ЛОГИКА СЕГОДНЯ

Владимир Попов[1]

К ПРОБЛЕМЕ РАСШИРЕНИЯ МАТРИЧНОЙ СЕМАНТИКИ, АДЕКВАТНОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ИМПЛИКАТИВНОЙ ЛОГИКЕ, ДО МАТРИЧНОЙ СЕМАНТИКИ, АДЕКВАТНОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ИМПЛИКАТИВНО-НЕГАТИВНОЙ ЛОГИКЕ (ЧАСТЬ 4)[2]

Аннотация. Эта статья находится в русле исследований проблемы расширения семантики, адекватной собственному фрагменту логики, до семантики, адекватной этой логике. Основное содержание статьи представлено в двух разделах (первый раздел и второй раздел). В первом разделе установлено следующее: $\langle M(1/2, 0, 1, 1), \neg(1/2, 1, 1)\rangle$ и $\langle M(1/2, 0, 1, 1), \neg(0, 1, 1)\rangle$ — все $L_{\supset\neg}$-матрицы вида $\langle M(1/2, 0, 1, 1), f\rangle$, адекватные классической импликативно-негативной логике $Cl_{\supset\neg}$, а $\langle M(0, 1/2, 1, 1), \neg(1/2, 1, 1)\rangle$ и $\langle M(0, 1/2, 1, 1), \neg(0, 1, 1)\rangle$ — все $L_{\supset\neg}$-матрицы вида $\langle M(0, 1/2, 1, 1), f\rangle$, адекватные классической импликативно-негативной логике $Cl_{\supset\neg}$. Во втором разделе перечислены все $L_{\supset\neg}$-матрицы вида $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g, f\rangle$, адекватные классической импликативно-негативной логике $Cl_{\supset\neg}$.
Ключевые слова: трехзначная логическая матрица с одним выделенным значением, $L_{\supset\neg}$-матрица, $L_{\supset\neg}$-логика, $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в (заданной) $L_{\supset\neg}$-матрице, изоморфизм логических матриц.

Vladimir Popov

ON THE PROBLEM OF EXPANSION OF MATRIX SEMANTICS ADEQUATE TO CLASSICAL IMPLICATIVE LOGIC TO MATRIX SEMANTICS ADEQUATE TO CLASSICAL IMPLICATIVE-NEGATIVE LOGIC (PART 4)

[1] *Попов Владимир Михайлович* — кандидат философских наук, доцент кафедры логики философского факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.
Vladimir Popov, Ph.D., associate professor, Department of Logic, Faculty of Philosophy, Lomonosov Moscow State University.
pphiloslog@mail.ru
[2] Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 19-011-00536 А.

Abstract. This article is in the mainstream of research into the problem of expansion of a semantics adequate to a proper fragment of a logic to semantics adequate to this logic. The main content of the article is presented in two sections, the first section and the second section. The first section establishes the following: $\langle M(1/2, 0, 1, 1), \neg(1/2, 1, 1)\rangle$ and $\langle M(1/2, 0, 1, 1), \neg(0, 1, 1)\rangle$ are all $L_{\supset\neg}$-matrices of the form $\langle M(1/2, 0, 1, 1), f\rangle$ adequate to the classical implicative-negative logic $Cl_{\supset\neg}$, and $\langle M(0, 1/2, 1, 1), \neg(1/2, 1, 1)\rangle$ and $\langle M(0, 1/2, 1, 1), \neg(0, 1, 1)\rangle$ are all $L_{\supset\neg}$-matrices of the form $\langle M(0, 1/2, 1, 1), f\rangle$ adequate to the classical implicative-negative logic $Cl_{\supset\neg}$. In the second section we give a list of all $L_{\supset\neg}$-matrices of the form $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g, f\rangle$ each of which is adequate to the classical implicative-negative logic $Cl_{\supset\neg}$.
Keywords: three-valued logical matrix with one designated value, $L_{\supset\neg}$-matrix, $L_{\supset\neg}$-logic, $L_{\supset\neg}$-formula, which is valid in a (given) $L_{\supset\neg}$-matrix, isomorphism of logical matrices.

Для цитирования: *Попов В. М.* К проблеме расширения матричной семантики, адекватной классической импликативной логике, до матричной семантики, адекватной классической мпликативно-негативной логике (часть 4) // Логико-философские штудии. 2020. Т. 18, № 3. С. 212–236. DOI: 10.52119/LPHS.2021.19.10.001.

Первый раздел

В этой статье мы опираемся на работы (Попов 2019a, Попов 2019b, Попов 2020a и Попов 2020b), используем определения, соглашения и замечания из этих работ.

Нам потребуется исчисление $HCl_{\supset\neg}$ гильбертовского типа. Язык этого исчисления есть $L_{\supset\neg}$. Правило modus ponens в $L_{\supset\neg}$ есть единственное правило исчисления $HCl_{\supset\neg}$. Аксиомами исчисления $HCl_{\supset\neg}$ являются все те и только те $L_{\supset\neg}$-формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих трех видов (здесь A, B и C — $L_{\supset\neg}$-формулы): (1) $(A \supset (B \supset A))$, (2) $((A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C)))$, (3) $(((\neg A) \supset (\neg B)) \supset (B \supset A))$. Определение $HCl_{\supset\neg}$-доказательства заданной $L_{\supset\neg}$-формулы стандартно.

Хорошо известно, что исчисление $HCl_{\supset\neg}$ аксиоматизирует классическую импликативно-негативную логику $Cl_{\supset\neg}$ в том смысле, что для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A: $A \in Cl_{\supset\neg}$ тогда и только тогда, когда существует $HCl_{\supset\neg}$-доказательство $L_{\supset\neg}$-формулы A. Очевидна связь между $HCl_{\supset\neg}$ и исчислением P_2 из (Черч 1960).

Вспомним теперь, что $\neg(1/2, 1, 1)$ и $\neg(0, 1, 1)$ являются унарными операциями на множестве $\{1, 1/2, 0\}$, определяемыми, соответственно, таблицами

$\neg(1/2, 1, 1)$	1	1/2	0
	1/2	1	1

и

$\neg(0, 1, 1)$	1	1/2	0
	0	1	1

,

а $\supset(1/2, 0, 1, 1)$ и $\supset(0, 1/2, 1, 1)$ являются бинарными операциями на множестве $\{1, 1/2, 0\}$, определяемыми, соответственно, таблицами

$\supset(1/2,0,1,1)$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1	1
0	1	1	1

и

$\supset(0,1/2,1,1)$	1	1/2	0
1	1	0	1/2
1/2	1	1	1
0	1	1	1

.

Используя стандартную табличную процедуру проверки общезначимости формулы языка L в конечной логической матрице языка L, устанавливаем справедливость следующей леммы 1.

Лемма 1. Для всякой $L_{\supset\neg}$-матрицы $\mathcal{K}$ из $\{\langle M(1/2,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle, \langle M(1/2, 0,1,1), \neg(0,1,1)\rangle, \langle M(0,1/2,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle, \langle M(0,1/2,1,1), \neg(0,1,1)\rangle\}$ верно, что всякая аксиома исчисления $HCl_{\supset\neg}$ является $L_{\supset\neg}$-формулой, общезначимой в $L_{\supset\neg}$-матрице $\mathcal{K}$.

Опираясь на табличные определения операций $\supset(1/2,0,1,1)$ и $\supset(0,1/2,1,1)$, нетрудно показать, что верна следующая лемма 2.

Лемма 2. Для всякой $L_{\supset\neg}$-матрицы $\mathcal{K}$ из $\{\langle M(1/2,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle, \langle M(1/2,0, 1,1), \neg(0,1,1)\rangle, \langle M(0,1/2,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle, \langle M(0,1/2,1,1), \neg(0,1,1)\rangle\}$ и для всяких $L_{\supset\neg}$-формул A и B: если A есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $\mathcal{K}$, и $(A \supset B)$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $\mathcal{K}$, то B есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $\mathcal{K}$.

С помощью лемм 1 и 2 легко доказать методом возвратной индукции следующую лемму 3.

Лемма 3. Для всякого целого положительного числа n, для всяких $L_{\supset\neg}$-формул $A, A_1, \dots, A_n$ и для всякой $L_{\supset\neg}$-матрицы $\mathcal{K}$ из $\{\langle M(1/2,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle, \langle M(1/2, 0,1,1), \neg(0,1,1)\rangle, \langle M(0,1/2,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle, \langle M(0,1/2,1,1), \neg(0,1,1)\rangle\}$: если $A = A_n$ и для всякого целого положительного числа m, которое меньше или равно n, верно, что A_m есть аксиома исчисления $HCl_{\supset\neg}$ или для некоторых целых положительных чисел k и l, каждое из которых меньше m, $\langle A_k, A_l, A_m\rangle$ есть применение правила modus ponens в $L_{\supset\neg}$, то A есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $\mathcal{K}$.

В силу леммы 3 и определений верна следующая лемма 4.

Лемма 4. Для всякой $L_{\supset\neg}$-матрицы $\mathcal{K}$ из $\{\langle M(1/2,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle, \langle M(1/2,0, 1,1), \neg(0,1,1)\rangle, \langle M(0,1/2,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle, \langle M(0,1/2,1,1), \neg(0,1,1)\rangle\}$ и для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A: если существует $HCl_{\supset\neg}$-доказательство $L_{\supset\neg}$-формулы A, то A есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $\mathcal{K}$.

Следуя работе (Попов 2019b), принимаем следующее соглашение 1.

Соглашение 1. Обозначаем через θ такое отображение множества $\{0, 1\}$ на множество $\{1, 1/2\}$, которое определяется таблицей $\begin{array}{c|cc} \theta & 1 & 0 \\ \hline & 1 & 1/2 \end{array}$; обозначаем через τ такое отображение множества $\{1, 1/2, 0\}$ на множество $\{0, 1\}$, которое определяется таблицей $\begin{array}{c|ccc} \tau & 1 & 1/2 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 0 \end{array}$.

Определение 1. Называем θ-преобразованием $M(Cl_{\supset\neg})$-оценки v множество всех упорядоченных пар вида $\langle q, \theta(v(q))\rangle$, где q есть пропозициональная переменная языка $L_{\supset\neg}$.

Замечание 1. Для всякой $M(Cl_{\supset\neg})$-оценки существует единственное θ-преобразование этой $M(Cl_{\supset\neg})$-оценки.

Соглашение 2. Обозначаем θ-преобразование $M(Cl_{\supset\neg})$-оценки v через $\theta[v]$.

Замечание 2. Для всякой $M(Cl_{\supset\neg})$-оценки v $\theta[v]$ является $\langle M(1/2, 0, 1, 1), \neg(1/2, 1, 1)\rangle$-оценкой.

Определение 2. Называем τ-преобразованием отображения h множества всех пропозициональных переменных языка $L_{\supset\neg}$ в множество $\{1, 1/2, 0\}$ множество всех упорядоченных пар вида $\langle q, \tau(h(q))\rangle$, где q есть пропозициональная переменная языка $L_{\supset\neg}$.

Замечание 3. Для всякого отображения h множества всех пропозициональных переменных языка $L_{\supset\neg}$ в множество $\{1, 1/2, 0\}$ существует единственное τ-преобразование отображения h.

Соглашение 3. Обозначаем τ-преобразование отображения h множества всех пропозициональных переменных языка $L_{\supset\neg}$ в множество $\{1, 1/2, 0\}$ через $\tau[h]$.

Замечание 4. Для всякого отображения h множества всех пропозициональных переменных языка $L_{\supset\neg}$ в множество $\{1, 1/2, 0\}$ $\tau[h]$ есть $M(Cl_{\supset\neg})$-оценка.

Лемма 5. Для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A и для всякой $M(Cl_{\supset\neg})$-оценки v

$$\varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle A, v\rangle) = \theta^{-1}(\varphi_{\langle M(1/2,0,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A, \theta[v]\rangle)).$$

Лемма 5 доказана методом индукции по построению $L_{\supset\neg}$-формулы.

Лемма 6. Всякая $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1/2, 0, 1, 1), \neg(1/2, 1, 1)\rangle$, является $L_{\supset\neg}$-формулой, общезначимой в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$.

Докажем лемму 6.

(1) Неверно, что для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A: если для всякой $\langle M(1/2, 0, 1, 1), \neg(1/2, 1, 1)\rangle$-оценки v $\varphi_{\langle M(1/2,0,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A, v\rangle) = 1$, то для всякой $M(Cl_{\supset\neg})$-оценки v $\varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle A, v\rangle) = 1$ (допущение).

(2) Для некоторой $L_{\supset\neg}$-формулы A верно следующее: для всякой $\langle M(1/2, 0, 1, 1), \neg(1/2, 1, 1)\rangle$-оценки v $\varphi_{\langle M(1/2,0,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A, v\rangle) = 1$ и для некоторой $M(Cl_{\supset\neg})$-оценки v $\varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle A, v\rangle) \neq 1$ (из (1)).

(3) Пусть A_0 есть $L_{\supset\neg}$-формула, для всякой $\langle M(1/2, 0, 1, 1), \neg(1/2, 1, 1)\rangle$-оценки v $\varphi_{\langle M(1/2,0,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A, v\rangle) = 1$, для некоторой $M(Cl_{\supset\neg})$-оценки v $\varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle A, v\rangle) \neq 1$.

(4) A_0 есть $L_{\supset\neg}$-формула (из (3)).

(5) Для всякой $\langle M(1/2, 0, 1, 1), \neg(1/2, 1, 1)\rangle$-оценки v

$$\varphi_{\langle M(1/2,0,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A_0, v\rangle) = 1 \quad \text{(из (3)).}$$

(6) Для некоторой $M(Cl_{\supset\neg})$-оценки v $\varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle A_0, v\rangle) \neq 1$ (из (3)).

(7) Пусть v_0 есть $M(Cl_{\supset\neg})$-оценка, $\varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle A_0, v_0\rangle) \neq 1$.

(8) v_0 есть $M(Cl_{\supset\neg})$-оценка (из (7)).

(9) $\varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle A_0, v_0\rangle) \neq 1$ (из (7)).

Ясно, что

(10) $\varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle A_0, v_0\rangle) \in \{0, 1\}$.

(11) $\varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle A_0, v_0\rangle) = 0$ (из (9) и (10)).

(12) $\theta^{-1}(\varphi_{\langle M(1/2,0,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A_0, \theta[v_0]\rangle)) = 0$ (из (4), (8) и (11), по лемме 5).

В свете утверждения (12), табличного определения отображения θ и того, что θ^{-1} есть отображение, обратное отображению θ, ясно, что

(13) $(\varphi_{\langle M(1/2,0,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A_0, \theta[v_0]\rangle)) = 1/2$.

(14) $\theta[v_0]$ есть $\langle M(1/2, 0, 1, 1), \neg(1/2, 1, 1)\rangle$-оценка (из (8), по замечанию 2).

Опираясь на утверждения (13) и (14), делаем вывод, что

(15) для некоторой $\langle M(1/2,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$-оценки v $\varphi_{\langle M(1/2,0,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A_0, v\rangle) \neq 1$.

Утверждение (15) противоречит утверждению (5). Следовательно, неверно допущение (1).

Итак,

(16) для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A: если для всякой $\langle M(1/2,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$-оценки v $\varphi_{\langle M(1/2,0,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A, v\rangle) = 1$, то для всякой $M(Cl_{\supset\neg})$-оценки v $\varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle A, v\rangle) = 1$.

В свете утверждения (16), определения $L_{\supset\neg}$-матрицы (определение 2 из Попов 2019a), определения $L_{\supset\neg}$-формулы, общезначимой в $L_{\supset\neg}$-матрице (определение 6 из Попов 2019a), а также в свете того, что $\langle M(1/2,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$ и $M(Cl_{\supset\neg})$ являются $L_{\supset\neg}$-матрицами, ясно, что всякая $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1/2,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$, является $L_{\supset\neg}$-формулой, общезначимой в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$.

Лемма 6 доказана.

Лемма 7. Для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A и для всякой $M(Cl_{\supset\neg})$-оценки v

$$\varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle A, v\rangle) = \varphi_{\langle M(1/2,0,1,1),\neg(0,1,1)\rangle}(\langle A, v\rangle).$$

Лемма 7 доказана методом индукции по построению $L_{\supset\neg}$-формулы.

Лемма 8. Всякая $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1/2,0,1,1), \neg(0,1,1)\rangle$, является $L_{\supset\neg}$-формулой, общезначимой в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$.

Можно построить доказательство леммы 8, аналогичное доказательству леммы 6 (при этом вместо леммы 5 следует воспользоваться леммой 7).

Лемма 9. Для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A и для всякой $\langle M(0,1/2,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$-оценки v

$$\tau(\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A, v\rangle)) = \varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle A, \tau[v]\rangle).$$

Докажем лемму 9 методом индукции по построению $L_{\supset\neg}$-формулы.

Базис: для всякой пропозициональной переменной q языка $L_{\supset\neg}$ и для всякой $\langle M(0,1/2,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$-оценки v

$$\tau(\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle q, v\rangle)) = \varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle q, \tau[v]\rangle).$$

Справедливость базиса очевидна.

Индукционный шаг для негативных $L_{\supset\neg}$-формул гласит, что для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A: если для всякой $\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle$-оценки v

$$\tau(\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A,v\rangle))=\varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle A,\tau[v]\rangle),$$

то для всякой $\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle$-оценки v

$$\tau(\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle(\neg A),v\rangle))=\varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle(\neg A),\tau[v]\rangle).$$

Докажем индукционный шаг для негативных $L_{\supset\neg}$-формул.

($\neg$.1) A_0 есть $L_{\supset\neg}$-формула (допущение).

($\neg$.2) Для всякой $\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle$-оценки v

$$\tau(\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A_0,v\rangle))=\varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle A_0,\tau[v]\rangle)\quad\text{(допущение).}$$

($\neg$.3) v_0 есть $\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle$-оценка (допущение).

($\neg$.4) $\tau(\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A_0,v_0\rangle))=\varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle A_0,\tau[v_0]\rangle)$ (из ($\neg$.2) и ($\neg$.3)).

Легко проверить, что

($\neg$.5) для всякого x из $\{1,1/2,0\}$ $\tau(\neg(1/2,1,1)(x))=\neg_{Cl}(\tau(x))$.

Ясно, что

($\neg$.6) $\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A_0,v_0\rangle)\in\{1,1/2,0\}$.

($\neg$.7) $\tau(\neg(1/2,1,1)(\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A_0,v_0\rangle)))=\neg_{Cl}(\tau(\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A_0,v_0\rangle)))$ (из ($\neg$.5) и ($\neg$.6)).

($\neg$.8) $\tau(\neg(1/2,1,1)(\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A_0,v_0\rangle)))=\neg_{Cl}(\varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle A_0,\tau[v_0]\rangle))$ (из ($\neg$.4) и ($\neg$.7)).

Опираясь на то, что $\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица и $\neg(1/2,1,1)$ есть унарная операция этой $L_{\supset\neg}$-матрицы, а также опираясь на утверждения ($\neg$.1), ($\neg$.3) и на замечание 2, сделанное в (Попов 2019a), получаем, что

($\neg$.9) $\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle(\neg A_0),v_0\rangle)=\neg(1/2,1,1)(\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A_0,v_0\rangle))$.

Опираясь на то, что $M(Cl_{\supset\neg})$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица и $\neg_{Cl}$ есть унарная операция этой $L_{\supset\neg}$-матрицы, а также опираясь на утверждения ($\neg$.1), ($\neg$.3), на то, что $\tau[v_0]$ есть $Cl_{\supset\neg}$-оценка, и на замечание 2, сделанное в (Попов 2019a), получаем, что

(¬.10) $\varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle(\neg A_0),\tau[v_0]\rangle) = \neg_{Cl}(\varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle A_0,\tau[v_0]\rangle))$.

(¬.11) $\tau(\neg(1/2,1,1)(\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A_0,v_0\rangle))) = \varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle(\neg A_0),\tau[v_0]\rangle)$ (из (¬.8) и (¬.10)).

(¬.12) $\tau(\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle(\neg A_0),v_0\rangle)) = \varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle(\neg A_0),\tau[v_0]\rangle)$ (из (¬.9) и (¬.11)).

Снимая допущения (3), (2) и (1) и проводя обобщения, завершаем доказательство индукционного шага для негативных $L_{\supset\neg}$-формул.

Индукционный шаг для негативных $L_{\supset\neg}$-формул доказан.

Индукционный шаг для импликативных $L_{\supset\neg}$-формул гласит, что для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A и для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы B: если для всякой $\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle$-оценки v

$$\tau(\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A,v\rangle)) = \varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle A,\tau[v]\rangle)$$

и для всякой $\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle$-оценки v

$$\tau(\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle B,v\rangle)) = \varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle B,\tau[v]\rangle),$$

то для всякой $\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle$-оценки v

$$\tau(\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle(A\supset B),v\rangle)) = \varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle(A\supset B),\tau[v]\rangle).$$

Докажем индукционный шаг для импликативных $L_{\supset\neg}$-формул.

(⊃.1) A_0 есть $L_{\supset\neg}$-формула (допущение).

(⊃.2) B_0 есть $L_{\supset\neg}$-формула (допущение).

(⊃.3) Для всякой $\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle$-оценки v

$$\tau(\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A_0,v\rangle)) = \varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle A_0,\tau[v]\rangle)$$

и для всякой $\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle$-оценки v

$$\tau(\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle B_0,v\rangle)) = \varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle B_0,\tau[v]\rangle) \quad \text{(допущение).}$$

(⊃.4) v_0 есть $\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle$-оценка (допущение).

(⊃.5) $\tau(\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A_0,v_0\rangle)) = \varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle A_0,\tau[v_0]\rangle)$ (из (⊃.3) и (⊃.4)).

(⊃.6) $\tau(\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle B_0,v_0\rangle)) = \varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle B_0,\tau[v_0]\rangle)$ (из (⊃.3) и (⊃.4)).

Легко проверить, что

($\supset$.7) для всякого x из $\{1, 1/2, 0\}$ и для всякого y из $\{1, 1/2, 0\}$ $\tau((x \supset (0, 1/2, 1, 1)y)) = (\tau(x) \supset_{Cl} \tau(y))$.

Ясно, что

($\supset$.8) $\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A_0, v_0\rangle)$ и $\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle B_0, v_0\rangle)$ принадлежат множеству $\{1, 1/2, 0\}$.

($\supset$.9) $\tau((\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A_0, v_0\rangle)\supset(0, 1/2, 1, 1)\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle B_0, v_0\rangle))) = (\tau(\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A_0, v_0\rangle)) \supset_{Cl} \tau(\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle B_0, v_0\rangle)))$ (из ($\neg$.7) и ($\neg$.8)).

($\supset$.10) $\tau((\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A_0, v_0\rangle)\supset(0, 1/2, 1, 1)\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle B_0, v_0\rangle))) = = (\varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle A_0, \tau[v_0]\rangle) \supset_{Cl} \varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle B_0, \tau[v_0]\rangle))$ (из ($\neg$.5), ($\neg$.6) и ($\neg$.9)).

Опираясь на то, что $\langle M(0, 1/2, 1, 1), \neg(1/2, 1, 1)\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица и $\supset (0, 1/2, 1, 1)$ есть бинарная операция этой $L_{\supset\neg}$-матрицы, а также опираясь на утверждения ($\supset$.1), ($\supset$.2), ($\supset$.4) и на замечание 2, сделанное в (Попов 2019a), получаем, что

($\supset$.11) $\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle (A_0 \supset B_0), v_0\rangle) = (\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A_0, v_0\rangle) \supset (0, 1/2, 1, 1)\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle B_0, v_0\rangle))$.

Опираясь на то, что $M(Cl_{\supset\neg})$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица и $\supset_{Cl}$ есть бинарная операция этой $L_{\supset\neg}$-матрицы, а также опираясь на утверждения ($\supset$.1), ($\supset$.2), ($\supset$.4), на тот факт, что $\tau[v_0]$ есть $Cl_{\supset\neg}$-оценка, и на замечание 2, сделанное в (Попов 2019a), получаем, что

($\supset$.12) $\varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle (A_0 \supset B_0), \tau[v_0]\rangle) = (\varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle A_0, \tau[v_0]\rangle) \supset_{Cl} \varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle B_0, \tau[v_0]\rangle))$.

($\supset$.13) $\tau((\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A_0, v_0\rangle) \supset (0, 1/2, 1, 1)\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle B_0, v_0\rangle))) = = \varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle (A_0 \supset B_0), \tau[v_0]\rangle)$ (из ($\neg$.10) и ($\neg$.12)).

($\supset$.14) $\tau(\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle (A_0 \supset B_0), v_0\rangle)) = \varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle (A_0 \supset B_0), \tau[v_0]\rangle)$ (из ($\neg$.11) и ($\neg$.13)).

Снимая допущения ($\supset$.4), ($\supset$.3), ($\supset$.2), ($\supset$.1) и обобщая, завершаем доказательство индукционного шага для импликативных $L_{\supset\neg}$-формул.

Индукционный шаг для импликативных $L_{\supset\neg}$-формул доказан.

Лемма 9 доказана.

Лемма 10. Для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A и для всякой $\langle M(0,1/2,1,1),\neg(0,1,1)\rangle$-оценки v

$$\tau(\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(0,1,1)\rangle}(\langle A,v\rangle)) = \varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle A,\tau[v]\rangle).$$

Можно построить доказательство леммы 10, аналогичное доказательству леммы 9.

Лемма 11. Для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A и для всякой $M(Cl_{\supset\neg})$-оценки v: если $\varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle A,v\rangle) = 0$, то $\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A,v\rangle) \in \{1/2,0\}$.

Лемму 11 докажем с использованием леммы 9.

(1) A_0 есть $L_{\supset\neg}$-формула (допущение).

(2) v_0 есть $M(Cl_{\supset\neg})$-оценка (допущение).

(3) $\varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle A_0,v_0\rangle) = 0$ (допущение).

Очевидно, что

(4) всякая $M(Cl_{\supset\neg})$-оценка является $\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle$-оценкой.

(5) v_0 есть $\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle$-оценка (из (2) и (4)).

(6) $\tau(\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A_0,v_0\rangle)) = \varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle A_0,\tau[v_0]\rangle)$ (из (1) и (5), по лемме 9).

Ясно, что

(7) для всякой $M(Cl_{\supset\neg})$-оценки v $\tau[v] = v$.

(8) $\tau[v_0] = v_0$ (из (2) и (7)).

(9) $\tau(\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A_0,v_0\rangle)) = \varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle A_0,v_0\rangle)$ (из (6) и (8)).

(10) $\tau(\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A_0,v_0\rangle)) = 0$ (из (3) и (9)).

Разумеется, что

(11) $\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A_0,v_0\rangle) \in \{1,1/2,0\}$.

(12) $\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A_0,v_0\rangle) = 1$ (допущение).

Используя таблицу, определяющую отображение τ, получаем, что

(13) $\tau(1) = 1$.

(14) $\tau(\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A_0, v_0\rangle)) = 1$ (из (12) и (13)).

Утверждение (14) несовместимо с утверждением (10). Следовательно, неверно допущение (12).

Итак,

(15) $\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A_0, v_0\rangle) \neq 1$.

(16) $\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A_0, v_0\rangle) \in \{1/2, 0\}$ (из (11) и (15)).

Снимая допущения (3), (2), (1) и проводя обобщения, завершаем доказательство леммы 11.

Лемма 11 доказана.

Лемма 12. Для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A и для всякой $M(Cl_{\supset\neg})$-оценки v: если $\varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle A, v\rangle) = 0$, то $\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(0,1,1)\rangle}(\langle A, v\rangle) \in \{1/2, 0\}$.

Можно построить доказательство леммы 12, аналогичное доказательству леммы 11.

Лемма 13. Всякая $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0,1/2,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$ является $L_{\supset\neg}$-формулой, общезначимой в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$.

Докажем лемму 13.

(1) Неверно, что для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A: если для всякой $\langle M(0,1.21,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$-оценки v

$$\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A, v\rangle) = 1,$$

то для всякой $M(Cl_{\supset\neg})$-оценки v $\varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle A, v\rangle) = 1$ (допущение).

(2) Для некоторой $L_{\supset\neg}$-формулы A верно следующее: для всякой $\langle M(0,1/2,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$-оценки v

$$\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A, v\rangle) = 1$$

и для некоторой $M(Cl_{\supset\neg})$-оценки v

$$\varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle A, v\rangle) \neq 1 \quad \text{(из (1))}.$$

(3) Пусть A_0 есть $L_{\supset\neg}$-формула, для всякой $\langle M(0,1/2,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$-оценки v

$$\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A_0, v\rangle) = 1,$$

для некоторой $M(Cl_{\supset\neg})$-оценки v $\varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle A_0, v\rangle) \neq 1$.

(4) A_0 есть $L_{\supset\neg}$-формула (из (3)).

(5) Для всякой $\langle M(0,1/2,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$-оценки v

$$\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A_0, v\rangle) = 1 \quad \text{(из (3))}.$$

(6) Для некоторой $M(Cl_{\supset\neg})$-оценки v

$$\varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle A_0, v\rangle) \neq 1 \quad \text{(из (3))}.$$

(7) Пусть v_0 есть $M(Cl_{\supset\neg})$-оценка, $\varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle A_0, v_0\rangle) \neq 1$.

(8) v_0 есть $M(Cl_{\supset\neg})$-оценка (из (7)).

(9) $\varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle A_0, v_0\rangle) \neq 1$ (из (7)).

Ясно, что

(10) $\varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle A_0, v_0\rangle) \in \{0, 1\}$.

(11) $\varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle A_0, v_0\rangle) = 0$ (из (9) и (10)).

(12) $\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A_0, v_0\rangle) \in \{1/2, 0\}$ (из (4), (8) и (11), по лемме 11).

(13) $\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A_0, v_0\rangle) \neq 1$ (из (12)).

(14) v_0 есть $\langle M(0,1/2,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$-оценка (из (8) и того, что всякая $M(Cl_{\supset\neg})$-оценка является $\langle M(0,1/2,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$-оценкой).

(15) Для некоторой $\langle M(0,1/2,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$-оценки v

$$\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A_0, v\rangle) \neq 1 \quad \text{(из (13) и (14))}.$$

Утверждение (15) противоречит утверждению (5). Следовательно, неверно допущение (1).

Итак,

(16) для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A: если для всякой $\langle M(0,1/2,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$-оценки v

$$\varphi_{\langle M(0,1/2,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle}(\langle A, v\rangle) = 1,$$

то для всякой $M(Cl_{\supset\neg})$-оценки v $\varphi_{M(Cl_{\supset\neg})}(\langle A, v\rangle) = 1$.

В свете утверждения (16), определения $L_{\supset\neg}$-матрицы (определение 2 из Попов 2019a), определения $L_{\supset\neg}$-формулы, общезначимой в $L_{\supset\neg}$-матрице (определение 6 из Попов 2019a), а также в свете того, что $\langle M(0, 1/2, 1, 1), \neg(1/2, 1, 1)\rangle$ и $M(Cl_{\supset\neg})$ являются $L_{\supset\neg}$-матрицами, ясно, что всякая $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0, 1/2, 1, 1), \neg(1/2, 1, 1)\rangle$, является $L_{\supset\neg}$-формулой, общезначимой в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$.

Лемма 13 доказана.

Лемма 14. Всякая $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0, 1/2, 1, 1), \neg(0, 1, 1)\rangle$ является $L_{\supset\neg}$-формулой, общезначимой в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$.

Можно построить доказательство леммы 14, аналогичное доказательству леммы 13 (при этом вместо леммы 11 следует воспользоваться леммой 12).

Лемма 15. Для всякой $L_{\supset\neg}$-матрицы $\mathscr{K}$ из $\{\langle M(1/2, 0, 1, 1), \neg(1/2, 1, 1)\rangle, \langle M(1/2, 0, 1, 1), \neg(0, 1, 1)\rangle, \langle M(0, 1/2, 1, 1), \neg(1/2, 1, 1)\rangle, \langle M(0, 1/2, 1, 1), \neg(0, 1, 1)\rangle\}$ верно, что множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\mathscr{K}$, равно $Cl_{\supset\neg}$.

Докажем лемму 15.

(1) $\mathscr{K}_0 \in \{\langle M(1/2, 0, 1, 1), \neg(1/2, 1, 1)\rangle, \langle M(1/2, 0, 1, 1), \neg(0, 1, 1)\rangle, \langle M(0, 1/2, 1, 1), \neg(1/2, 1, 1)\rangle, \langle M(0, 1/2, 1, 1), \neg(0, 1, 1)\rangle\}$ (допущение).

(2) A_0 есть $L_{\supset\neg}$-формула (допущение).

(3) $Cl_{\supset\neg}$ есть множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$ (по соглашению 11 из Попов 2019a).

(4) A_0 есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $\mathscr{K}_0$ (допущение).

(5) A_0 есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$ (из (3) и лемм 6, 8, 13 и 14).

(6) $A_0 \in Cl_{\supset\neg}$ (из (3) и (5)).

Снимая допущение (4), получаем, что

(7) если A_0 есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $\mathscr{K}_0$, то $A_0 \in Cl_{\supset\neg}$.

(8) $A_0 \in Cl_{\supset\neg}$ (допущение).

(9) Существует $HCl_{\supset\neg}$-доказательство $L_{\supset\neg}$-формулы A_0 (из (2) и (8) по теореме об аксиоматизируемости $L_{\supset\neg}$-логики $Cl_{\supset\neg}$ посредством исчисления $HCl_{\supset\neg}$).

(10) A_0 есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $\mathscr{K}_0$ (из (1), (2), (9), по лемме 4).

Снимая допущение (8), получаем, что

(11) если $A_0 \in Cl_{\supset\neg}$, то A_0 есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $\mathcal{K}_0$.

(12) A_0 есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $\mathcal{K}_0$ тогда и только тогда, когда $A_0 \in Cl_{\supset\neg}$ (из (7) и (11)).

Снимая допущение (2) и обобщая, получаем, что

(13) для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A: A есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $\mathcal{K}_0$ тогда и только тогда, когда $A \in Cl_{\supset\neg}$.

В свете утверждения (13) ясно, что

(14) множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\mathcal{K}_0$, равно $Cl_{\supset\neg}$.

Снимая допущение (1) и обобщая, завершаем доказательство леммы 15.

Лемма 15 доказана.

Опираясь на сформулированные в (Попов 2019a) определение 2, замечание 9 и соглашение 13, а также на сформулированные в (Попов 2019b) замечание 3, соглашение 2, соглашение 4 и замечание 4, приходим к выводу о том, что верны следующие леммы 16 и 17.

Лемма 16. Множество всех $L_{\supset\neg}$-матриц вида $\langle M(1/2,0,1,1), \neg(x,y,z)\rangle$, где x, y, $z \in \{1, 1/2, 0\}$, равно множеству

$$\{\langle M(1/2,0,1,1), \neg(1,1,1)\rangle,\ \langle M(1/2,0,1,1), \neg(1,1,1/2)\rangle,\ \langle M(1/2,0,1,1), \neg(1,1,0)\rangle,$$
$$\langle M(1/2,0,1,1), \neg(1,1/2,1)\rangle,\ \langle M(1/2,0,1,1), \neg(1,1/2,1/2)\rangle,\ \langle M(1/2,0,1,1), \neg(1,1/2,0)\rangle,$$
$$\langle M(1/2,0,1,1), \neg(1,0,1)\rangle,\ \langle M(1/2,0,1,1), \neg(1,0,1/2)\rangle,\ \langle M(1/2,0,1,1), \neg(1,0,0)\rangle,$$
$$\langle M(1/2,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle,\ \langle M(1/2,0,1,1), \neg(1/2,1,1/2)\rangle,\ \langle M(1/2,0,1,1), \neg(1/2,1,0)\rangle,$$
$$\langle M(1/2,0,1,1), \neg(1/2,1/2,1)\rangle,\ \langle M(1/2,0,1,1), \neg(1/2,1/2,1/2)\rangle,\ \langle M(1/2,0,1,1), \neg(1/2,1/2,0)\rangle,$$
$$\langle M(1/2,0,1,1), \neg(1/2,0,1)\rangle,\ \langle M(1/2,0,1,1), \neg(1/2,0,1/2)\rangle,\ \langle M(1/2,0,1,1), \neg(1/2,0,0)\rangle,$$
$$\langle M(1/2,0,1,1), \neg(0,1,1)\rangle,\ \langle M(1/2,0,1,1), \neg(0,1,1/2)\rangle,\ \langle M(1/2,0,1,1), \neg(0,1,0)\rangle,$$
$$\langle M(1/2,0,1,1), \neg(0,1/2,1)\rangle,\ \langle M(1/2,0,1,1), \neg(0,1/2,1/2)\rangle,\ \langle M(1/2,0,1,1), \neg(0,1/2,0)\rangle,$$
$$\langle M(1/2,0,1,1), \neg(0,0,1)\rangle,\ \langle M(1/2,0,1,1), \neg(0,0,1/2)\rangle,\ \langle M(1/2,0,1,1), \neg(0,0,0)\rangle\}.$$

Лемма 17. Множество всех $L_{\supset\neg}$-матриц вида $\langle M(0,1/2,1,1), \neg(x,y,z)\rangle$, где x, y, $z \in \{1, 1/2, 0\}$, равно множеству

$\{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1,1,1)\rangle,\ \langle M(0,1/2,1,1),\neg(1,1,1/2)\rangle,\ \langle M(0,1/2,1,1),\neg(1,1,0)\rangle,$

$\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1,1/2,1)\rangle,\ \langle M(0,1/2,1,1),\neg(1,1/2,1/2)\rangle,\ \langle M(0,1/2,1,1),\neg(1,1/2,0)\rangle,$

$\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1,0,1)\rangle,\ \langle M(0,1/2,1,1),\neg(1,0,1/2)\rangle,\ \langle M(0,1/2,1,1),\neg(1,0,0)\rangle,$

$\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle,\ \langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1/2)\rangle,\ \langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,0)\rangle,$

$\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1/2,1)\rangle,\ \langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1/2,1/2)\rangle,\ \langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1/2,0)\rangle,$

$\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,0,1)\rangle,\ \langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,0,1/2)\rangle,\ \langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,0,0)\rangle,$

$\langle M(0,1/2,1,1),\neg(0,1,1)\rangle,\ \langle M(0,1/2,1,1),\neg(0,1,1/2)\rangle,\ \langle M(0,1/2,1,1),\neg(0,1,0)\rangle,$

$\langle M(0,1/2,1,1),\neg(0,1/2,1)\rangle,\ \langle M(0,1/2,1,1),\neg(0,1/2,1/2)\rangle,\ \langle M(0,1/2,1,1),\neg(0,1/2,0)\rangle,$

$\langle M(0,1/2,1,1),\neg(0,0,1)\rangle,\ \langle M(0,1/2,1,1),\neg(0,0,1/2)\rangle,\ \langle M(0,1/2,1,1),\neg(0,0,0)\rangle\}.$

Используя стандартные приемы проверки общезначимости пропозициональных формул в конечных логических матрицах, получаем, что справедливы следующие замечания 5–13.

Замечание 5. Для всякой $L_{\supset\neg}$-матрицы $\mathcal{K}$ вида $\langle M(1/2,0,1,1),\neg(1,y,z)\rangle$, где $y,z\in\{1,1/2,0\}$, верно, что $(\neg(p_1\supset p_1))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $\mathcal{K}$. Но $(\neg(p_1\supset p_1))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, не общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$.

Замечание 6. $((p_1\supset(\neg(p_1\supset p_1)))\supset(\neg p_1))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, которая не общезначима в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1/2,0,1,1),\neg(1/2,1,1/2)\rangle$ и не общезначима в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1/2,0,1,1),\neg(1/2,1,0)\rangle$, но общезначима в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$.

Замечание 7. $((\neg(\neg(p_1\supset p_1)))\supset p_1)$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, которая общезначима в каждой $L_{\supset\neg}$-матрице вида $\langle M(1/2,0,1,1),\neg(1,y,z)\rangle$, где $y\in\{1/2,0\}$ и $z\in\{1,1/2,0\}$, в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1/2,0,1,1),\neg(0,1,1/2)\rangle$ и в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1/2,0,1,1),\neg(0,1,0)\rangle$. Но $((\neg(\neg(p_1\supset p_1)))\supset p_1)$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, не общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$.

Замечание 8. $((p_1\supset(\neg(p_1\supset p_1)))\supset(\neg p_1))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, которая общезначима в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1/2,0,1,1),\neg(0,1/2,1)\rangle$ и в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1/2,0,1,1),\neg(0,0,1)\rangle$, но не общезначима в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$.

Замечание 9. $((\neg(p_1)\supset p_1)$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, которая общезначима в каждой $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(1/2,0,1,1),\neg(0,1/2,1/2)\rangle$, $\langle M(1/2,0,1,1),\neg(0,1/2,0)\rangle$, $\langle M(1/2,0,1,1),\neg(0,0,1/2)\rangle$ и $\langle M(1/2,0,1,1),\neg(0,0,0)\rangle$, но не общезначима в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$.

Замечание 10. Для всякой $L_{\supset\neg}$-матрицы $\mathcal{K}$ вида $\langle M(1/2,0,1,1),\neg_{(1/2,y,z)}\rangle$, где $y,z\in\{1,1/2,0\}$, верно, что$(\neg(p_1\supset p_1))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $\mathcal{K}$. Но $(\neg(p_1\supset p_1))$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, не общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$.

Замечание 11. $((\neg((p_1 \supset p_1) \supset (\neg(p_1 \supset p_1)))) \supset p_1)$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, которая общезначима в каждой $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0,1/2,1,1), \neg(1/2,1,1/2)\rangle$, $\langle M(0,1/2,1,1), \neg(1/2,1,0)\rangle$, $\langle M(0,1/2,1,1), \neg(0,1/2,1)\rangle$ и $\langle M(0,1/2,1,1), \neg(0,0,1)\rangle$, но не общезначима в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$.

Замечание 12. $((\neg(\neg(p_1 \supset p_1))) \supset p_1)$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, которая общезначима в каждой $L_{\supset\neg}$-матрице вида $\langle M(0,1/2,1,1), \neg(1/2,1/2,z)\rangle$ $(z \in \{1,1/2,0\})$, в каждой $L_{\supset\neg}$-матрице вида $\langle M(0,1/2,1,1), \neg(1/2,0,z)\rangle$ $(z \in \{1,1/2,0\})$, в каждой $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0,1/2,1,1), \neg(0,1,1/2)\rangle$, $\langle M(0,1/2,1,1), \neg(0,1,0)\rangle$, $\langle M(0,1/2,1,1), \neg(0,1/2,1/2)\rangle$, $\langle M(0,1/2,1,1), \neg(0,1/2,0)\rangle$, но не общезначима в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$.

Замечание 13. $((\neg(p_1) \supset p_1)$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0,1/2,1,1), \neg(0,0,1/2)\rangle$ и в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M(0,1/2,1,1), \neg(0,0,0)\rangle$, но не общезначима в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$.

Опираясь на лемму 16, убеждаемся в справедливости следующей леммы 18.

Лемма 18. Для всякой $L_{\supset\neg}$-матрицы $\mathcal{K}$ вида $\langle M(1/2,0,1,1), f\rangle$: если $\mathcal{K} \neq \langle M(1/2,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$ и $\mathcal{K} \neq \langle M(1/2,0,1,1), \neg(0,1,1)\rangle$, то верно следующее:

(i) $\mathcal{K}$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица вида $\langle M(1/2,0,1,1), \neg(1,y,z)\rangle (y, z \in \{1,1/2,0\})$, или

(ii) $\mathcal{K} \in \{\langle M(1/2,0,1,1), \neg(1/2,1,1/2)\rangle, \langle M(1/2,0,1,1), \neg(1/2,1,0)\rangle\}$, или

(iii) $\mathcal{K}$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица вида $\langle M(1/2,0,1,1), \neg(1,y,z)\rangle$, где $y \in \{1/2,0\}$) и $z \in \{1,1/2,0\}$), или $\mathcal{K} \in \{\langle M(1/2,0,1,1), \neg(0,1,1/2)\rangle, \langle M(1/2,0,1,1), \neg(0,1,0)\rangle\}$, или

(iv) $\mathcal{K} \in \{\langle M(1/2,0,1,1), \neg(0,1/2,1)\rangle, \langle M(1/2,0,1,1), \neg(0,0,1)\rangle\}$, или

(v) $\mathcal{K} \in \{\langle M(1/2,0,1,1), \neg(0,1/2,1/2)\rangle, \langle M(1/2,0,1,1), \neg(0,1/2,0)\rangle, \langle M(1/2,0,1,1), \neg(0,0,1/2)\rangle, \langle M(1/2,0,1,1), \neg(0,0,0)\rangle\}$.

Опираясь на лемму 17, убеждаемся в справедливости следующей леммы 19.

Лемма 19. Для всякой $L_{\supset\neg}$-матрицы $\mathcal{K}$ вида $\langle M(0,1/2,1,1), f\rangle$: если $\mathcal{K} \neq \langle M(0,1/2,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle$ и $\mathcal{K} \neq \langle M(0,1/2,1,1), \neg(0,1,1)\rangle$, то верно следующее:

(i) $\mathcal{K}$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица вида $\langle M(0,1/2,1,1), \neg(1,y,z)\rangle (y, z \in \{1,1/2,0\})$, или

(ii) $\mathcal{K} \in \{\langle M(0,1/2,1,1), \neg(1/2,1,1/2)\rangle, \langle M(0,1/2,1,1), \neg(1/2,1,0)\rangle, \langle M(0,1/2,1,1), \neg(0,1/2,1)\rangle, \langle M(0,1/2,1,1), \neg(0,0,1)\rangle\}$, или

(iii) $\mathcal{K}$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица вида $\langle M(0,1/2,1,1), \neg(1/2,1/2,z)\rangle (z \in \{1,1/2,0\})$, или $\mathcal{K}$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица вида $\langle M(0,1/2,1,1), \neg(1,0,z)\rangle (z \in \{1,1/2,0\})$, или $\mathcal{K} \in \{\langle M(0,1/2,1,1), \neg(0,1,1/2)\rangle, \langle M(0,1/2,1,1), \neg(0,1,0)\rangle, \langle M(0,1/2,1,1), \neg(0,1/2,1/2)\rangle, \langle M(0,1/2,1,1), \neg(0,1/2,0)\rangle\}$, или

(iv) $\mathcal{K} \in \{\langle M(0, 1/2, 1, 1), \neg(0, 0, 1/2)\rangle, \langle M(0, 1/2, 1, 1), \neg(0, 0, 0)\rangle\}$.

Опираясь на замечания 5–9, на лемму 18 и на тот факт, что множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$ равно $Cl_{\supset\neg}$, приходим к выводу, что верна следующая лемма 20.

Лемма 20. Для всякой $L_{\supset\neg}$-матрицы $\mathcal{K}$ вида $\langle M(1/2, 0, 1, 1), f\rangle$: если $\mathcal{K} \neq \langle M(1/2, 0, 1, 1), \neg(1/2, 1, 1)\rangle$ и $\mathcal{K} \neq \langle M(1/2, 0, 1, 1), \neg(0, 1, 1)\rangle$, то множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $\mathcal{K}$, не равно $Cl_{\supset\neg}$.

Опираясь на замечания 10–13, на лемму 19 и на тот факт, что множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $M(Cl_{\supset\neg})$ равно $Cl_{\supset\neg}$, приходим к выводу, что верна следующая лемма 21.

Лемма 21. Для всякой $L_{\supset\neg}$-матрицы $\mathcal{K}$ вида $\langle M(0, 1/2, 1, 1), f\rangle$: если $\mathcal{K} \neq \langle M(0, 1/, 2, 1, 1), \neg(1/2, 1, 1)\rangle$ и $\mathcal{K} \neq \langle M(0, 1/2, 1, 1), \neg(0, 1, 1)\rangle$, то множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $\mathcal{K}$, не равно $Cl_{\supset\neg}$.

В свете лемм 4, 20 и 21 очевидна справедливость следующих лемм 22 и 23.

Лемма 22. Для всякой $L_{\supset\neg}$-матрицы $\mathcal{K}$ вида $\langle M(1/2, 0, 1, 1), f\rangle$: $\mathcal{K} \in \{\langle M(1/2, 0, 1, 1), \neg(1/2, 1, 1)\rangle, \langle M(1/2, 0, 1, 1), \neg(0, 1, 1)\rangle\}$ тогда и только тогда, когда множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $\mathcal{K}$, равно $Cl_{\supset\neg}$.

Лемма 23. Для всякой $L_{\supset\neg}$-матрицы $\mathcal{K}$ вида $\langle M(0, 1/2, 1, 1), f\rangle$: $\mathcal{K} \in \{\langle M(0, 1/2, 1, 1), \neg(1/2, 1, 1)\rangle, \langle M(0, 1/2, 1, 1), \neg(0, 1, 1)\rangle\}$ тогда и только тогда, когда множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $\mathcal{K}$, равно $Cl_{\supset\neg}$.

Опираясь на леммы 22 и 23 и на данное в (Попов 2020a) определение 8 $L_{\supset\neg}$-матрицы, адекватной $L_{\supset\neg}$-логике, получаем, что верны следующие теорема 1 и теорема 2.

Теорема 1. *Для всякой $L_{\supset\neg}$-матрицы $\mathcal{K}$ вида $\langle M(1/2, 0, 1, 1), f\rangle$: $\mathcal{K} \in \{\langle M(1/2, 0, 1, 1), \neg(1/2, 1, 1)\rangle, \langle M(1/2, 0, 1, 1), \neg(0, 1, 1)\rangle\}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица, адекватная $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$.*

Теорема 2. *Для всякой $L_{\supset\neg}$-матрицы $\mathcal{K}$ вида $\langle M(0, 1/2, 1, 1), f\rangle$: $\mathcal{K} \in \{\langle M(0, 1/2, 1, 1), \neg(1/2, 1, 1)\rangle, \langle M(0, 1/2, 1, 1), \neg(0, 1, 1)\rangle\}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица, адекватная $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$.*

Второй раздел

Лемма 24. Если $\langle M, N, g, f\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица, то $\langle M, N, g\rangle$ есть такая $L_{\supset}$-матрица, что для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A и для всякой оценки v в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle M, N, g, f\rangle$

$$\varphi_{\langle M,N,g,f\rangle}(\langle A, v\rangle) = \varphi_{\langle M,N,g\rangle}(\langle A, v\rangle).$$

Лемма 24 доказана с использованием метода индукции по построению $L_{\supset\neg}$-формулы.

Применяя лемму 24, нетрудно доказать следующие леммы 25 и 26.

Лемма 25. Если $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g, f\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица, то $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g\rangle$ есть такая $L_{\supset}$-матрица, что множество всех $L_{\supset}$-формул, каждая из которых является $L_{\supset\neg}$-формулой, общезначимой в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g, f\rangle$, равно множеству всех $L_{\supset}$-формул, общезначимых в $L_{\supset}$-матрице $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g\rangle$.

Лемма 26. Множество всех $L_{\supset}$-формул, каждая из которых является $L_{\supset\neg}$-формулой, общезначимой в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle\{0, 1\}, \{1\}, \supset_{Cl}, \neg_{Cl}\rangle$, равно множеству всех $L_{\supset}$-формул, общезначимых в $L_{\supset}$-матрице $\langle\{0, 1\}, \{1\}, \supset_{Cl}\rangle$.

Теорема 3. *Для всякой $L_{\supset\neg}$-матрицы $\mathcal{K}$, носитель которой есть $\{1, 1/2, 0\}$ и выделенное множество которой есть $\{1\}$, верно следующее: если $\mathcal{K}$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица, адекватная $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$, то* $\mathcal{K} \in \{\langle M(1, 0, 0, 1), \neg(0, 0, 1)\rangle, \langle M(1/2, 1, 1, 1/2), \neg(1/2, 1, 1/2)\rangle, \langle M(1/2, 1/2, 1, 1), \neg(1/2, 1, 1)\rangle, \langle M(1/2, 1/2, 1, 1), \neg(0, 1, 1)\rangle, \langle M(1/2, 0, 1, 1), \neg(1/2, 1, 1)\rangle, \langle M(1/2, 0, 1, 1), \neg(0, 1, 1)\rangle, \langle M(0, 1/2, 1, 1), \neg(1/2, 1, 1)\rangle, \langle M(0, 1/2, 1, 1), \neg(0, 1, 1)\rangle, \langle M(0, 0, 1, 1), \neg(1/2, 1, 1)\rangle, \langle M(0, 0, 1, 1), \neg(0, 1, 1)\rangle\}$.

Докажем теорему 3.

(1) $\mathcal{K}_0$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица, носитель которой есть $\{1, 1/2, 0\}$ и выделенное множество которой есть $\{1\}$ (допущение).

(2) $\mathcal{K}_0$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица, адекватная $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$ (допущение).

Опираясь на допущение (1) и на определение $L_{\supset\neg}$-матрицы (определение 2 из [Попов 2020a]), получаем, что

(3) для некоторой бинарной операции g на $\{1, 1/2, 0\}$ и для некоторой унарной операции f на $\{1, 1/2, 0\}$ $\mathcal{K}_0 = \langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g, f\rangle$.

(4) Пусть g_0 есть бинарная операция на $\{1, 1/2, 0\}$, f_0 есть унарная операция на $\{1, 1/2, 0\}$, $\mathcal{K}_0 = \langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_0, f_0\rangle$.

(5) $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_0, f_0\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица, адекватная $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$ (из (2) и (4)).

Принимая во внимание, что $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_0, f_0\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица, и используя лемму 25, получаем, что

(6) множество всех $L_{\supset}$-формул, каждая из которых является $L_{\supset\neg}$-формулой, общезначимой в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_0, f_0\rangle$, равно множеству всех $L_{\supset}$-формул, общезначимых в $L_{\supset}$-матрице $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_0\rangle$.

(7) Множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_0, f_0\rangle$, равно $Cl_{\supset\neg}$ (из (5), по определению $L_{\supset\neg}$-матрицы, адекватной $L_{\supset\neg}$-логике).

Ввиду сформулированных в (Попов 2019a) соглашения 9, замечания 3 и соглашения 11 верно, что

(8) множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle\{0, 1\}, \{1\}, \supset_{Cl}, \neg_{Cl}\rangle$, равно $Cl_{\supset\neg}$.

(9) Множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_0, f_0\rangle$, равно множеству всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице $\langle\{0, 1\}, \{1\}, \supset_{Cl}, \neg_{Cl}\rangle$ (из (7) и (8)).

Опираясь на утверждения (6), (9) и лемму 26, получаем, что

(10) множество всех $L_{\supset}$-формул, общезначимых в $L_{\supset}$-матрице $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_0\rangle$, равно множеству всех $L_{\supset}$-формул, общезначимых в $L_{\supset}$-матрице $\langle\{0, 1\}, \{1\}, \supset_{Cl}\rangle$.

Учитывая, что $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_0\rangle$ есть $L_{\supset}$-матрица, и опираясь на утверждение (10) и на сформулированные в (Попов 2019a) определение 7, соглашение 8, соглашение 9 и замечание 4, получаем, что

(11) $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_0\rangle$ есть $L_{\supset}$-матрица, адекватная $L_{\supset}$-логике $Cl_{\supset}$.

Опираясь на доказанную в (Попов 2019b) теорему 1 и на утверждение (11), получаем, что

(12) $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_0\rangle = M(1, 0, 0, 1)$, или
$\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_0\rangle = M(1, 0, 0, 1/2)$, или
$\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_0\rangle = M(1/2, 1, 1, 1/2)$, или
$\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_0\rangle = M(1/2, 1, 0, 1/2)$, или
$\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_0\rangle = M(1/2, 1/2, 1, 1)$, или
$\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_0\rangle = M(1/2, 0, 1, 1)$, или
$\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_0\rangle = M(1/2, 0, 0, 1/2)$, или
$\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_0\rangle = M(0, 1/2, 1, 1)$, или
$\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_0\rangle = M(0, 0, 1, 1)$.

Нетрудно убедиться, что

(13) если $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},g_0\rangle = M(1,0,0,1)$,
то $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},g_0,f_0\rangle = \langle M(1,0,0,1),f_0\rangle$;
если $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},g_0\rangle = M(1,0,0,1/2)$,
то $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},g_0,f_0\rangle = \langle M(1,0,0,1/2),f_0\rangle$;
если $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},g_0\rangle = M(1/2,1,1,1/2)$,
то $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},g_0,f_0\rangle = \langle M(1/2,1,1,1/2),f_0\rangle$;
если $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},g_0\rangle = M(1/2,1,0,1/2)$,
то $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},g_0,f_0\rangle = \langle M(1/2,1,0,1/2),f_0\rangle$;
если $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},g_0\rangle = M(1/2,1/2,1,1)$,
то $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},g_0,f_0\rangle = \langle M(1/2,1/2,1,1),f_0\rangle$;
если $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},g_0\rangle = M(1/2,0,1,1)$,
то $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},g_0,f_0\rangle = \langle M(1/2,0,1,1),f_0\rangle$;
если $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},g_0\rangle = M(1/2,0,0,1/2)$,
то $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},g_0,f_0\rangle = \langle M(1/2,0,0,1/2),f_0\rangle$;
если $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},g_0\rangle = M(0,1/2,1,1)$,
то $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},g_0,f_0\rangle = \langle M(0,1/2,1,1),f_0\rangle$;
если $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},g_0\rangle = M(0,0,1,1)$,
то $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},g_0,f_0\rangle = \langle M(0,0,1,1),f_0\rangle$.

(14) $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},g_0,f_0\rangle = \langle M(1,0,0,1),f_0\rangle$, или
$\langle\{1,1/2,0\},\{1\},g_0,f_0\rangle = \langle M(1,0,0,1/2),f_0\rangle$, или
$\langle\{1,1/2,0\},\{1\},g_0,f_0\rangle = \langle M(1/2,1,1,1/2),f_0\rangle$, или
$\langle\{1,1/2,0\},\{1\},g_0,f_0\rangle = \langle M(1/2,1,0,1/2),f_0\rangle$, или
$\langle\{1,1/2,0\},\{1\},g_0,f_0\rangle = \langle M(1/2,1/2,1,1),f_0\rangle$, или
$\langle\{1,1/2,0\},\{1\},g_0,f_0\rangle = \langle M(1/2,0,1,1),f_0\rangle$, или
$\langle\{1,1/2,0\},\{1\},g_0,f_0\rangle = \langle M(1/2,0,0,1/2),f_0\rangle$, или
$\langle\{1,1/2,0\},\{1\},g_0,f_0\rangle = \langle M(0,1/2,1,1),f_0\rangle$, или
$\langle\{1,1/2,0\},\{1\},g_0,f_0\rangle = \langle M(0,0,1,1),f_0\rangle$ (из (12) и (13)).

В (Попов 2019a) доказано, что

(15) не существует такой унарной операции f, что $\langle M(1,0,0,1/2),f\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица, адекватная $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$.

В (Попов 2020a) доказано, что

(16) не существует такой унарной операции f, что $\langle M(1/2,1,0,1/2),f\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица, адекватная $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$.

В (Попов 2020a) доказано также, что

(17) не существует такой унарной операции f, что $\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), f\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица, адекватная $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$.

(18) f_0 есть унарная операция (из (4)).

(19) $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_0, f_0\rangle = \langle M(1, 0, 0, 1/2), f_0\rangle$ (допущение).

(20) $\langle M(1, 0, 0, 1/2), f_0\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица, адекватная $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$ (из (5) и (19)).

(21) Существует такая унарная операция f, что $\langle M(1, 0, 0, 1/2), f\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица, адекватная $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$ (из (18) и (20)).

Утверждение (21) противоречит утверждению (15). Следовательно, неверно допущение (19).

Итак,

(22) $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_0, f_0\rangle \neq \langle M(1, 0, 0, 1/2), f_0\rangle$.

(23) $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_0, f_0\rangle = \langle M(1/2, 1, 0, 1/2), f_0\rangle$ (допущение).

(24) $\langle M(1/2, 1, 0, 1/2), f_0\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица, адекватная $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$ (из (5) и (23)).

(25) Существует такая унарная операция f, что $\langle M(1/2, 1, 0, 1/2), f\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица, адекватная $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$ (из (18) и (24)).

Утверждение (25) противоречит утверждению (16). Следовательно, неверно допущение (23).

Итак,

(26) $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_0, f_0\rangle \neq \langle M(1/2, 1, 0, 1/2), f_0\rangle$.

(27) $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_0, f_0\rangle = \langle M(1/2, 0, 0, 1/2), f_0\rangle$ (допущение).

(28) $\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), f_0\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица, адекватная $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$ (из (5) и (27)).

(29) Существует такая унарная операция f, что $\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), f\rangle$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица, адекватная $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$ (из (18) и (28)).

Утверждение (29) противоречит утверждению (17). Следовательно, неверно допущение (27).

Итак,

(30) $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_0, f_0\rangle \neq \langle M(1/2, 0, 0, 1/2), f_0\rangle$.

(31) $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_0, f_0\rangle = \langle M(1, 0, 0, 1), f_0\rangle$, или
$\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_0, f_0\rangle = \langle M(1/2, 1, 1, 1/2), f_0\rangle$, или
$\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_0, f_0\rangle = \langle M(1/2, 1/2, 1, 1), f_0\rangle$, или
$\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_0, f_0\rangle = \langle M(1/2, 0, 1, 1), f_0\rangle$, или
$\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_0, f_0\rangle = \langle M(0, 1/2, 1, 1), f_0\rangle$, или
$\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_0, f_0\rangle = \langle M(0, 0, 1, 1), f_0\rangle$ (из (14), (22), (26) и (30)).

Опираясь на теорему 1 из (Попов 2020b) и на утверждение (5), получаем, что

(32) если $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}.g_0, f_0\rangle = \langle M(1, 0, 0, 1), f_0\rangle$,
то $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_0, f_0\rangle = \langle M(1, 0, 0, 1), \neg(0, 0, 1)\rangle$.

Опираясь на теорему 2 из (Попов 2020b) и на утверждение (5), получаем, что

(33) если $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}.g_0, f_0\rangle = \langle M(0, 0, 1, 1), f_0\rangle$,
то $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_0, f_0\rangle \in \{\langle M(0, 0, 1, 1), \neg(1/2, 1, 1)\rangle, \langle M(0, 0, 1, 1), \neg(0, 1, 1)\rangle\}$.

Опираясь на теорему 3 из (Попов 2020b) и на утверждение (5), получаем, что

(34) если $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}.g_0, f_0\rangle = \langle M(1/2, 1, 1, 1/2), f_0\rangle$,
то $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_0, f_0\rangle = \langle M(1/2, 1, 1, 1/2), \neg(1/2, 1, 1/2)\rangle$.

Опираясь на теорему 4 из (Попов 2020b) и на утверждение (5), получаем, что

(35) если $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}.g_0, f_0\rangle = \langle M(1/2, 1/2, 1, 1), f_0\rangle$,
то $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_0, f_0\rangle \in \{\langle M(1/2, 1/2, 1, 1), \neg(0, 1, 1)\rangle, \langle M(1/2, 1/2, 1, 1), \neg(1/2, 1, 1)\rangle\}$.

Опираясь на доказанную здесь теорему 1, на определение $L_{\supset\neg}$-матрицы, адекватной $L_{\supset\neg}$-логике, и на утверждение (5), получаем, что

(36) если $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}.g_0, f_0\rangle = \langle M(1/2, 0, 1, 1), f_0\rangle$,
то $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_0, f_0\rangle \in \{\langle M(1/2, 0, 1, 1), \neg(1.2, 1, 1)\rangle, \langle M(1/2, 0, 1, 1), \neg(0, 1, 1)\rangle\}$.

Опираясь на доказанную здесь теорему 2, на определение $L_{\supset\neg}$-матрицы, адекватной $L_{\supset\neg}$-логике, и на утверждение (5), получаем, что

(37) если $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}.g_0, f_0\rangle = \langle M(0, 1/2, 1, 1), f_0\rangle$, то $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g_0, f_0\rangle \in \{\langle M(0, 1/2, 1, 1), \neg(1.2, 1, 1)\rangle, \langle M(0, 1/2, 1, 1), \neg(0, 1, 1)\rangle\}$.

(38) $\langle\{1,1/2,0\},\{1\},g_0,f_0\rangle = \langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle$, или
$\langle\{1,1/2,0\},\{1\},g_0,f_0\rangle \in \{\langle M(0,0,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle,\langle M(0,0,1,1),\neg(0,1,1)\rangle\}$, или
$\langle\{1,1/2,0\},\{1\},g_0,f_0\rangle = \langle M(1/2,1,1,1/2),\neg(1/2,1,1/2)\rangle$, или
$\langle\{1,1/2,0\},\{1\},g_0,f_0\rangle \in \{\langle M(1/2,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle,\langle M(1/2,1/2,1,1),\neg(0,1,1)\rangle\}$, или
$\langle\{1,1/2,0\},\{1\},g_0,f_0\rangle \in \{\langle M(1/2,0,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle,\langle M(1/2,0,1,1),\neg(0,1,1)\rangle\}$, или
$\langle\{1,1/2,0\},\{1\},g_0,f_0\rangle \in \{\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle,\langle M(0,1/2,1,1),\neg(0,1,1)\rangle\}$
(из (31), (33), (34), (35), (36), (37) и (38)).

(39) $\mathscr{K}_0 = \langle\{1,1/2,0\},\{1\},g_0,f_0\rangle$ (из (4)).

Опираясь на утверждения (38) и (39), приходим к выводу, что

(40) $\mathscr{K}_0 \in \{\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle,\langle M(1/2,1,1,1/2),\neg(1/2,1,1/2)\rangle,$
$\langle M(1/2,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle,\langle M(1/2,1/2,1,1),\neg(0,1,1)\rangle,$
$\langle M(1/2,0,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle,\langle M(1/2,0,1,1),\neg(0,1,1)\rangle,$
$\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle,\langle M(0,1/2,1,1),\neg(0,1,1)\rangle,$
$\langle M(0,0,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle,\langle M(0,0,1,1),\neg(0,1,1)\rangle\}$.

Снимая допущения (2) и (1) и обобщая, завршаем доказательство теоремы 3.

Теорема 3 доказана.

Опираясь на теоремы 1–4, доказанные в (Попов 2020b), и на теоремы 1 и 2, доказанные в первом разделе предлагаемой работы, легко доказать следующую теорему 4.

Теорема 4. *Для всякой $L_{\supset\neg}$-матрицы $\mathscr{K}$: если*

$$\begin{aligned}\mathscr{K} \in \{&\langle M(1,0,0,1),\neg(0,0,1)\rangle,\langle M(1/2,1,1,1/2),\neg(1/2,1,1/2)\rangle,\\ &\langle M(1/2,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle,\langle M(1/2,1/2,1,1),\neg(0,1,1)\rangle,\\ &\langle M(1/2,0,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle,\langle M(1/2,0,1,1),\neg(0,1,1)\rangle,\\ &\langle M(0,1/2,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle,\langle M(0,1/2,1,1),\neg(0,1,1)\rangle,\\ &\langle M(0,0,1,1),\neg(1/2,1,1)\rangle,\langle M(0,0,1,1),\neg(0,1,1)\rangle\},\end{aligned}$$

то $\mathscr{K}$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица, адекватная $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$.

Из теоремы 3 и теоремы 4 вытекает следующая теорема 5.

Теорема 5. *Для всякой $L_{\supset\neg}$-матрицы $\mathcal{K}$, носитель которой есть $\{1, 1/2, 0\}$ и выделенное множество которой есть $\{1\}$, верно следующее: $\mathcal{K}$ есть $L_{\supset\neg}$-матрица, адекватная $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$ тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned}\mathcal{K} \in \{&\langle M(1,0,0,1), \neg(0,0,1)\rangle, \langle M(1/2,1,1,1/2), \neg(1/2,1,1/2)\rangle,\\ &\langle M(1/2,1/2,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle, \langle M(1/2,1/2,1,1), \neg(0,1,1)\rangle,\\ &\langle M(1/2,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle, \langle M(1/2,0,1,1), \neg(0,1,1)\rangle,\\ &\langle M(0,1/2,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle, \langle M(0,1/2,1,1), \neg(0,1,1)\rangle,\\ &\langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle, \langle M(0,0,1,1), \neg(0,1,1)\rangle\}.\end{aligned}$$

Используя теорему 5 и тот очевидный факт, что все поименованные в этой теореме $L_{\supset\neg}$-матрицы попарно различны, приходим к выводу, что упорядоченная десятка $\langle\langle M(1,0,0,1), \neg(0,0,1)\rangle, \langle M(1/2,1,1,1/2), \neg(1/2,1,1/2)\rangle, \langle M(1/2,1/2,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle, \langle M(1/2,1/2,1,1), \neg(0,1,1)\rangle, \langle M(1/2,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle, \langle M(1/2,0,1,1), \neg(0,1,1)\rangle, \langle M(0,1/2,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle, \langle M(0,1/2,1,1), \neg(0,1,1)\rangle, \langle M(0,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle, \langle M(0,0,1,1), \neg(0,1,1)\rangle\rangle$ определяет пересчет (без повторений) всех $L_{\supset\neg}$-матриц вида $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g, f\rangle$, адекватных $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$.

Соглашение 4.

$$\begin{aligned}Y = \{&\langle M(1/2,0,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle, \langle M(1/2,0,1,1), \neg(0,1,1)\rangle,\\ &\langle M(0,1/2,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle, \langle M(0,0,1,1), \neg(0,1,1)\rangle\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X_1 = \{&\langle M(1,0,0,1), \neg(0,0,1)\rangle, \langle M(1/2,1/2,1,1),\\ &\neg(0,1,1)\rangle, \langle M(1/2,1/2,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle\} \cup Y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X_2 = \{&\langle M(1,0,0,1), \neg(0,0,1)\rangle, \langle M(1/2,1/2,1,1),\\ &\neg(0,1,1)\rangle, \langle M(0,0,1,1), \neg(0,1,1)\rangle\} \cup Y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X_3 = \{&\langle M(1,0,0,1), \neg(0,0,1)\rangle, \langle M(0,0,1,1),\\ &\neg(1/2,1,1)\rangle, \langle M(1/2,1/2,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle\} \cup Y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X_4 = \{&\langle M(1,0,0,1), \neg(0,0,1)\rangle, \langle M(0,0,1,1),\\ &\neg(1/2,1,1)\rangle, \langle M(0,0,1,1), \neg(0,1,1)\rangle\} \cup Y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X_5 = \{&\langle M(1/2,1,1,1/2), \neg(1/2,1,1)\rangle, \langle M(1/2,1/2,1,1),\\ &\neg(0,1,1)\rangle, \langle M(1/2,1/2,1,1), \neg(1/2,1,1)\rangle\} \cup Y\end{aligned}$$

$$X_6 = \{\langle M(1/2, 1, 1, 1/2), \neg(1/2, 1, 1)\rangle, \langle M(1/2, 1/2, 1, 1), \neg(0, 1, 1)\rangle, \langle M(0, 0, 1, 1), \neg(0, 1, 1)\rangle\} \cup Y$$

$$X_7 = \{\langle M(1/2, 1, 1, 1/2), \neg(1/2, 1, 1)\rangle, \langle M(1/2, 1/2, 1, 1), \neg(1/2, 1, 1)\rangle, \langle M(1/2, 1/2, 1, 1), \neg(1/2, 1, 1)\rangle\} \cup Y$$

$$X_8 = \{\langle M(1/2, 1, 1, 1/2), \neg(1/2, 1, 1)\rangle, \langle M(1/2, 1/2, 1, 1), \neg(1/2, 1, 1)\rangle, \langle M(0, 0, 1, 1), \neg(0, 1, 1)\rangle\} \cup Y$$

В заключение заметим, что можно доказать следующую теорему 6.

Теорема 6. $X \in \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8\}$ *тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия (I), (II), (III):*

(I) X есть множество $L_{\supset\neg}$-матриц вида $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, g, f\rangle$, каждая из которых адекватна $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$,

(II) для всякой трехзначной $L_{\supset\neg}$-матрицы $\mathcal{K}$ с одним выделенным значением, адекватной $L_{\supset\neg}$-логике $Cl_{\supset\neg}$, существует такая $L_{\supset\neg}$-матрица M из X, что $L_{\supset\neg}$-матрица M изоморфна $L_{\supset\neg}$-матрице $\mathcal{K}$,

(III) ни для каких двух различных $L_{\supset\neg}$-матриц $\mathcal{K}$ и M из X неверно, что $L_{\supset\neg}$-матрица $\mathcal{K}$ изоморфна $L_{\supset\neg}$-матрице M.

Литература

Попов 2019a — *Попов В. М.* К проблеме расширения матричной семантики, адекватной классической импликативной логике, до матричной семантики, адекватной классической импликативно-негативной логике // Логико-философские штудии. 2019. Т. 17, № 1. С. 1–31.

Попов 2019b — *Попов В. М.* Трехзначные логические матрицы с одним выделенным значением, адекватные классической импликативной логике // Логико-философские штудии. 2019. Т. 17, № 2. С. 142–193.

Попов 2020a — *Попов В. М.* К проблеме расширения матричной семантики, адекватной классической импликативной логике, до матричной семантики, адекватной классической импликативно-негативной логике (часть 2) // Логико-философские штудии. 2020. Т. 18, № 1. С. 34–45.

Попов 2020b — *Попов В. М.* К проблеме расширения матричной семантики, адекватной классической импликативной логике, до матричной семантики, адекватной классической импликативно-негативной логике (часть 3) // Логико-философские штудии. 2020. Т. 18, № 2. С. 134–160.

Черч 1960 — *Черч А.* Введение в математическую логику. Т. 1. М.: Издательство иностранной литературы, 1960.