DOI: 10.52119/LPHS.2020.62.49.007

Владимир Попов[1]

К ПРОБЛЕМЕ РАСШИРЕНИЯ МАТРИЧНОЙ СЕМАНТИКИ, АДЕКВАТНОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ИМПЛИКАТИВНОЙ ЛОГИКЕ, ДО МАТРИЧНОЙ СЕМАНТИКИ, АДЕКВАТНОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ИМПЛИКАТИВНО-НЕГАТИВНОЙ ЛОГИКЕ (ЧАСТЬ 3)[2]

Аннотация. Здесь продолжается проводимое в (Попов 2019a) и в (Попов 2020) исследование проблемы расширения семантики, адекватной собственному фрагменту логики, до семантики, адекватной этой логике. Мы опираемся на результаты, полученные в работах (Попов 2019a,b, 2020), и используем (без специальных комментариев) определения, соглашения и замечания из этих работ. Основное содержание статьи размещено в двух разделах (первый раздел и второй раздел). В первом разделе установлено следующее: $\langle M(1,0,0,1), \neg(0,0,1)\rangle$ есть единственная $L_{\supset\neg}$-матрица вида $\langle M(1,0,0,1), f\rangle$, адекватная классической импликативно-негативной логике $Cl_{\supset\neg}$, а $\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$ и $\langle M(0,0,1,1), \neg(0,1,1)\rangle$ — все $L_{\supset\neg}$-матрицы вида $\langle M(0,0,1,1), f\rangle$, адекватные классической импликативно-негативной логике $Cl_{\supset\neg}$. Во втором разделе установлено следующее: $\langle M(1/2,1,1,1/2), \neg(1/2,1,1/2)\rangle$ есть единственная $L_{\supset\neg}$-матрица вида $\langle M(1/2,1,1,1/2), f\rangle$, адекватная классической импликативно-негативной логике $Cl_{\supset\neg}$, а $\langle M(1/2,1/2,1,1), \neg(0,1,1)\rangle$ и $\langle M(1/2,1/2,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$ — все $L_{\supset\neg}$-матрицы вида $\langle M(1/2,1/2,1,1), f\rangle$, адекватные классической импликативно-негативной логике $Cl_{\supset\neg}$.

Ключевые слова: трехзначная логическая матрица с одним выделенным значением, $L_{\supset\neg}$-матрица, $L_{\supset\neg}$-логика, $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в (заданной) $L_{\supset\neg}$-матрице, изоморфизм логических матриц.

Vladimir Popov

ON THE PROBLEM OF EXPANSION OF MATRIX SEMANTICS ADEQUATE TO CLASSICAL IMPLICATIVE LOGIC TO MATRIX SEMANTICS ADEQUATE TO CLASSICAL IMPLICATIVE-NEGATIVE LOGIC (PART 3)

Abstract. Here the ongoing work, initiated in (Popov 2019a) and in (Popov 2020), continues the study of the problem of expansion of a semantics adequate to a proper fragment of a logic, to a semantics which is adequate to this logic. We rely on the results obtained in (Popov

[1] *Попов Владимир Михайлович* — кандидат философских наук, доцент кафедры логики философского факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.
Vladimir Popov, Ph.D., associate professor, Department of Logic, Faculty of Philosophy, Lomonosov Moscow State University.
pphiloslog@mail.ru

[2] Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 19-011-00536 А.

2019a,b, 2020) and use (without special comments) the definitions, agreements, and remarks from these works. The main content of the article is placed in two sections (the first section and the second section). In the first section, we establish the following: $\langle M(1,0,0,1), \neg(0,0,1)\rangle$ is the only $L_{\supset\neg}$-matrix of the form $\langle M(1,0,0,1), f\rangle$ adequate to the classical implicative-negative logic $Cl_{\supset\neg}$, and $\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$ and $\langle M(0,0,1,1), \neg(0,1,1)\rangle$ are all $L_{\supset\neg}$-matrices of the form $\langle M(0,0,1,1), f\rangle$ adequate to the classical implicative-negative logic $Cl_{\supset\neg}$. In the second section we establish the following: $\langle M(1/2,1,1,1/2), \neg(1/2,1,1/2)\rangle$ is the only $L_{\supset\neg}$-matrix of the form $\langle M(1/2,1,1,1/2), f\rangle$ adequate to the classical implicative-negative logic $Cl_{\supset\neg}$, and $\langle M(1/2,1/2,1,1), \neg(0,1,1)\rangle$ and $\langle M(1/2,1/2,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$ are all $L_{\supset\neg}$-matrices of the form $\langle M(1/2,1/2,1,1), f\rangle$ adequate to the classical implicative-negative logic $Cl_{\supset\neg}$.
Keywords: three-valued logical matrix with one designated value, $L_{\supset\neg}$-matrix, $L_{\supset\neg}$-logic, $L_{\supset\neg}$-formula valid in a (given) $L_{\supset\neg}$-matrix, isomorphism of logical matrices.

Первый раздел

Начнем с демонстрации того, что $\langle M(1,0,0,1), \neg(0,0,1)\rangle$, $\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$ и $\langle M(0,0,1,1), \neg(0,1,1)\rangle$ являются $L_{\supset\neg}$-матрицами, адекватными классической импликативно-негативной логике $Cl_{\supset\neg}$. Для этого достаточно доказать, что множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1,0,0,1), \neg(0,0,1)\rangle$, множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$, и множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице и $\langle M(0,0,1,1), \neg(0,1,1)\rangle$, равны $Cl_{\supset\neg}$.

Нам потребуется исчисление $HCl_{\supset\neg}$ гильбертовского типа. Языком этого исчисления является $L_{\supset\neg}$. Правило modus ponens в $L_{\supset\neg}$ есть единственное правило исчисления $HCl_{\supset\neg}$. Аксиомами исчисления $HCl_{\supset\neg}$ являются все те и только те $L_{\supset\neg}$-формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих трех видов (здесь A, B и C – $L_{\supset\neg}$-формулы): (1) $(A \supset (B \supset A))$, (2) $((A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C)))$, (3) $(((\neg A) \supset (\neg B)) \supset (B \supset A))$. Определение $HCl_{\supset\neg}$-доказательства аналогично определению $HCl_{\supset\neg}$-доказательства $L_{\supset\neg}$-формулы, данному в (Попов 2019b). Определение $HCl_{\supset\neg}$-доказанной $L_{\supset\neg}$-формулы стандартно.

Известна следующая теорема об аксиоматизируемости $L_{\supset\neg}$-логики $Cl_{\supset\neg}$ посредством исчисления $HCl_{\supset\neg}$.

Теорема 1 (об аксиоматизируемости $L_{\supset\neg}$-логики $Cl_{\supset\neg}$ посредством исчисления $HCl_{\supset\neg}$)**.** *Для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A: $A \in Cl_{\supset\neg}$ тогда и только тогда, когда существует $HCl_{\supset\neg}$-доказательство $L_{\supset\neg}$-формулы A.*

Эту теорему можно доказать, опираясь на семантическую характеризацию исчисления P_2, данную в (Черч 1960).

Используя стандартную табличную процедуру проверки общезначимости формулы языка L в конечной логической матрице языка L, устанавливаем, что верны следующие леммы 1, 1a и 1b.

Лемма 1. Всякая аксиома исчисления $HCl_{\supset\neg}$ является $L_{\supset\neg}$-формулой, общезначимой в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1,0,0,1), \neg(0,0,1)\rangle$.

Лемма 1a. Всякая аксиома исчисления $HCl_{\supset\neg}$ является $L_{\supset\neg}$-формулой, общезначимой в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$.

Лемма 1b. Всякая аксиома исчисления $HCl_{\supset\neg}$ является $L_{\supset\neg}$-формулой, общезначимой в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0,0,1,1), \neg(0,1,1)\rangle$.

Очевидны следующие лемма 2 и лемма 3.

Лемма 2. Для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A и для всякой оценки v языка $L_{\supset\neg}$ в $\langle M(1,0,0,1), \neg(0,0,1)\rangle$ $\varphi_{\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle(\neg A), v\rangle) \in \{1,0\})$.

Лемма 3. Для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A, для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы B и для всякой оценки v языка $L_{\supset\neg}$ в $\langle M(1,0,0,1), \neg(0,0,1)\rangle$

$$\varphi_{\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle(A \supset B), v\rangle) \in \{1,0\}).$$

Используя леммы 2 и 3, легко доказать следующую лемму 4.

Лемма 4. Для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A: если существует такая оценка v языка $L_{\supset\neg}$ в $\langle M(1,0,0,1), \neg(0,0,1)\rangle$, что $\varphi_{\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle A, v\rangle) = 1/2$, то A есть пропозициональная переменная языка $L_{\supset\neg}$.

Лемма 5 (о замкнутости относительно правила modus ponens в $L_{\supset\neg}$ множества всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1,0,0,1), \neg(0,0,1)\rangle$)**.** Для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A и для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы B: если для всякой оценки v языка $L_{\supset\neg}$ в $\langle M(1,0,0,1), \neg(0,0,1)\rangle$

$$\varphi_{\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle A, v\rangle) \in \{1\}$$

и для всякой оценки v языка $L_{\supset\neg}$ в $\langle M(1,0,0,1), \neg(0,0,1)\rangle$

$$\varphi_{\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle(A \supset B), v\rangle) \in \{1\},$$

то для всякой оценки v языка $L_{\supset\neg}$ в $\langle M(1,0,0,1), \neg(0,0,1)\rangle$

$$\varphi_{\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle B, v\rangle) \in \{1\}.$$

Докажем лемму 5.

(1) A_0 есть $L_{\supset\neg}$-формула (допущение).

(2) B_0 есть $L_{\supset\neg}$-формула (допущение).

(3) Для всякой оценки v языка $L_{\supset\neg}$ в $\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle$

$$\varphi_{\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle A_0, v\rangle) \in \{1\} \qquad \text{(допущение)}$$

(4) Для всякой оценки v языка $L_{\supset\neg}$ в $\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle$

$$\varphi_{\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle (A_0 \supset B_0), v\rangle) \in \{1\} \qquad \text{(допущение)}$$

(5) Существует такая оценка v языка $L_{\supset\neg}$ в $\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle$, что

$$\varphi_{\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle B_0, v\rangle) \notin \{1\} \qquad \text{(допущение)}$$

Пусть

(6) v_0 есть оценка языка $L_{\supset\neg}$ в $\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle$, что

$$\varphi_{\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle B_0, v_0\rangle) \notin \{1\}.$$

(7) v_0 есть оценка языка $L_{\supset\neg}$ в $\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle$ (из (6)).

(8) $\varphi_{\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle B_0, v_0\rangle) \notin \{1\}$ (из (6)).

Ясно, что

(9) для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A и для всякой оценки v языка $L_{\supset\neg}$ в $\langle M(1,0,0,1),$ $\neg(0,0,1)\rangle$: $\varphi_{\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle A_0, v\rangle) \in \{1, 1/2, 0\}$.

(10) $\varphi_{\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle B_0, v_0\rangle) \in \{1/2, 0\}$ (из (2), (7), (8) и (9)).

(11) $\varphi_{\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle B_0, v_0\rangle) = 1/2$ (допущение).

(12) B_0 есть пропозициональная переменная языка $L_{\supset\neg}$ ((2), (7) и (11), по лемме 4).

Очевидно, что

(13) $(v_0 \backslash \{\langle B_0, v_0(B_0)\rangle\}) \cup \{\langle B_0, 0\rangle\}$ есть оценка языка $L_{\supset\neg}$ в $\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle$.

Условимся, что

(14) w есть $(v_0 \backslash \{\langle B_0, v_0(B_0)\rangle\}) \cup \{\langle B_0, 0\rangle\}$.

Опираясь на (13) и (14), получаем, что

(15) $w(B_0) = 0$.

Опираясь на то, что $\langle M(1,0,0,1), \neg(0,0,1)\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица, и на утверждения (13) и (14), получаем, по замечанию 2 из (Попов 2019a), что

(16) $\varphi_{\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle B_0, v_0\rangle) = w(B_0)$.

Опираясь на то, что $\langle M(1,0,0,1), \neg(0,0,1)\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset(1,0,0,1), \neg(0,0,1)\rangle$, и на утверждения (1), (2), (13) и (14), получаем, по замечанию 2 из (Попов 2019a), что

(17) $\varphi_{\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\supset(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle(A_0 \supset B_0), w\rangle) = (\varphi_{\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\supset(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle A_0, w\rangle) \supset (1,0,0,1)\varphi_{\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\supset(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle B_0, w\rangle))$.

Опираясь на то, что $\langle M(1,0,0,1), \neg(0,0,1)\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset(1,0,0,1), \neg(0,0,1)\rangle$, и на утверждение (17), получаем, что о

(18) $\varphi_{\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle(A_0 \supset B_0), w\rangle) = (\varphi_{\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle A_0, w\rangle) \supset (1,0,0,1)\varphi_{\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle B_0, w\rangle))$.

(19) $\varphi_{\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle A_0, w\rangle) \in \{1\}$ (из (1), (3), (13) и (14)).

(20) $\varphi_{\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle A_0, w\rangle) = 1$ (из (19)).

(21) $\varphi_{\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle B_0, w\rangle) = 0$ (из (15) и (16)).

(22) $\varphi_{\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle(A_0 \supset B_0), w\rangle) = (1 \supset (1,0,0,1)0)$ (из (18), (20) и (21)).

Опираясь на табличное определение операции $\supset(1,0,0,1)$, получаем, что

(23) $(1 \supset (1,0,0,1)0) = 0$.

(24) $\varphi_{\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle(A_0 \supset B_0), w\rangle) = 0$ (из (22) и (23)).

(25) $\varphi_{\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle(A_0 \supset B_0), w\rangle) \in \{1\}$ (из (1), (2), (4), (13) и (14)).

Утверждение (25) несовместимо с утверждением (24). Следовательно, неверно допущение (11). Но тогда

(26) $\varphi_{\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle B_0, v_0\rangle) \neq 1/2$.

(27) $\varphi_{\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle B_0, v_0\rangle) = 0$ (из (10) и (26)).

Опираясь на то, что $\langle M(1,0,0,1), \neg(0,0,1)\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset(1,0,0,1), \neg(0,0,1)\rangle$, и на утверждения (1), (2), (13) и (14), получаем, по замечанию 2 из (Попов 2019a), что

(28) $\varphi_{\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\supset(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle(A_0 \supset B_0), v_0\rangle) = (\varphi_{\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\supset(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle A_0, v_0\rangle) \supset (1,0,0,1)\varphi_{\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\supset(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle B_0, v_0\rangle))$.

Вновь опираясь на то, что $\langle M(1,0,0,1), \neg(0,0,1)\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица $\langle\{1,1/2,0\}, \{1\}, \supset(1,0,0,1), \neg(0,0,1)\rangle$, и на утверждение (28), получаем, что

(29) $\varphi_{\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle(A_0 \supset B_0), v_0\rangle) = (\varphi_{\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle A_0, v_0\rangle) \supset (1,0,0,1)\varphi_{\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle B_0, v_0\rangle))$.

(30) $\varphi_{\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle A_0, v_0\rangle) \in \{1\}$ (из (1), (3) и (7)).

(31) $\varphi_{\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle A_0, v_0\rangle) = 1$ (из (30)).

(32) $\varphi_{\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle(A_0 \supset B_0), v_0\rangle) = (1 \supset (1,0,0,1)0)$ (из (27), (29) и (31)).

Опираясь на табличное определение операции $\supset(1,0,0,1)$, получаем, что

(33) $(1 \supset (1,0,0,1)0) = 0$.

(34) $\varphi_{\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle(A_0 \supset B_0), v_0\rangle) = 0$ (из (32) и (33)).

(35) $\varphi_{\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle(A_0 \supset B_0), v_0\rangle) \in \{1\}$ (из (1), (2), (4) и (7)).

Утверждение (35) несовместимо с утверждением (34). Следовательно, неверно допущение (5). Но тогда

(36) Для всякой оценки v языка $L_{\supset\neg}$ в $\langle M(1,0,0,1), \neg(0,0,1)\rangle$

$$\varphi_{\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle B_0, v\rangle) \in \{1\}.$$

Снимая допущения (4), (3), (2) и (1) и обобщая, завершаем доказательство леммы 5.

Лемма 5 доказана.

Используя определяющую операцию $\supset(1,0,0,1)$ таблицу, нетрудно показать, что справедливы следующие леммы 5a и 5b.

Лемма 5a (о замкнутости относительно правила modus ponens в $L_{\supset\neg}$ множества всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$)**.** Для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A и для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы B: если для всякой оценки v языка $L_{\supset\neg}$ в $\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$

$$\varphi_{\langle M(0,0,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A, v\rangle) \in \{1\}$$

и для всякой оценки v языка $L_{\supset\neg}$ в $\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$

$$\varphi_{\langle M(0,0,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle(A \supset B), v\rangle) \in \{1\},$$

то для всякой оценки v языка $L_{\supset\neg}$ в $\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$

$$\varphi_{\langle M(0,0,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle B, v\rangle) \in \{1\}.$$

Лемма 5b (о замкнутости относительно правила modus ponens в $L_{\supset\neg}$ множества всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0,0,1,1), \neg(0,1,1)\rangle$)**.** Для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A и для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы B: если для всякой оценки v языка $L_{\supset\neg}$ в $\langle M(0,0,1,1), \neg(0,1,1)\rangle$

$$\varphi_{\langle M(0,0,1,1),\neg(0,1,1)\rangle}(\langle A, v\rangle) \in \{1\}$$

и для всякой оценки v языка $L_{\supset\neg}$ в $\langle M(0,0,1,1), \neg(0,1,1)\rangle$

$$\varphi_{\langle M(0,0,1,1),\neg(0,1,1)\rangle}(\langle(A \supset B), v\rangle) \in \{1\},$$

то для всякой оценки v языка $L_{\supset\neg}$ в $\langle M(0,0,1,1), \neg(0,1,1)\rangle$

$$\varphi_{\langle M(0,0,1,1),\neg(0,1,1)\rangle}(\langle B, v\rangle) \in \{1\}.$$

Опираясь на леммы 1 и 5, на леммы 1a и 5a, на леммы 1b и 5b, можно доказать, используя возвратную индукцию по длине $HCl_{\supset\neg}$-доказательства $L_{\supset\neg}$-формулы, следующие леммы 6, 6a, 6b соответственно.

Лемма 6. Всякая $HCl_{\supset\neg}$-доказуемая $L_{\supset\neg}$-формула общезначима в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1,0,0,1), \neg(0,0,1)\rangle$.

Лемма 6a. Всякая $HCl_{\supset\neg}$-доказуемая $L_{\supset\neg}$-формула общезначима в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$.

Лемма 6b. Всякая $HCl_{\supset\neg}$-доказуемая $L_{\supset\neg}$-формула общезначима в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0,0,1,1), \neg(0,1,1)\rangle$.

В свете лемм 6, 6a, 6b, сформулированной ранее теоремы об аксиоматизируемости $L_{\supset\neg}$-логики $Cl_{\supset\neg}$ посредством исчисления $HCl_{\supset\neg}$ и того, что $Cl_{\supset\neg}$ есть множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$, убеждаемся в справедливости следующих лемм 7, 7a и 7b.

Лемма 7. Всякая $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$, является $L_{\supset\neg}$-формулой, общезначимой в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1,0,0,1), \neg(0,0,1)\rangle$.

Лемма 7a. Всякая $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$, является $L_{\supset\neg}$-формулой, общезначимой в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$.

Лемма 7b. Всякая $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$, является $L_{\supset\neg}$-формулой, общезначимой в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0,0,1,1), \neg(0,1,1)\rangle$.

Лемма 8. Для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A и для всякой оценки v языка $L_{\supset\neg}$ в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$ $\varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle A, v\rangle) = \varphi_{\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle}(\langle A, v\rangle)$.

Лемма 8 доказана методом индукции по построению $L_{\supset\neg}$-формулы.

Лемма 9. Для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A: если A есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1,0,0,1), \neg(0,0,1)\rangle$, то A есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$.

Лемма 9 доказана методом от противного с использованием леммы 8.

Следствием леммы 7 и леммы 9 является УТВЕРЖДЕНИЕ I.

Утверждение I. Для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A: A есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1,0,0,1), \neg(0,0,1)\rangle$ тогда и только тогда, когда A есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$.

Опираясь на УТВЕРЖДЕНИЕ I, на соглашение 11 (из Попов 2019a) о том, что через $Cl_{\supset\neg}$ обозначается множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$, и на определению 8 (из Попов 2019a) $L_{\supset\neg}$-матрицы, адекватной $L_{\supset\neg}$-логике, получаем, что верно следующее УТВЕРЖДЕНИЕ II.

Утверждение II. $\langle M(1,0,0,1), \neg(0,0,1)\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица, адекватная $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$.

Соглашение 1. Обозначаем через h множество $\{\langle 1,1\rangle, \langle 1/2, 0\rangle, \langle 0,0\rangle\}$.

Замечание 1. h есть отображение множества $\{1, 1/2, 0\}$ на множество $\{0,1\}$.

Замечание 2. Для всякой оценки v языка $L_{\supset\neg}$ в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2, 1,1)\rangle$ существует единственное множество всех упорядоченных пар, каждая из которых имеет вид $\langle q, x\rangle$, где q есть пропозициональная переменная языка $L_{\supset\neg}$ и $x = h(v(q))$.

Определение 1. α называем h-напарником оценки v языка $L_{\supset\neg}$ в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$, если v есть оценка языка $L_{\supset\neg}$ в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0,0,1, 1), \neg(1/2,1,1)\rangle$ и $\alpha = \{\langle q, x\rangle \mid q$ есть пропозициональная переменная языка $L_{\supset\neg}$ и $x = h(v(q))\}$.

Соглашение 2. Обозначаем через $h[v]$, где v есть оценка языка $L_{\supset\neg}$ в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$, h-напарника оценки v языка $L_{\supset\neg}$ в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0, 0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$.

Замечание 3. Для всякой оценки v языка $L_{\supset\neg}$ в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1,0,0,1), \neg(1/2, 1,1)\rangle$ $h[v]$ является оценкой языка $L_{\supset\neg}$ в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$.

Лемма 10. Для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A и для всякой оценки v языка $L_{\supset\neg}$ в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$

$$h(\varphi_{\langle M(0,0,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A, v\rangle)) = \varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle A, h[v]\rangle).$$

Лемма 10 доказана методом индукции по построению $L_{\supset\neg}$-формулы.

Лемма 11. Для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A: если A есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$, то A есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$.

Лемма 11 доказана методом от противного с использованием леммы 10.

Следствием леммы 7а и леммы 11 является УТВЕРЖДЕНИЕ III.

Утверждение III. Для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A: A есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$ тогда и только тогда, когда A есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$.

Опираясь на УТВЕРЖДЕНИЕ III, на соглашение 11 (из Попов 2019) о том, что через $Cl_{\supset\neg}$ обозначается множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$, и на определению 8 (из Попов 2019) $L_{\supset\neg}$-матрицы, адекватной $L_{\supset\neg}$-логике, получаем, что верно следующее УТВЕРЖДЕНИЕ IV.

Утверждение IV. $\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица, адекватная $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$.

Лемма 12. Для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A и для всякой оценки v языка $L_{\supset\neg}$ в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0,0,1,1), \neg(0,1,1)\rangle$ $h(\varphi_{\langle M(0,0,1,1),\neg(0,1,1)\rangle}(\langle A, v\rangle)) = \varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle A, h[v]\rangle)$.

Лемма 12 доказана методом индукции по построению $L_{\supset\neg}$-формулы.

Лемма 13. Для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A: если A есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0,0,1,1), \neg(0,1,1)\rangle$, то A есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$.

Лемма 13 доказана методом от противного с использованием леммы 12.

Следствием леммы 7а и леммы 13 является УТВЕРЖДЕНИЕ V.

Утверждение V. Для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A: A есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0,0,1,1), \neg(0,1,1)\rangle$ тогда и только тогда, когда A есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$.

Опираясь на УТВЕРЖДЕНИЕ V, на соглашение 11 (из Попов 2019) о том, что через $Cl_{\supset\neg}$ обозначается множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$, и на определению 8 (из Попов 2019) $L_{\supset\neg}$-матрицы, адекватной $L_{\supset\neg}$-логике, получаем, что верно следующее УТВЕРЖДЕНИЕ IV.

Утверждение VI. $\langle M(0,0,1,1), \neg(0,1,1)\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица, адекватная $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$.

Опираясь на сформулированные в (Попов 2019a) определение 2, замечание 9 и соглашение 13, а также на сформулированные в (Попов 2019b) замечание 3, соглашение 2, соглашение 4 и замечание 4, приходим к выводу о том, что верна следующая лемма 14.

Лемма 14. Множество всех $L_{\supset\neg}$-матриц вида $\langle M(1,0,0,1), \neg(x,y,z)\rangle$, где x, y, $z \in \{1, 1/2, 0\}$ равно множеству

$\{\langle M(1,0,0,1), \neg(1,1,1)\rangle$, $\langle M(1,0,0,1), \neg(1,1,1/2)\rangle$, $\langle M(1,0,0,1), \neg(1,1,0)\rangle$,

$\langle M(1,0,0,1), \neg(1,1/2,1)\rangle$, $\langle M(1,0,0,1), \neg(1,1/2,1/2)\rangle$, $\langle M(1,0,0,1), \neg(1,1/2,0)\rangle$,

$\langle M(1,0,0,1), \neg(1,0,1)\rangle$, $\langle M(1,0,0,1), \neg(1,0,1/2)\rangle$, $\langle M(1,0,0,1), \neg(1,0,0)\rangle$,

$\langle M(1,0,0,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$, $\langle M(1,0,0,1), \neg(1/2,1,1/2)\rangle$, $\langle M(1,0,0,1), \neg(1/2,1,0)\rangle$,

$\langle M(1,0,0,1), \neg(1/2,1/2,1)\rangle$, $\langle M(1,0,0,1), \neg(1/2,1/2,1/2)\rangle$, $\langle M(1,0,0,1), \neg(1/2,1/2,0)\rangle$,

$\langle M(1,0,0,1), \neg(1/2,0,1)\rangle$, $\langle M(1,0,0,1), \neg(1/2,0,1/2)\rangle$, $\langle M(1,0,0,1), \neg(1/2,0,0)\rangle$,

$\langle M(1,0,0,1), \neg(0,1,1)\rangle$, $\langle M(1,0,0,1), \neg(0,1,1/2)\rangle$, $\langle M(1,0,0,1), \neg(0,1,0)\rangle$,

$\langle M(1,0,0,1), \neg(0,1/2,1)\rangle$, $\langle M(1,0,0,1), \neg(0,1/2,1/2)\rangle$, $\langle M(1,0,0,1), \neg(0,1/2,0)\rangle$,

$\langle M(1,0,0,1), \neg(0,0,1)\rangle$, $\langle M(1,0,0,1), \neg(0,0,1/2)\rangle$, $\langle M(1,0,0,1), \neg(0,0,0)\rangle\}$.

Используя стандартные приемы проверки общезначимости пропозициональных формул в конечных логических матрицах, получаем, что справедливы следующие замечания 4–11.

Замечание 4. Для всякой $L_{\supset\neg}$-матрицы K вида $\langle M(1,0,0,1), \neg(1,y,z)\rangle$, где y, $z \in \{1, 1/2, 0\}$, верно, что $(\neg(p_1 \supset p_1))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице K. Но $(\neg(p_1 \supset p_1))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, не общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$.

Замечание 5. Для всякой $L_{\supset\neg}$-матрицы K вида $\langle M(1,0,0,1), \neg(1/2,y,z)\rangle$, где y, $z \in \{1, 1/2, 0\}$, верно, что $((p_1 \supset (\neg(p_1 \supset p_1))) \supset (\neg(p_1 \supset p_1)))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице K. Но $((p_1 \supset (\neg(p_1 \supset p_1))) \supset (\neg(p_1 \supset p_1)))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, не общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$.

Замечание 6. Для всякой $L_{\supset\neg}$-матрицы K из $\{\langle M(1,0,0,1), \neg(0,1,1)\rangle, \langle M(1,0,0,1), \neg(0,1/2,1)\rangle\}$ верно, что $((\neg p_1) \supset (p_1 \supset p_2))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, которая не общезначима в $L_{\supset\neg}$-матрице K. Но $((\neg p_1) \supset (p_1 \supset p_2))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$.

Замечание 7. $(p_1 \supset (\neg(\neg(\neg(p_1 \supset p_1)))))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1,0,0,1), \neg(0,1,1/2)\rangle$, но не общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$.

Замечание 8. Для всякой $L_{\supset\neg}$-матрицы K из $\{\langle M(1,0,0,1), \neg(0,1,0)\rangle, \langle M(1,0,0,1), \neg(0,0,0)\rangle\}$ верно, что $((\neg p_1) \supset p_1)$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице K. Но $((\neg p_1) \supset p_1)$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, не общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$.

Замечание 9. $((p_1 \supset p_1) \supset (\neg(\neg p_1)))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1,0,0,1), \neg(0,1/2,1/2)\rangle$, но не общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$.

Замечание 10. $((\neg(\neg(p_1 \supset p_1))) \supset (\neg(p_1 \supset p_1)))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1,0,0,1), \neg(0,1/2,0)\rangle$, но не общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$.

Замечание 11. Множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1,0,0,1), \neg(0,0,1/2)\rangle$, не замкнуто относительно modus ponens в $L_{\supset\neg}$ (так как $(p_1 \supset p_1)$ и $((p_1 \supset p_1) \supset (\neg(\neg(p_1 \supset p_1))))$ являются $L_{\supset\neg}$-формулами, общезначимыми в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1,0,0,1), \neg(0,0,1/2)\rangle$), а $(\neg(\neg(p_1 \supset p_1)))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, которая не общезначима в этой $L_{\supset\neg}$-матрице). Но множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$, замкнуто относительно modus ponens в $L_{\supset\neg}$.

Опираясь на лемму 14, убеждаемся в справедливости следующей леммы 15.

Лемма 15. Для всякой $L_{\supset\neg}$-матрицы K вида $\langle M(1,0,0,1), f\rangle$: если $K \neq \langle M(1,0,0,1), \neg(0,0,1)\rangle$, то верно следующее:

(i) K есть $L_{\supset\neg}$-матрица вида $\langle M(1,0,0,1), \neg(1,y,z)\rangle (y,z \in \{1,1/2,0\})$, или

(ii) K есть $L_{\supset\neg}$-матрица вида $\langle M(1,0,0,1), \neg(1/2,y,z)\rangle (y,z \in \{1,1/2,0\})$, или

(iii) $K \in \{\langle M(1,0,0,1), \neg(0,1,1)\rangle, \langle M(1,0,0,1), \neg(0,1/2,1)\rangle\}$, или

(iv) $K = \langle M(1,0,0,1), \neg(0,1,1/2)\rangle$, или

(v) $K \in \{\langle M(1,0,0,1), \neg(0,1,0)\rangle, \langle M(1,0,0,1), \neg(0,0,0)\rangle\}$, или

(vi) $K = \langle M(1,0,0,1), \neg(0,1/2,1/2)\rangle$, или

(vii) $K = \langle M(1,0,0,1), \neg(0,1/2,0)\rangle$, или

(viii) $K = \langle M(1,0,0,1), \neg(0,0,1/2)\rangle$.

Используя замечания 4–11 и лемму 15, легко доказать следующее УТВЕРЖДЕНИЕ VII.

Утверждение VII. Для всякой $L_{\supset\neg}$-матрицы K вида $\langle M(1,0,0,1), f\rangle$: если $K \neq \langle M(1,0,0,1), \neg(0,0,1)\rangle$, то множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в K, не равно множеству всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $M(Cl_{\supset\neg})$.

Опираясь на УТВЕРЖДЕНИЕ VII, на соглашение 11 (из Попов 2019a) о том, что через $Cl_{\supset\neg}$ обозначается множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$, и на определение 8 (из Попов 2019a) $L_{\supset\neg}$-матрицы, адекватной $L_{\supset\neg}$-логике, получаем, что верно следующее УТВЕРЖДЕНИЕ VIII.

Утверждение VIII. Для всякой $L_{\supset\neg}$-матрицы K вида $\langle M(1,0,0,1), f\rangle$: если $K \neq \langle M(1,0,0,1), \neg(0,0,1)\rangle$, то K не является $L_{\supset\neg}$-матрицей, адекватной $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$.

Теорема 2. $\langle M(1,0,0,1), \neg(0,0,1)\rangle$ *есть единственная* $L_{\supset\neg}$*-матрица вида* $\langle M(1,0,0,1), f\rangle$*, адекватная* $L_{\supset\neg}$*-логике* $Cl_{\supset\neg}$.

Теорема 2 вытекает из УТВЕРЖДЕНИЯ II и УТВЕРЖДЕНИЯ VIII.

Опираясь на сформулированные в (Попов 2019a) определение 2, замечание 9 и соглашение 13, а также на сформулированные в (Попов 2019b) замечание 3, соглашение 2, соглашение 4 и замечание 4, приходим к выводу о том, что верна следующая лемма 16.

Лемма 16. Множество всех $L_{\supset\neg}$-матриц вида $\langle M(0,0,1,1), \neg(x,y,z)\rangle$, где x, y, $z \in \{1, 1/2, 0\}$ равно множеству

$\{\langle M(0,0,1,1), \neg(1,1,1)\rangle$, $\langle M(0,0,1,1), \neg(1,1,1/2)\rangle$, $\langle M(0,0,1,1), \neg(1,1,0)\rangle$

$\langle M(0,0,1,1), \neg(1,1/2,1)\rangle$, $\langle M(0,0,1,1), \neg(1,1/2,1/2)\rangle$, $\langle M(0,0,1,1), \neg(1,1/2,0)\rangle$,

$\langle M(0,0,1,1), \neg(1,0,1)\rangle$, $\langle M(0,0,1,1), \neg(1,0,1/2)\rangle$, $\langle M(0,0,1,1), \neg(1,0,0)\rangle$

$\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$, $\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,1,1/2)\rangle$, $\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,1,0)\rangle$,

$\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,1/2,1)\rangle$, $\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,1/2,1/2)\rangle$, $\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,1/2,0)\rangle$

$\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,0,1)\rangle$, $\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,0,1/2)\rangle$, $\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,0,0)\rangle$,

$\langle M(0,0,1,1), \neg(0,1,1)\rangle$, $\langle M(0,0,1,1), \neg(0,1,1/2)\rangle$, $\langle M(0,0,1,1), \neg(0,1,0)\rangle$

$\langle M(0,0,1,1), \neg(0,1/2,1)\rangle$, $\langle M(0,0,1,1), \neg(0,1/2,1/2)\rangle$, $\langle M(0,0,1,1), \neg(0,1/2,0)\rangle$,

$\langle M(0,0,1,1), \neg(0,0,1)\rangle$, $\langle M(0,0,1,1), \neg(0,0,1/2)\rangle$, $\langle M(0,0,1,1), \neg(0,0,0)\rangle\}$.

Используя стандартные приемы проверки общезначимости пропозициональных формул в конечных логических матрицах, получаем, что справедливы следующие замечания 12–17.

Замечание 12. Для всякой $L_{\supset\neg}$-матрицы K вида $\langle M(0,0,1,1), \neg(1,y,z)\rangle$, где y, $z \in \{1, 1/2, 0\}$, верно, что $(\neg(p_1 \supset p_1))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице K. Но $(\neg(p_1 \supset p_1))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, не общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$.

Замечание 13. $((\neg((p_1 \supset p_1) \supset (\neg(p_1 \supset p_1)))) \supset p_1)$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,1,1/2)\rangle$ и $\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,1,0)\rangle$, но не общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$.

Замечание 14. $((\neg(\neg(p_1 \supset p_1))) \supset p_1)$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в каждой $L_{\supset\neg}$-матрице вида $\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,1/2,z)\rangle$, где $z \in \{1, 1/2, 0\}$, и в каждой $L_{\supset\neg}$-матрице вида $\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,0,z)\rangle$, где $z \in \{1, 1/2, 0\}$, но не общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$.

Замечание 15. $((\neg(\neg(p_1 \supset p_1))) \supset p_1)$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в каждой из $L_{\supset\neg}$-матриц $\langle M(0,0,1,1), \neg(0,1,1/2)\rangle$ и $\langle M(0,0,1,1), \neg(0,1,0)\rangle$, но не общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$.

Замечание 16. $((p_1 \supset (\neg(p_1 \supset p_1))) \supset (\neg p_1))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, не общезначимая ни в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0,0,1,1), \neg(0,1/2,1)\rangle$, ни в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0,0,1,1), \neg(0,0,1)\rangle$, но общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$.

Замечание 17. $((\neg p_1) \supset p_1)$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в каждой из $L_{\supset\neg}$-матриц $\langle M(0,0,1,1), \neg(0,1/2,1/2)\rangle$, $\langle M(0,0,1,1), \neg(0,1/2,0)\rangle$, $\langle M(0,0,1,1), \neg(0,0,1/2)\rangle$ и $\langle M(0,0,1,1), \neg(0,0,0)\rangle$, но не общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$.

Опираясь на лемму 16, убеждаемся в справедливость следующей леммы 17.

Лемма 17. Для всякой $L_{\supset\neg}$-матрицы K вида $\langle M(0,0,1,1), f\rangle$: если $K \neq \langle M(1,0,0,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$ и $K \neq \langle M(1,0,0,1), \neg(0,1,1)\rangle$, то верно следующее:

(i) K есть $L_{\supset\neg}$-матрица вида $\langle M(0,0,1,1), \neg(1,y,z)\rangle (y, z \in \{1, 1/2, 0\})$, или

(ii) $K \in \{\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,1,1/2)\rangle, \langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,1,0)\rangle\}$, или

(iii) K есть $L_{\supset\neg}$-матрица вида $\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,y,z)\rangle (y \in \{1/2, 0\},\ \text{а } z \in \{1, 1/2, 0\})$, или

(iv) $K \in \{\langle M(0,0,1,1), \neg(0,1,1/2)\rangle, \langle M(0,0,1,1), \neg(0,1,0)\rangle\}$, или

(v) $K \in \{\langle M(0,0,1,1), \neg(0,1/2,1)\rangle, \langle M(0,0,1,1), \neg(0,0,1)\rangle\}$, или

(vi) $K \in \{\langle M(0,0,1,1), \neg(0,1/2,1/2)\rangle, \langle M(0,0,1,1), \neg(0,1/2,0)\rangle, \langle M(0,0,1,1), \neg(0, 0,1/2)\rangle, \langle M(0,0,1,1), \neg(0,0,0)\rangle\}$.

Используя замечания 12–17 и лемму 17, легко доказать следующее утверждение IX.

Утверждение IX. Для всякой $L_{\supset\neg}$-матрицы K вида $\langle M(0,0,1,1), f\rangle$: если $K \neq \langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$ и $K \neq \langle M(0,0,1,1), \neg(0,1,1)\rangle$, то множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в K, не равно множеству всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$.

Опираясь на утверждение IX, на соглашение 11 (из Попов 2019a) о том, что через $Cl_{\supset\neg}$ обозначается множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$, и на определение 8 (из Попов 2019a) $L_{\supset\neg}$-матрицы, адекватной $L_{\supset\neg}$-логике, получаем, что верно следующее утверждение X.

Утверждение X. Для всякой $L_{\supset\neg}$-матрицы K вида $\langle M(0,0,1,1), f\rangle$: если $K \neq \langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$ и $K \neq \langle M(0,0,1,1), \neg(0,1,1)\rangle$, то K не является $L_{\supset\neg}$-матрицей, адекватной $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$.

Теорема 3. *Множество всех $L_{\supset\neg}$-матриц вида $\langle M(0,0,1,1), f\rangle$, каждая из которых есть $L_{\supset\neg}$-матрица, адекватная $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$, равно* $\{\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2, 1,1)\rangle, \langle M(0,0,1,1), \neg(0,1,1)\rangle\}$.

Теорема 3 вытекает из утверждения IV, утверждения VI и утверждения X.

Второй раздел

Согласно соглашению 5 из (Попов 2019a), s есть отображение множества $\{1, 1/2, 0\}$ на себя, определяемое таблицей

s	1	1/2	0
	1	0	1/2

Замечание 18. Для всякой унарной операции f на множестве $\{1, 1/2, 0\}$ $s(f(1))$, $s(f(0))$ и $s(f(1/2))$ принадлежат множеству $\{1, 1/2, 0\}$.

Лемма 18. Для всякой унарной операции f на множестве $\{1, 1/2, 0\}$: $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset(1/2,1,1,1/2), f\rangle$ и $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset(1,0,0,1), \neg(s(f(1)), s(f(0)), s(f(1/2)))\rangle$ являются $L_{\supset\neg}$-матрицами, а s есть изоморфизм $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset(1/2,1,1,1/2), f\rangle$ на $L_{\supset\neg}$-матрицу $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset (1,0,0,1), \neg(s(f(1)), s(f(0)), s(f(1/2)))\rangle$.

Докажем лемму 18.

(1) f_0 есть унарная операция на $\{1, 1/2, 0\}$ (допущение).

Очевидно, что

(2) $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset(1/2, 1, 1, 1/2), f_0\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица.

Учитывая замечание 18, нетрудно видеть, что

(3) $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset(1, 0, 0, 1), \neg(s(f(1)), s(f(0)), s(f(1/2)))\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица.

Опираясь на таблицу, определяющую отображение s, получаем, что верны следующие утверждения (4) и (5).

(4) s есть взимно-однозначное отображение множества $\{1, 1/2, 0\}$ на себя.

(5) $s(1) = 1$.

Проведя простое рассуждение по случаям, приходим к выводу, что

(6) для всякого x из $\{1, 1/2, 0\}$ и для всякого y из $\{1, 1/2, 0\}$, $s((x \supset (1/2, 1, 1, 1/2)y)) = (s(x) \supset (1, 0, 0, 1)s(y))$.

Покажем, что верно следующее утверждение (7).

(7) Для всякого x из $\{1, 1/2, 0\}$ $s(f_0(x)) = \neg(s(f_0(1)), s(f_0(0)), s(f_0(1/2)))(s(x))$.

Используя табличное определение отображения s и определение операции $\neg(s(f_0(1)), s(f_0(0)), s(f_0(1/2)))$, убеждаемся, что верны следующие утверждения (7.1), (7.2) и (7.3).

(7.1) $s(f_0(1)) = \neg(s(f_0(1)), s(f_0(0)), s(f_0(1/2)))(s(1))$.

(7.2) $s(f_0(1/2)) = \neg(s(f_0(1)), s(f_0(0)), s(f_0(1/2)))(s(1/2))$.

(7.3) $s(f_0(0)) = \neg(s(f_0(1)), s(f_0(0)), s(f_0(1/2)))(s(0))$.

Очевидно, что утверждение (7) вытекает из утверждений (7.1), (7.2) и (7.3).

Опираясь на (2), (3), (4), (5), (6), (7) и на определение изоморфизма $L_{\supset\neg}$-матриц вида $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g, f\rangle$ (см. замечание 1 из Попов 2020), получаем, что

(8) s есть изоморфизм $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset(1/2, 1, 1, 1/2), f_0\rangle$ на $L_{\supset\neg}$-матрицу $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset(1, 0, 0, 1), \neg(s(f_0(1)), s(f_0(0)), s(f_0(1/2)))\rangle$.

Снимая допущение (1) и обобщая, завершаем доказательство леммы 18.
Лемма 18 доказана.

Утверждение XI. $\langle M(1/2, 1, 1, 1/2), \neg(1/2, 1, 1/2)\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица, адекватная $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$.

Докажем утверждение XI.

(1) $\neg(1/2, 1, 1/2)$ есть такая унарная операция на множестве $\{1, 1/2, 0\}$, что верно следующее: $\neg(1/2, 1, 1/2)(1) = 1/2$, $\neg(1/2, 1, 1/2)(1/2) = 1$, и $\neg(1/2, 1, 1/2)(0) = 1/2$ (по замечанию 9 из (Попов 2019a) и соглашению 13 из (Попов 2019a)).

Опираясь на утверждение (1) и на упомянутое выше соглашение 5 из (Попов 2019a), получаем, что

(2) $s(\neg(1/2, 1, 1/2)(1)) = 0$, $s(\neg(1/2, 1, 1/2)(0)) = 0$, и $s(\neg(1/2, 1, 1/2)(1/2)) = 1$.

Опираясь на тот факт, что $\neg(1/2, 1, 1/2)$ есть унарная операция на множестве $\{1, 1/2, 0\}$ (см. утверждение (1)) и на лемму 18, получаем, что

(3) s есть изоморфизм $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset(1/2, 1, 1, 1/2), \neg(1/2, 1, 1/2)\rangle$ на $L_{\supset\neg}$-матрицу $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset(1, 0, 0, 1), \neg(s(\neg(1/2, 1, 1/2)(1)), s(\neg(1/2, 1, 1/2)(0)), s(\neg(1/2, 1, 1/2)(1/2)))\rangle$.

(4) s есть изоморфизм $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset(1/2, 1, 1, 1/2), \neg(1/2, 1, 1/2)\rangle$ на $L_{\supset\neg}$-матрицу $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset(1, 0, 0, 1), \neg(0, 0, 1)\rangle$ (из (2) и (3)).

Итак,

(5) существует изоморфизм $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset(1/2, 1, 1, 1/2), \neg(1/2, 1, 1/2)\rangle$ на $L_{\supset\neg}$-матрицу $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset(1, 0, 0, 1), \neg(0, 0, 1)\rangle$.

(6) Существует изоморфизм $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle M(1/2, 1, 1, 1/2), \neg(1/2, 1, 1/2)\rangle$ на $L_{\supset\neg}$-матрицу $\langle M(1, 0, 0, 1), \neg(0, 0, 1)\rangle$ (из (5) и того, что $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset(1, 0, 0, 1), \neg(0, 0, 1)\rangle$ и $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset(1/2, 1, 1, 1/2), \neg(1/2, 1, 1/2)\rangle$ являются $L_{\supset\neg}$-матрицами, а $M(1, 0, 0, 1) = \langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset(1, 0, 0, 1)\rangle$ и $M(1/2, 1, 1, 1/2) = \langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset(1/2, 1, 1, 1/2)\rangle$).

(7) $L_{\supset\neg}$-матрица $\langle M(1/2, 1, 1, 1/2), \neg(1/2, 1, 1/2)\rangle$ изоморфна $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1, 0, 0, 1), \neg(0, 0, 1)\rangle$ (из (6), по определению 2 из (Попов 2020)).

(8) Множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1/2, 1, 1, 1/2), \neg(1/2, 1, 1/2)\rangle$, равно множеству всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1, 0, 0, 1), \neg(0, 0, 1)\rangle$ (из (7), по теореме 1 из (Попов 2020)).

(9) Для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A: A есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1, 0, 0, 1), \neg(0, 0, 1)\rangle$ тогда и только тогда, когда $A \in Cl_{\supset\neg}$ (из теоремы 1, по определению 8, данному в (Попов 2019a)).

(10) Множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1, 0, 0, 1), \neg(0, 0, 1)\rangle$, равно $Cl_{\supset\neg}$ (из (9)).

(11) Множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1/2, 1, 1, 1/2), \neg(1/2, 1, 1/2)\rangle$, равно $Cl_{\supset\neg}$ (из (8) и (10)).

(12) Для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A: A есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1/2, 1, 1, 1/2), \neg(1/2, 1, 1/2)\rangle$ тогда и только тогда, когда $A \in Cl_{\supset\neg}$ (из (11)).

Опираясь на тот факт, что $\langle M(1/2, 1, 1, 1/2), \neg(1/2, 1, 1/2)\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица, на утверждение (12) и на определение 8 из (Попов 2019a), получаем, что

(13) $\langle M(1/2, 1, 1, 1/2), \neg(1/2, 1, 1/2)\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица, адекватная $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$.

утверждение XI доказано.

Утверждение XII. Для всякой $L_{\supset\neg}$-матрицы вида $\langle M(1/2, 1, 1, 1/2), f\rangle$: если $K \neq \langle M(1/2, 1, 1, 1/2), \neg(1/2, 1, 1/2)\rangle$, то K не является $L_{\supset\neg}$-матрицей, адекватной $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$.

Докажем утверждение XII.

(1) K_0 есть $L_{\supset\neg}$-матрица вида $\langle M(1/2, 1, 1, 1/2), f\rangle$ (допущение).

(2) $K_0 \neq \langle M(1/2, 1, 1, 1/2), \neg(1/2, 1, 1/2)\rangle$ (допущение).

(3) K_0 есть $L_{\supset\neg}$-матрица, адекватная $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$ (допущение).

В свете утверждения (1) ясно, что

(4) существует такая унарная операция f на множестве $\{1, 1/2, 0\}$, что $K_0 = \langle M(1/2, 1, 1, 1/2), f\rangle$.

Пусть

(5) f_0 есть унарная операция на множестве $\{1, 1/2, 0\}$, $K_0 = \langle M(1/2, 1, 1, 1/2), f_0\rangle$.

(6) f_0 есть унарная операция на множестве $\{1, 1/2, 0\}$ (из (5)).

(7) $K_0 = \langle M(1/2, 1, 1, 1/2), f_0\rangle$ (из (5)).

Опираясь на утверждение (6) и используя лемму 18, получаем, что

(8) s есть изоморфизм $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset (1/2, 1, 1, 1/2), f_0\rangle$ на $L_{\supset\neg}$-матрицу $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset (1, 0, 0, 1), \neg(s(f_0(1)), s(f_0(0)), s(f_0(1/2)))\rangle$.

Используя теорему о равенстве упорядоченных пар и утверждения (2) и (7), получаем, что

(9) $f_0 \neq \neg(1/2, 1, 1/2)$.

(10) $\neg(s(f_0(1)), s(f_0(0)), s(f_0(1/2))) = \neg(0, 0, 1)$ (допущение).

Опираясь на утверждение (10), на определение операции $\neg s(f_0(1)), s(f_0(0)), s(f_0(1/2)))$ и на определение операции $\neg(0, 0, 1)$, получаем, что

(11) $s(f_0(1)) = 0, s(f_0(0)) = 0, s(f_0(1/2)) = 1$.

Опираясь на утверждение (11) и на приведенное выше соглашение 5 из (Попов 2019a), получаем, что

(12) $f_0(1) = 1/2, f_0(1/2) = 1, f_0(0) = 1/2$.

(13) $f_0 = \neg(1/2, 1, 1/2)$ (из (6) и (13) с использованием замечания 9 из (Попов 2019a) и соглашения 13 из (Попов 2019a)).

Утверждение (13) противоречит утверждению (9). Следовательно, неверно допущение (10). Но тогда

(14) $\neg(s(f_0(1)), s(f_0(0)), s(f_0(1/2))) \neq \neg(0, 0, 1)$.

(15) $\langle(1/2, 1, 1, 1/2), f_0\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица, адекватная $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$ (из (3) и (7)).

Опираясь на утверждение 8 и на определения $L_{\supset}$-матриц $(1/2, 1, 1, 1/2)$ и $(1, 0, 0, 1)$, получаем, что

(16) s есть изоморфизм $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle M(1/2, 1, 1, 1/2), f_0\rangle$ на $L_{\supset\neg}$-матрицу $\langle M(1, 0, 0, 1), \neg(s(f_0(1)), s(f_0(0)), s(f_0(1/2)))\rangle$.

Используя утверждение (16) и данное в (Попов 2020a) определение 2, получаем, что

(17) $L_{\supset\neg}$-матрица $\langle M(1/2, 1, 1, 1/2), f_0\rangle$ изоморфна $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1, 0, 0, 1), \neg(s(f_0(1)), s(f_0(0)), s(f_0(1/2)))\rangle$.

(18) Множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1/2, 1, 1, 1/2), f_0\rangle$, равно множеству всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1, 0, 0, 1), \neg(s(f_0(1)), s(f_0(0)), s(f_0(1/2)))\rangle$ (из (17), по теореме 1 из (Попов 2020)).

Опираясь на утверждение (15) и на данное в (Попов 2019a) определение $L_{\supset\neg}$-матрицы, адекватной заданной $L_{\supset\neg}$-логике, получаем, что

(19) множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1/2, 1, 1, 1/2), f_0\rangle$ равно $Cl_{\supset\neg}$.

(20) Множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1,0,0,1), \neg(s(f_0(1)), s(f_0(0)), s(f_0(1/2)))\rangle$ равно есть $L_{\supset\neg}$-матрица, адекватная $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$ (из (18) и (19)).

Разумеется, что

(21) $\langle M(1,0,0,1), \neg(s(f_0(1)), s(f_0(0)), s(f_0(1/2)))\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица вида $\langle M(1,0,0,1), f\rangle$.

(22) $\langle (1,0,0,1), \neg(0,0,1)\rangle = \langle M(1,0,0,1), \neg(s(f_0(1)), s(f_0(0)), s(f_0(1/2)))\rangle$ (из утверждений (20), (21) и теоремы 1).

Опираясь на утверждение (22) и применяя теорему о равенстве упорядоченных пар, получаем, пользуясь симметричностью равенства, что

(23) $\neg(s(f_0(1)), s(f_0(0)), s(f_0(1/2))) = \neg(0,0,1)$.

Утверждение (23) противоречит утверждению (14). Следовательно, неверно допущение (3). Но тогда

(24) K_0 не является $L_{\supset\neg}$-матрицей, адекватной $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$.

Снимая допущения (2) и (1) и обобщая, завершаем доказательство УТВЕРЖДЕНИЯ XII.

УТВЕРЖДЕНИЕ XII доказано.

Теорема 4. *$\langle M(1/2,1,1,1/2), \neg(1/2,1,1/2)\rangle$ есть единственная $L_{\supset\neg}$-матрица вида $\langle M(1/2,1,1,1/2), f\rangle$, адекватная $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$.*

Теорема 4 вытекает из УТВЕРЖДЕНИЯ XI и УТВЕРЖДЕНИЯ XII.

Лемма 19. Для всякой унарной операции f на множестве $\{1,1/2,0\}$: $\langle\{1,1/2,0\}, \{1\}, \supset(1/2,1/2,1,1), f\rangle$ и $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\supset(0,0,1,1), \neg(s(f(1)), s(f(0)), s(f(1/2)))\rangle$ являются $L_{\supset\neg}$-матрицами, а s есть изоморфизм $L_{\supset\neg}$-матрицы $\{1,1/2,0\}$: $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\supset(1/2,1/2,1,1), f\rangle$ на $L_{\supset\neg}$-матрицу $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\supset(0,0,1,1), \neg(s(f(1)), s(f(0)), s(f(1/2)))\rangle$.

Для леммы 19 можно построить доказательство, аналогичное предложенному выше доказательству леммы 18.

Утверждение XIII. $\langle M(1/2,1/2,1,1), \neg(0,1,1)\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица, адекватная $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$.

Утверждение XIV. $\langle M(1/2,1/2,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица, адекватная $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$.

Для утверждения XIII и утверждения XIV можно построить доказательства, аналогичные предложенному выше доказательству утверждения XI (при этом вместо леммы 18 следует использовать лемму 19, а вместо теоремы 1 следует использовать теорему 2).

Утверждение XV. Для всякой $L_{\supset\neg}$-матрицы K вида $\langle M(1/2,1/2,1,1), f\rangle$: если $K \neq \langle M(1/2,1/2,1,1), \neg(0,1,1)\rangle$ и $K \neq \langle M(1/2,1/2,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$, то K не является $L_{\supset\neg}$-матрицей, адекватной $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$.

Докажем утверждение XV.

(1) K_0 есть $L_{\supset\neg}$-матрица вида $\langle M(1/2,1/2,1,1), f\rangle$ (допущение).

(2) $K_0 \neq \langle M(1/2,1,1,1/2), \neg(0,1,1)\rangle$ и $K_0 \neq \langle M(1/2,1,1,1/2), \neg(1/2,1,1)\rangle$ (допущение).

(3) K_0 есть $L_{\supset\neg}$-матрица, адекватная $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$ (допущение).

Очевидно, что

(4) существует такая унарная операция на множестве $\{1,1/2,0\}$, что $K_0 = \langle M(1/2, 1/2,1,1), f\rangle$.

Пусть

(5) f_0 есть унарная операция на множестве $\{1,1/2,0\}$, $K_0 = \langle M(1/2,1/2,1,1), f_0\rangle$.

(6) f_0 есть унарная операция на множестве $\{1,1/2,0\}$ (из (5)).

(7) $K_0 = \langle M(1/2,1/2,1,1), f_0\rangle$ (из (5)).

В свете утверждения (6) ясно, что

(8) $f_0 = \neg(x,y,z)$ для некоторых $x,y,z \in \{1,1/2,0\}$.

Пусть

(9) $x_0,y_0,z_0 \in \{1,1/2,0\}$ и $f_0 = \neg(x_0,y_0,z_0)$.

(10) $x_0,y_0,z_0 \in \{1,1/2,0\}$ (из (9)).

(11) $f_0 = \neg(x_0,y_0,z_0)$ (из (9)).

(12) $K_0 = \langle M(1/2,1/2,1,1), \neg(x_0,y_0,z_0)\rangle$ (их (7) и (11)).

(13) $\langle M(1/2,1/2,1,1), \neg(x_0,y_0,z_0)\rangle \neq \langle M(1/2,1/2,1,1), \neg(0,1,1)\rangle$ и $\langle M(1/2,1/2,1, 1), \neg(x_0,y_0,z_0)\rangle \neq \langle M(1/2,1/2,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$ (из (2) и (12)).

Опираясь на утверждение (13) и теорему о равенстве упорядоченных пар, получаем, что

(14) $\neg(x_0, y_0, z_0) \neq \neg(0, 1, 1)$ и $\neg(x_0, y_0, z_0) \neq \neg(1/2, 1, 1)$.

В свете утверждения (14) ясно, что

(15) ($x_0 \neq 0$, или $y_0 \neq 1$, или $z_0 \neq 1$) и ($x_0 \neq 1/2$, или $y_0 \neq 1$, или $z_0 \neq 1$).

Опираясь на (15) и применяя классическую логику высказываний, получаем, что

(16) $x_0 \neq 0$ и $x_0 \neq 1/2$, или $y_0 \neq 1$, или $z_0 \neq 1$.

(17) $x_0 \in \{1, 1/2, 0\}$ (из (10)).

(18) $x_0 = 1$, или $y_0 \neq 1$, или $z_0 \neq 1$ (из (16) и (17)).

(19) $x_0 = 1$ (допущение).

Ясно, что

(20) $\neg(1, y_0, z_0)$ есть унарная операция на множестве $\{1, 1/2, 0\}$.

(21) s есть изоморфизм $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset (1/2, 1/2, 1, 1), \neg(1, y_0, z_0)\rangle$ на $L_{\supset\neg}$-матрицу $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset (0, 0, 1, 1), \neg(s(\neg(1, y_0, z_0)(1)), s(\neg(1, y_0, z_0)(0)), s(\neg(1, y_0, z_0)(1/2)))\rangle$ (из (20), по лемме 19).

Опирась на утверждение (21) и на то, что $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset (1/2, 1/2, 1, 1)\rangle = M(1/2, 1/2, 1, 1)$ и $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset (0, 0, 1, 1)\rangle = M(0, 0, 1, 1)$, делаем вывод, что справедливо следующее утверждение (22):

(22) s есть изоморфизм $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle M(1/2, 1/2, 1, 1), \neg(1, y_0, z_0)\rangle$ на $L_{\supset\neg}$-матрицу $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset (0, 0, 1, 1), \neg(s(\neg(1, y_0, z_0)(1)), s(\neg(1, y_0, z_0)(0)), s(\neg(1, y_0, z_0)(1/2)))\rangle$.

Ясно, что

(23) $s(\neg(1, y_0, z_0)(1) = 1$, $s(\neg(1, y_0, z_0)(1/2) = s(y_0), s(\neg(1, y_0, z_0)(0) = s(z_0)$.

(24) s есть изоморфизм $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle M(1/2, 1/2, 1, 1), \neg(1, y_0, z_0)\rangle$ на $L_{\supset\neg}$-матрицу $\langle M(0, 0, 1, 1), \neg(1, s(z_0), s(y_0))\rangle$ (из (22) и (23)).

(25) Существует изоморфизм $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle M(1/2, 1/2, 1, 1), \neg(1, y_0, z_0)\rangle$ на $L_{\supset\neg}$-матрицу $\langle M(0, 0, 1, 1), \neg(1, s(z_0), s(y_0))\rangle$ (из (24)).

(26) $L_{\supset\neg}$-матрица $\langle M(1/2, 1/2, 1, 1), \neg(1, y_0, z_0)\rangle$ изоморфна $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0, 0, 1, 1), \neg(1, s(z_0), s(y_0))\rangle$ (из (25), по определению 2 из (Попов 2020)).

(27) Множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1/2, 1/2, 1, 1), \neg(1, y_0, z_0)\rangle$, равно множеству всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0, 0, 1, 1), \neg(1, s(z_0), s(y_0))\rangle$ (из (26), по теореме 1 из (Попов 2020)).

(28) $K_0 = \langle M(1/2, 1/2, 1, 1), \neg(1, y_0, z_0)\rangle$ (из (12) и (19)).

(29) $\langle M(1/2, 1/2, 1, 1), \neg(1, y_0, z_0)\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица, адекватная $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$ (из (3) и (28)).

Опираясь на утверждения (27) и (29), а также на определение $L_{\supset\neg}$-матрицы, адекватной $L_{\supset\neg}$-логике (определение 8 из (Попов 2019a)), получаем, что

(30) $\langle M(0, 0, 1, 1), \neg(1, s(z_0), s(y_0))\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица, адекватная $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$.

Опираясь на утверждение (30) и применяя теорему 2, приходим к выводу, что

(31) $\langle M(0, 0, 1, 1), \neg(1, s(z_0), s(y_0))\rangle = \langle M(0, 0, 1, 1), \neg(1/2, 1, 1)\rangle$ или $\langle M(0, 0, 1, 1), \neg(1, s(z_0), s(y_0))\rangle = \langle M(0, 0, 1, 1), \neg(0, 1, 1)\rangle$.

Однако очевидно, что

(32) $\neg(1, s(z_0), s(y_0)) \neq \neg(1/2, 1, 1)$ и $\neg(1, s(z_0), s(y_0)) \neq \neg(0, 1, 1)$.

Опираясь на утверждение (32) и теорему о равенстве упорядоченных пар, получаем, что

(33) $\langle M(0, 0, 1, 1), \neg(1, s(z_0), s(y_0))\rangle \neq \langle M(0, 0, 1, 1), \neg(1/2, 1, 1)\rangle$ и $\langle M(0, 0, 1, 1), \neg(1, s(z_0), s(y_0))\rangle \neq \langle M(0, 0, 1, 1), \neg(0, 1, 1)\rangle$.

Утвреждение (33) противоречит утверждению (31). Но тогда неверно допущение (19).

Итак,

(34) $x_0 \neq 1$.

(35) $y_0 \neq 1$ или $z_0 \neq 1$ (из (18) и (34)).

(36) $y_0 \neq 1$ (допущение).

(37) $y_0 = 1/2$ или $y_0 = 0$ (из (10) и (36)).

(38) $\neg(x_0, y_0, z_0)$ есть унарная операция на множестве $\{1, 1/2, 0\}$ (из (6) и (11)).

(39) s есть изоморфизм $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset(1/2, 1/2, 1, 1), \neg(x_0, y_0, z_0)\rangle$ на $L_{\supset\neg}$-матрицу $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset(0, 0, 1, 1), \neg(s(\neg(x_0, y_0, z_0)(1)), s(\neg(x_0, y_0, z_0)(0)), s(\neg(x_0, y_0, z_0)(1/2)))\rangle$ (из (38), по лемме 19).

Опирась на утверждение (39) и на то, что $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset (1/2, 1/2, 1, 1)\rangle = M(1/2, 1/2, 1, 1)$ и $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset (0, 0, 1, 1)\rangle = M(0, 0, 1, 1)$, делаем вывод, что справедливо следующее утверждение (40):

(40) s есть изоморфизм $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle M(1/2, 1/2, 1, 1), \neg(x_0, y_0, z_0)\rangle$ на $L_{\supset\neg}$-матрицу $\langle M(0, 0, 1, 1), \neg(s(\neg(x_0, y_0, z_0)(1)), s(\neg(x_0, y_0, z_0)(0)), s(\neg(x_0, y_0, z_0)(1/2)))\rangle$.

Ясно, что

(41) $s(\neg(x_0, y_0, z_0)(1) = s(x_0)$, $s(\neg(x_0, y_0, z_0)(1/2) = s(y_0), s(\neg(x_0, y_0, z_0)(0) = s(z_0)$.

(42) s есть изоморфизм $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle M(1/2, 1/2, 1, 1), \neg(x_0, y_0, z_0)\rangle$ на $L_{\supset\neg}$-матрицу $\langle M(0, 0, 1, 1), \neg(s(x_0), s(z_0), s(y_0))\rangle$ (из (40) и (41)).

(43) Существует изоморфизм $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle M(1/2, 1/2, 1, 1), \neg(x_0, y_0, z_0)\rangle$ на $L_{\supset\neg}$-матрицу $\langle M(0, 0, 1, 1), \neg(s(x_0), s(z_0), s(y_0))\rangle$ (из (42)).

(44) $L_{\supset\neg}$-матрица $\langle M(1/2, 1/2, 1, 1), \neg(x_0, y_0, z_0)\rangle$ изоморфна $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0, 0, 1, 1), \neg(s(x_0), s(z_0), s(y_0))\rangle$ (из (43), по определению 2 из (Попов 2020)).

(45) $L_{\supset\neg}$-матрица $\langle M(1/2, 1/2, 1, 1), \neg(x_0, y_0, z_0)\rangle$ изоморфна $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0, 0, 1, 1), \neg(s(x_0), s(z_0), s(1/2))\rangle$ или $L_{\supset\neg}$-матрица $\langle M(1/2, 1/2, 1, 1), \neg(x_0, y_0, z_0)\rangle$ изоморфна $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0, 0, 1, 1), \neg(s(x_0), s(z_0), s(0))\rangle$ (из (37) и (44)).

(46) $L_{\supset\neg}$-матрица $\langle M(1/2, 1/2, 1, 1), \neg(x_0, y_0, z_0)\rangle$ изоморфна $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0, 0, 1, 1), \neg(s(x_0), s(z_0), 0)\rangle$ или $L_{\supset\neg}$-матрица $\langle M(1/2, 1/2, 1, 1), \neg(x_0, y_0, z_0)\rangle$ изоморфна $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0, 0, 1, 1), \neg(s(x_0), s(z_0), 1/2)\rangle$ (из (45) и того, что $s(1/2) = 0$ и $s(0) = 1/2$).

(47) $L_{\supset\neg}$-матрица K_0 изоморфна $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0, 0, 1, 1), \neg(s(x_0), s(z_0), 0)\rangle$ или $L_{\supset\neg}$-матрица K_0 изоморфна $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0, 0, 1, 1), \neg(s(x_0), s(z_0), 1/2)\rangle$ (из (12) и (46)).

Опираясь на утверждение (47) и используя теорему 1, сформулированную в (Попов 2020), получаем, что

(48) множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице K_0, равно множеству всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0, 0, 1, 1), \neg(s(x_0), s(z_0), 0)\rangle$, или множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице K_0, равно множеству всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0, 0, 1, 1), \neg(s(x_0), s(z_0), 1/2)\rangle$.

Опираясь на утверждение (48) и используя определение $L_{\supset\neg}$-матрицы, адекватной $L_{\supset\neg}$-логике (определение 8 из (Попов 2019a)), получаем, что

(49) $\langle M(0,0,1,1), \neg(s(x_0), s(z_0), 0)\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица, адекватная $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$, или $\langle M(0,0,1,1), \neg(s(x_0), s(z_0), 1/2)\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица, адекватная $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$.

Нетрудно заметить, что

(50) $\langle M(0,0,1,1), \neg(s(x_0), s(z_0), 0)\rangle$ и $\langle M(0,0,1,1), \neg(s(x_0), s(z_0), 1/2)\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрицы вида $\langle M(0,0,1,1), f\rangle$.

Опираясь на утверждения (49) и (50) и на теорему 2, получаем, что

(51) $\langle M(0,0,1,1), \neg(s(x_0), s(z_0), 0)\rangle \in \{\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle, \langle M(0,0,1,1), \neg(0,1,1)\rangle\}$ или $\langle M(0,0,1,1), \neg(s(x_0), s(z_0), 1/2)\rangle \in \{\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle, \langle M(0,0,1,1), \neg(0,1,1)\rangle\}$.

Ясно, что

(52) $\neg(s(x_0), s(z_0), 0) \neq \neg(1/2,1,1)$ и $\neg(s(x_0), s(z_0), 0) \neq \neg(0,1,1)$, а $\neg(s(x_0), s(z_0), 1/2) \neq \neg(1/2,1,1)$ и $\neg(s(x_0), s(z_0), 1/2) \neq \neg(0,1,1)$.

Ввиду утверждения (52) и теоремы о равенстве упорядоченных пар, получаем, что

(53) $\langle M(0,0,1,1), \neg(s(x_0), s(z_0), 0)\rangle \notin \{\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle, \langle M(0,0,1,1), \neg(0,1,1)\rangle\}$ и $\langle M(0,0,1,1), \neg(s(x_0), s(z_0), 1/2)\rangle \notin \{\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle, \langle M(0,0,1,1), \neg(0,1,1)\rangle\}$.

Утверждение (53) противоречит утверждению (51). Следовательно, неверно допущение (36).

Итак,

(54) $y_0 = 1$.

(55) $z_0 \neq 1$ (допущение).

(56) $z_0 = 1/2$ или $z_0 = 0$ (из (10) и (55)).

(57) $\neg(x_0, y_0, z_0)$ есть унарная операция на множестве $\{1, 1/2, 0\}$ (из (6) и (11)).

(58) s есть изоморфизм $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle\{1,1/2,0\}, \{1\}, \supset(1/2,1/2,1,1), \neg(x_0,y_0,z_0)\rangle$ на $L_{\supset\neg}$-матрицу $\langle\{1,1/2,0\}, \{1\}, \supset(0,0,1,1), \neg(s(\neg(x_0,y_0,z_0)(1)), s(\neg(x_0,y_0,z_0)(0)), s(\neg(x_0,y_0,z_0)(1/2)))\rangle$ (из (57), по лемме 19).

Опираясь на утверждение (58) и на то, что $\langle\{1,1/2,0\}, \{1\}, \supset(1/2,1/2,1,1)\rangle = M(1/2,1/2,1,1)$ и $\langle\{1,1/2,0\}, \{1\}, \supset(0,0,1,1)\rangle = M(0,0,1,1)$, получаем, что

(59) s есть изоморфизм $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle M(1/2,1/2,1,1), \neg_{(x_0,y_0,z_0)}\rangle$ на $L_{\supset\neg}$-матрицу $\langle M(0,0,1,1), \neg(s(\neg(x_0,y_0,z_0)(1)), s(\neg(x_0,y_0,z_0)(0)), s(\neg(x_0,y_0,z_0)(1/2)))\rangle$.

Ясно, что

(60) $s(\neg(x_0, y_0, z_0)(1)) = s(x_0))$, $s(\neg(x_0, y_0, z_0)(0)) = s(z_0)$, $s(\neg(x_0, y_0, z_0)(1/2)) = s(y_0)$.

(61) s есть изоморфизм $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle M(1/2, 1/2, 1, 1), \neg(x_0, y_0, z_0)\rangle$ на $L_{\supset\neg}$-матрицу $\langle M(0, 0, 1, 1), \neg(s(x_0), s(z_0), s(y_0))\rangle$ (из (59) и (60)).

(62) Существует изоморфизм $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle M(1/2, 1/2, 1, 1), \neg(x_0, y_0, z_0)\rangle$ на $L_{\supset\neg}$-матрицу $\langle M(0, 0, 1, 1), \neg(s(x_0), s(z_0), s(y_0))\rangle$ (из (61)).

(63) $L_{\supset\neg}$-матрица $\langle M(1/2, 1/2, 1, 1), \neg(x_0, y_0, z_0)\rangle$ изоморфна $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0, 0, 1, 1), \neg(s(x_0), s(z_0), s(y_0))\rangle$ (из (62), по определению 2 из (Попов 2020)).

(64) $L_{\supset\neg}$-матрица $\langle M(1/2, 1/2, 1, 1), \neg(x_0, y_0, z_0)\rangle$ изоморфна $L_{\supset\neg}$-матрице

$$\langle M(0, 0, 1, 1), \neg(s(x_0), s(1/2), s(y_0))\rangle,$$

или $L_{\supset\neg}$-матрица $\langle M(1/2, 1/2, 1, 1), \neg(x_0, y_0, z_0)\rangle$ изоморфна $L_{\supset\neg}$-матрице

$$\langle M(0, 0, 1, 1), \neg(s(x_0), s(0), s(y_0))\rangle$$

(из (56) и (63)).

(65) $L_{\supset\neg}$-матрица $\langle M(1/2, 1/2, 1, 1), \neg(x_0, y_0, z_0)\rangle$ изоморфна $L_{\supset\neg}$-матрице

$$\langle M(0, 0, 1, 1), \neg(s(x_0), 0, s(y_0))\rangle,$$

или $L_{\supset\neg}$-матрица $\langle M(1/2, 1/2, 1, 1), \neg(x_0, y_0, z_0)\rangle$ изоморфна $L_{\supset\neg}$-матрице

$$\langle M(0, 0, 1, 1), \neg(s(x_0), 1/2, s(y_0))\rangle$$

(из (64) и того, что $s(1/2) = 0$ и $s(0) = 1/2$).

(66) $L_{\supset\neg}$-матрица K_0 изоморфна $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0, 0, 1, 1), \neg(s(x_0), 0, s(y_0))\rangle$ или $L_{\supset\neg}$-матрица K_0 изоморфна $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0, 0, 1, 1), \neg(s(x_0), 1/2, s(y_0))\rangle$ (из (12) и (65)).

Опираясь на утверждение (66) и используя теорему 1, сформулированную в (Попов 2020), получаем, что

(67) множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице K_0, равно множеству всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0, 0, 1, 1), \neg(s(x_0), 0, s(y_0))\rangle$, или множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице K_0, равно множеству всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0, 0, 1, 1), \neg(s(x_0), 1/2, s(y_0))\rangle$.

Опираясь на утверждение (48) и используя определение $L_{\supset\neg}$-матрицы, адекватной $L_{\supset\neg}$-логике (определение 8 из (Попов 2019a)), получаем, что

(68) $\langle M(0,0,1,1), \neg(s(x_0), 0, s(y_0))\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица, адекватная $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$, или $\langle M(0,0,1,1), \neg(s(x_0), 1/2, s(y_0))\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица, адекватная $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$.

Легко видеть, что

(69) $\langle M(0,0,1,1), \neg(s(x_0), 0, s(y_0))\rangle$ и $\langle M(0,0,1,1), \neg(s(x_0), 1/2, s(y_0))\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрицы вида $\langle M(0,0,1,1), f\rangle$.

Опираясь на утверждение (68) и (69) и на теорему 2, получаем, что

(70) $\langle M(0,0,1,1), \neg(s(x_0), 0, s(y_0))\rangle \in \{\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle, \langle M(0,0,1,1), \neg(0,1,1)\rangle\}$ или $\langle M(0,0,1,1), \neg(s(x_0), 1/2, s(y_0))\rangle \in \{\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle, \langle M(0,0,1,1), \neg(0,1,1)\rangle\}$.

Ясно, что

(71) $\neg(s(x_0), 0, s(y_0)) \neq \neg(1/2,1,1)$ и $\neg(s(x_0), 0, s(y_0)) \neq \neg(0,1,1)$, а $\neg(s(x_0), 1/2, s(y_0)) \neq \neg(1/2,1,1)$ и $\neg(s(x_0), 1/2, s(y_0)) \neq \neg(0,1,1)$.

Ввиду утверждения (71) и теоремы о равенстве упорядоченных пар, получаем, что

(72) $\langle M(0,0,1,1), \neg(s(x_0), 0, s(y_0))\rangle \notin \{\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle, \langle M(0,0,1,1), \neg(0,1,1)\rangle\}$ и $\langle M(0,0,1,1), \neg(s(x_0), 1/2, s(y_0))\rangle \notin \{\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle, \langle M(0,0,1,1), \neg(0,1,1)\rangle\}$.

Утверждение (72) противоречит утверждению (70). Следовательно, неверно допущение (3).

Итак,

(73) K_0 не является $L_{\supset\neg}$-матрицей, адекватной $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$.

Снимая допущение (2) и (1) и обобщая, завершаем доказательство УТВЕРЖДЕНИЯ XV.

УТВЕРЖДЕНИЕ XV доказано.

Теорема 5. *Множество всех $L_{\supset\neg}$-матриц вида $\langle M(1/2,1/2,1,1), f\rangle$, каждая из которых есть $L_{\supset\neg}$-матрица, адекватная $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$, равно*

$$\{\langle M(1/2,1/2,1,1), \neg(0,1,1)\rangle, \langle M(1/2,1/2,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle\}.$$

Теорема 5 вытекает из УТВЕРЖДЕНИЯ XIII, УТВЕРЖДЕНИЯ XIV и УТВЕРЖДЕНИЯ XV.

Литература

Попов 2019a — *Попов В. М.* К проблеме расширения матричной семантики, адекватной классической импликативной логике, до матричной семантики, адекватной классической импликативно-негативной логике // Логико-философские штудии. 2019. Т. 17, № 1. С. 1–31.

Попов 2019b — *Попов В. М.* Трехзначные логические матрицы с одним выделенным значением, адекватные классической импликативной логике // Логико-философские штудии. 2019. Т. 17, № 2. С. 142–193.

Попов 2020 — *Попов В. М.* К проблеме расширения матричной семантики, адекватной классической импликативной логике, до матричной семантики, адекватной классической импликативно-негативной логике (часть 2) // Логико-философские штудии. 2020. Т. 18, № 1. С. 34–45.

Черч 1960 — *Черч А.* Введение в математическую логику. Т. 1. М.: Издательство иностранной литературы, 1960.