg}$-матрице, не равно классической импликативно-негативной логике $Cl_{\supset\neg}$.

Из утверждений (3)–(18) вытекает, что

(19) $\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), f_0\rangle$ есть такая $L_{\supset\neg}$-матрица, что множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), f_0\rangle$, не равно классической импликативно-негативной логике $Cl_{\supset\neg}$.

Поскольку f_0 — произвольная унарная операция на множестве $\{1, 1/2, 0\}$ (см. утверждение (1)), проводим обобщение утверждения (19), завершая доказательство теоремы 3.

Теорема 3 доказана.

Опираясь на теорему 3, приходим к выводу, что не существует $L_{\supset\neg}$-матрица вида $\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), f\rangle$, адекватная классической импликативно-негативной логике $Cl_{\supset\neg}$.

Следует заметить, что в свете теоремы 3 очевидно, что анонс, сделанный в (Попов 2019a), требует исправления. Откорректированный анонс гласит:

(i) всякая адекватная классической импликативной логике трехзначная $L_{\supset}$-матрица K с одним выделенным значением, для которой не существует такой унарной операции f, что $\langle K, f\rangle$ является $L_{\supset\neg}$-матрицей, адекватной классической импликативно-негативной логике, изоморфна $L_{\supset}$-матрице $M(1, 0, 0, 1/2)$

или изоморфна $L_{\supset}$-матрице $M(1/2, 0, 0, 1/2)$,

(ii) $\{M(1, 0, 0, 1/2), M(1/2, 1, 0, 1/2), M(1/2, 0, 0, 1/2)\}$ есть множество всех таких $L_{\supset}$-матриц вида $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g\rangle$, адекватных классической импликативной логике, что ни для какой $L_{\supset}$-матрицы K из этого множества $L_{\supset}$-матриц не существует унарной операции f, для которой $\langle K, f\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица, адекватная классической импликативно-негативной логике.

Литература

Попов 2019a — *Попов В. М.* К проблеме расширения матричной семантики, адекватной классической импликативной логике, до матричной семантики, адекватной классической импликативно-негативной логике // Логико-философские штудии. 2019. Т. 17, № 1. С. 1–31.

Попов 2019b — *Попов В. М.* Трехзначные логические матрицы с одним выделенным значением, адекватные классической импликативной логике // Логико-философские штудии. 2019. Т. 17, № 2. С. 142–193.