ПЕРЕВОДЫ И ПУБЛИКАЦИИ

Анатолий Пушкарский[1]

О «ЛОГИЧЕСКОМ ИСЧИСЛЕНИИ» ДЖ. БУЛЯ

Аннотация. Проводится разбор и анализ небольшой статьи Джорджа Буля, опубликованной на следующий год после выхода его знаменитой работы «Математический анализ логики». Исследуется вопрос о том, насколько ее можно рассматривать как адекватный и репрезентативный обзор его логической концепции. Также исследуются математические, экстралогические и философские основания логики Буля. Указывается, что математическим основанием его логической системы послужили его исследования в области линейных дифференциальных уравнений. Кроме того, в основании его пионерских открытий лежали произвольные философско-методологическим допущения, которые напрямую не относились к области логики и математики. Такими допущениями следует признать некоторую оригинальную психологическую теорию сознания, его философию математики, предполагающую существование универсального математического исчисления, и некоторые положения логико-философской концепции И. Канта.

Ключевые слова: история логики, Дж. Буль, логическое исчисление, алгебра логики, логические функции мышления, И. Кант, метафизическая дедукция категорий.

Anatoly Pushkarsky

ABOUT GEORGE BOOLE'S *CALCULUS OF LOGIC*

Abstract. In the present paper, the small article by George Boole, published the next year after the publication of his famous work *The Mathematical Analysis of Logic*, is analyzed. We discuss to what extent it can be considered as an adequate and representative overview of his logical views. The mathematical, extralogical and philosophical foundations of Boole's logic are explored. It is pointed out that the mathematical basis of his logical system was his research in the field of linear differential equations. Moreover, his pioneering discoveries were based on arbitrary philosophical and methodological assumptions that were not directly related to the field of logic and mathematics. Some of the original psychological theory of mind, its philosophy of mathematics, which presupposes the existence of a universal mathematical calculus, and

[1] *Пушкарский Анатолий Геннадьевич* — младший научный сотрудник Академии Кантиана Института гуманитарных наук Балтийского федерального университет им. Иммануила Канта.
Anatoly G. Pushkarsky, research fellow, Academia Kantiana, Institute for Humanities, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia.
pushcarskiy@mail.ru

some provisions of Immanuel Kant's logico-philosophical doctrine should be recognized as such assumptions.
Keywords: history of logic, George Boole, logical calculus, algebra of logic, logical functions of thinking, Immanuel Kant, metaphysical deduction of categories.

Для цитирования: *Пушкарский А. Г.* О «Логическом исчислении» Дж. Буля // Логико-философские штудии. 2020. Т. 18, № 3. С. 267–275. DOI: 10.52119/LPHS.2021.55.34.004.

Буквально через год после выхода своей знаменитой работы «Математический анализ логики, являющийся опытом исчисления дедуктивного рассуждения» в 1847 году Дж. Буль в «Кембриджском и дублинском математическом журнале»[2] публикует небольшую статью о «Логическом исчислении»[3]. Начинается она следующими словами: «Цель данной статьи — дать такое разъяснение части этого трактата, которое может предоставить правильный взгляд на природу разработанной системы. Я постараюсь более четко изложить положения, в которых заключаются ее отличительные черты, и дать более конкретную иллюстрацию некоторых ее особенностей, которые не так заметно выделены в оригинальной работе» (Boole 1848: 183). Но насколько ее можно рассматривать как адекватный и репрезентативный обзор его логической концепции и ее математических и философских оснований? В предисловии к своим фундаментальным «Законам мышления» Буль заявляет, что «Математический анализ» он написал слишком быстро «в течение нескольких недель после того, как появилась его идея» (Boole 1854: v). А всего через четыре года после публикации «Математического анализа» в небольшой статье, посвященной математической вероятности, Буль даже выражает определенное сожаление по поводу ее публикации: «К сожалению, по причине поспешной публикации „Математического анализа логики“ и статьи, опубликованной в „Кембриджском математическом журнале“ под названием „Исчисление логики“, где я сформулировал определенные общие законы мышления и их математические выражения, составляющие, как я полагаю, истинную основу формальной логики, фактическое развитие этих законов в упомянутых работах слишком несовершенно, чтобы соответствовать требованиям современного положения дел. Но данное

[2] «Кембриджский математический журнал» («The Cambridge Mathematical Journal»), в котором Буль опубликовал целый ряд работ по математическому анализу, был основан в 1841 году другом Буля английским математиком-символистом Дунканом Ф. Грегори, во многом благодаря которому и состоялась блестящая академическая карьера Дж. Буля. В 1846 году журнал был переименован в «The Cambridge and Dublin Mathematical Journal».

[3] Надо иметь в виду, что точного понятия логического исчисления в современном математическом смысле еще не существовало и термин *исчисление* понимался в смысле математической теории, задаваемой, например, с помощью явных генетических определений. И далее мы будем использовать данный термин во втором смысле, как он понимался математиками XIX века.

несовершенство не распространяется на сами законы. Результаты последующих исследований позволяют мне утверждать, что существует общий метод, позволяющий нам не только выявлять любые следствия системы пропозиций, но также выражать в научной форме порядок связи, который любая пропозиция имеет с другой пропозицией или их системой» (Hailperin 1982: 70).

Дело в том, что начиная с 1850 года Буль серьезно заинтересовался математической теорией вероятностей, особенно ее философскими аспектами[4]. Он пытается разработать исчисление вероятностей, основанное законах логики, и исследует отдельные проблемы, которые естественным образом возникают при изучении вероятностей. В своей превосходной книге «Булева логика и вероятность», которая представляет собой критическое изложение булевой логики и его теории вероятности с точки зрения современной алгебры, логики и теории вероятностей, Теодор Гальперин отмечает: «Базовая взаимосвязь между булевой алгеброй и исчислением событий, ставшая теперь обычным явлением в работах по теории вероятностей, была полностью понята и использована Булем. В его „Математическом анализе логики“ 1847 года нет упоминания о вероятности, но к 1854 году в „Законах мысли“ заметно существенное развитие. Здесь Буль не только использует эту основную взаимосвязь, но и представляет совершенно новый подход к условной вероятности, существенным образом используя свою особую логическую систему... Никогда не понимаемые ясно и считающиеся так или иначе ошибочными, идеи Буля о вероятности были просто обойдены в истории данной дисциплины, которая развивалась по другим направлениям» (Hailperin 1982: 215).

Буль полагал, что чистая математика непосредственно связана с прикладной наукой. И если современная теория вероятности изначально возникла в попытке найти математические методы азартных игр и просчитать выигрышные стратегии игроков, то интерес Буля к проблеме вероятности, по-видимому, проистекает из его увлечения астрономией, как, впрочем, и у многих других английских математиков того времени. И он попытался найти общий и совершенный метод исчисления вероятностей, который был бы основан на определении логических отношений между данными пропозициями или множествами пропозиций и вывода на этой основе отношения между их вероятностями. Видимо, это было вообще первое упоминание в истории математики о близкой связи между логикой и вероятностью, а также о зависимости математической теории вероятности от лежащей в ее основе логической системы. И, таким образом, его главный трактат, «Законы мышления», был в значительной степени мотивирован желанием Буля построить полноценную математическую систему, которая могла бы справиться со всеми тонкостями исчисления вероятностей. Как отмечает автор биографии Дж. Буля, «...современную концепцию событий в вероятностном пространстве можно напрямую проследить до работ Буля, хотя большинство современных историков при-

[4]О собственно главном философском замысле Буля, т. е. о применение логики и теории вероятностей для изучения и моделирования процессов мышления, см. (Пушкарский 2015).

писывают эту теорию Колмогорову» (MacHale 2014: 195). И поскольку теория вероятности стала развиваться совершенно независимо от концепции исчисления вероятностей Буля, которая надолго была забыта, сожаление Буля о недостатках его ранних работ по логике не имеет существенного значения для понимания собственно его логической системы и указанная небольшая статья Буля может служить вполне полноценным и адекватным обзором логики Буля и ее оснований.

Тем не менее, целый ряд формулировок законов и методов, используемых Булем, у современного читателя вызывает естественное недоумение. Первое логическое тождество в статье имеет довольно странный вид: «x 1 или x = класс X», в котором «1 означает понятие универсума», «X — понятие какой-либо группы объектов, содержащей X-ы», а x, по Булю, репрезентирует «ментальную операцию выбора из этой группы всех X-ов, которые она содержит, или фиксирует наше внимание только на X-ах и исключая все не-X-ы». Символ он называет элективным (elective). Это «загадочное» равенство по мнению Ивора Граттан-Гиннесса, автора комментариев к сборнику работ Буля по логике и философии логики, свидетельствует об окончательном переходе Буля к знаковой традиции в трактовке языка[5], вследствие чего элективные символы были теперь напрямую связаны с классами (Boole 1997: xxxiii). Указанная традиция предполагает, что знаки являются первичными, а язык понимается как система знаков, с помощью которых выражаются и передаются все наши мыслительные операции. И если в «Математическом анализе» Буль просто отмечает, что «теория логики ... тесно связана с теорией языка» (Boole 1847: 5), то его отношение к пониманию знаковой природы языка существенно меняется, хотя он принимает более активную роль сознания в функционировании языка, чем другие логики его времени.

Переводя акты ментального выбора объектов данного универсума в письменные символы, можно сформулировать законы работы человеческого сознания. Такие символы, которые Буль полагает определенного рода операторами, обладают свойством воздействовать на объекты выбранного универсума либо напрямую, либо через другие операторы. Из рассмотрения данных операторов выражаются законы логики, которым подчиняется мышление при выборе или классификации элементов универсума. Например, если x — это элективный символ, который представляет выбор элементов из классов u и v, то результат акта выбора не зависит от данных классов, так что выполняется закон дистрибутивности $x(u+v) = xu+xv$. Таким же выводится закон коммутативности $xy = yx$ и особый индексный закон $x^n = x$. Элективные функции — это функции, переменные которых как раз и являются элективные операторы — $x, y, \ldots$. Буль был убежден, что в области логики к таким функциям могут быть применены все методы обычной алгебры и анализа, но с единственным ограничением, обусловленным как раз указанным законом —

[5]Более подробно о знаковой традиции в Британской логической традиции XIX века см. (Черноскутов 2012).

$x^n = x$.

Трактовка последнего представляет определенную трудность. Надо полагать, что он был результатом произвольного методологического и философскими допущения, хотя именно путем обращения к философско-методологическим идеям, не относящимся напрямую к области исследования и происходило большинство научных открытий. Индексные законы впервые появляются в работах по символической алгебре друга Буля Д. Ф. Грегори. В трактате 1840 года «О природе символической алгебры» он определяет наиболее примитивные отношения, которые должны существовать между любыми алгебраическими операциями (Gregory 1865: 1–13). Второй из пяти классов таких операций включит два вида индексных законов, последний из которых Грегори называет «законом повторения». Однако в булевой логике данный закон имеет не общий, а частный характер, поскольку он «характерен исключительно для элективных символов», и он опирается на его главную аксиому: «если между двумя классами установлено отношение эквивалентности, то оно остается неизменным, когда они оба одинаково модифицируются с помощью описанных выше операций (A). Именно эта аксиома, а не „dictum Аристотеля“[6], является реальной основой всех процессов рассуждения...» (Boole 1848: 185).

Но и в случае алгебры классов, оперирующей символами, указывающими на части речи естественного языка, булевый индексный закон может оказаться не общезначимым. Буль в своей логике ограничивается использованием существительных, прилагательных и предлогов (Boole 1847: 14). Существительные указывают на классы в универсуме, например «мужчин» в универсуме всех «людей», прилагательные определяют подклассы, такие как «хорошие мужчины» для класса «мужчин». Предлоги выражают связки: «кроме» — «−», «исключающее или» — «+» и «и» — « ». И он иллюстрирует свой индексный закон следующим примером: «хорошие хорошие люди = хорошие люди» (Boole 1847: 7). Но если добавить, например, наречия в область интерпретируемых частей речи языка, то можно образовать такие подклассы: «(не) очень хорошие люди» из класса «хорошие люди», которые уже не подчиняются индексному закону указателя, поскольку «оченьочень хорошие люди» $\neq$ «очень хорошие люди» (Boole 1997: xxxiii).

Луис Лэйта, исследователь творчества Буля, обращает внимание на то, что жена Буля, Мэри Эверест Буль, в своих сочинениях часто упоминает о существовании мистико-педагогико-психологических оснований и целей логики Буля. По ее словам, уравнение $x^2 = x$ — это выражение дуалистической философии, утверждающей, что Вечное Единство Бога может быть достигнуто путем постижения всех противоположных знаний и фактов, $(1 - x)$ противоположно x, отсюда — $(1-x)+x = 1$. Эта философская концепция, как настаивает Мэри Эверест, вклю-

[6] Можно пойти достаточно далеко и проинтерпретировать данную аксиому как первую формулировку принципа экстенсиональности в современной логике, в отличие от интенсионального принципа аристотелевской логики, т. е. dictum de omni et nullo (лат. «обо всем или ни о чем»).

чает определенную психологическую теорию сознания и имеет далеко идущие педагогические приложения. Во-первых, это идея о том, что Бог воздействует на человеческое сознание через какой-то скрытый от него механизм так, что наше сознание не может постоянно осознавать свои действия. Во-вторых, в педагогике эта состоит в осознании важности использования символов, которые только на определенных этапах в процессе обучения и преподавания должны получать определенное значение. Конечно историки логики не могли серьезно относится к подобным заявлениям Мэри Эверест, но Лэйта в своем обширном исследовании приводит убедительные доказательства, того что на самом деле она была во многом права (см.: Laita 1980).

Не меньшее удивление для современного читателя вызывает и то, каким образом Буль демонстрирует технику решения общих и частных логических задач. Он совершенно свободно применяет методы числовой алгебры в своем логическом исчислении. Для решения своих элективных уравнений Буль использует вычитание, деление и даже деление на нуль, применяя при этом некий особый, но недостаточно строго объясненный и формально обоснованный метод интерпретации логического содержания дробных коэффициентов уравнений.

Чтобы кратко охарактеризовать методы булева логического исчисления, надо иметь в виду математические работы, которые Буль написал до их разработки. Они были посвящены математическому анализу и, в частности, решению линейных дифференциальных уравнений. Как утверждает Лэйта, «[а]нализ математических работ, которые Буль написал перед публикацией упомянутого логического трактата, показывает, что как методология, приведшая к созданию его логики, так и алгоритмы, использованные при ее разработке, неоднократно использовались им в его более ранних работах по анализу» (Laita 2000: 45).

Сначала Буль выводит общую формулу разложения логических функций по аналогии с разложением функций в ряды по хорошо известной ему формуле Маклорена[7]. Затем полученные символические выражения подвергаются преобразованиям в соответствии с алгебраическими законами и с методами, заимствованными из теории линейных дифференциальных уравнений. И наконец, производится интерпретация полученных результатов, по возможности релевантной с точки зрения понятий обычной содержательной логики. Буль убежден, что достоверность математического познания не зависит от интерпретации символов, а опирается исключительно на законы, управляющие их комбинацией. Например, в письме к своему коллеге математику-алгебраисту Артуру Кэли он так описывает свое важное понятие неинтерпретируемости, проводя аналогии между $x/2 + x/2 = x$ и $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$, где комбинация двух неинтерпретируемых дает интерпретируемую величину (Boole 1997: xxxii).

Методология Буля опиралась его на глубокую веру в существование универ-

[7]Об использовании Булем формулы Маклорена упоминает и Николай Иванович Стяжкин в своей фундаментальной работе по истории математической логики, см. (Стяжкин 1967: 323).

сального математического исчисления, которое включает в себя не только анализ, но и другие уже известные или только возможные разделы математики. Логика для него также была также ветвью данной универсальной математики, однако, поскольку такое универсальное исчисление еще не было разработано, единственный способ произвести его реализации в конкретных областях — это работать по аналогии с уже известными математическими теориями. Поэтому логическое исчисление Буля как одна из таких «конкретных реализаций» было построено им по аналогии с теориями дифференциальных и конечно-разностных операторов. Единственным существенным ограничением между ними оказывается индексный закон, который обсуждался выше (Laita 2000: 45–47). И кстати, сам Буль прямо указывает на данную аналогию, характеризую свои элективные уравнения: «В отношении таких уравнений следует отметить, что по самой природе элективных символов они обязательно линейны и что их решения имеют очень близкое сходство с решениями линейных дифференциальных уравнений...» (Boole 1847: 70).

Еще одной примечательной особенностью рассматриваемой статьи Буля является то, что в ней он обращается к метафизической дедукции априорных категорий рассудка, одному из ключевых пунктов трансцендентальной логики И. Канта. Последняя представляет собой экспликацию 12 априорных чистых понятий рассудка, т. е. категорий, как результат предметного истолкования логических функций из 12 форм суждений, представленных в таблице суждений в «Критике чистого разума» Канта в соответствии с основными логическими функциями мышления[8]. Так вот, Буль отмечает, что «...в высшей степени примечательным фактом является то, что выражения для всех этих отношений можно дедуктивно вывести одно из другого путем простого аналитического процесса. Из уравнения $y = vx$, выражающего *условную* пропозицию „Если пропозиция Y истинна, то пропозиция X истинна“, мы можем вывести уравнение

$$yx + (1-y)x + (1-y)(1-x) = 1^9,$$

которое выражает дизъюнктивную пропозицию „Либо Y и X вместе истинно, или X истинно и Y ложно, либо они оба являются ложными“ и, кроме того, уравнение $(1-x) = 0$, которое выражает отношение сосуществования, а именно что истинность Y и ложность X не сосуществуют. Я полагаю, что именно различие в мышлении между утвердительным и отрицательным более всего заслуживает считаться фундаментальным» (Boole 1848: 198). Приведенная цитата убедительно показывает, насколько для Буля были важны философские или метафизические основания его логических работ. Он обращается к философии Канта и позднее, о

[8]См. (Кант 1964: 82).

[9]Было бы большим искушением с современной точки зрения разглядеть в этой формуле СДНФ тождественно истинной формулы в алгебре логики по базису двух пропозициональных переменных, но следует учитывать, что в строгом смысле булевой алгебры у самого Буля не было.

чем свидетельствуют его неопубликованные заметки по философии логики[10]. В одним из поздних фрагментов, написанном уже после 1855 года, Буль отмечает: «...я хотел бы обратить внимание всех, кто проявляет интерес к изучению связи между логикой и метафизикой, на то, что эти категории [рассудка Канта] представлены в данной системе не как первичные, а как вторичные элементы, не как требующие исследования сами по себе, но как полностью определяемые формой такого математического построения, которое выводится из законов, на основе которых только возможно мышление» (Boole 1997: 187). Можно только констатировать, что существует непосредственная взаимосвязь между философской и математической стороной развития логики, приводящая в конце концов к возникновению логики современной[11].

И наконец, у проницательного читателя может возникнуть следующий вопрос: а была ли у самого Буля алгебра логики, впоследствии названная его именем, и насколько справедливо было бы называть Буля отцом современной математической логики? На первый вопрос Теодором Гальпериным, который провел тщательное исследование логики Буля с точки зрения современной математической логики, был дан вполне определенный ответ: «Хотя он никогда не делал свою алгебру полностью явной, мы пришли к выводу, что то, что он использовал, оказывается, по прояснении, коммутативным кольцом с единицей, без нильпотентов и с идемпотентами, которые обозначают классы. Приближаясь таким образом к „общей“ алгебре, Буль мог использовать знакомые процедуры и методы. Он не понимал, что для исчисления классов нужны только идемпотенты и операции, замкнутые по отношению к ним (то есть булева алгебра). Вместо этого он использовал кольцевые операции и, в частности, соответствующую операцию сложения, которое не является замкнутым по идемпотентности» (Hailperin 2000: 77). Все же следует опасаться чрезмерной модернизации теорий Буля. Он не мог знать о теории множеств Георга Кантора, которая вошла в математику только в 1870-х годах, и его теория классов всегда была теорией части и целого, принятой в традиционной логике, и тем более о математической логике, включающей пропозициональные функции или теорию квантификации в современном смысле, которая появляется в конце XIX века у Готлоба Фреге и Джузеппе Пеано. Только при большом желании, не особенно вдаваясь в тонкости логико-исторических исследований и проведя определенные усовершенствования булева логического исчисления, можно найти в нем элементарное основание современной классической логики. Однако вне зависимости от того, является ли Дж. Буль подлинным отцом современной символической логики, с него и Августа де Моргана она начиналась. И для любого, кто серьезно интересуется историей логики и философии, будет интересно ознакомится с «Логическим исчислением» Буля.

---

[10]См. главу VII или XXVI в (Boole 1997).

[11]О поисках оснований логики и мышления у И. Канта и Дж. Буля см.: (Пушкарский, 2019).

Литература

Кант 1964 — *Кант И.* Критика чистого разума // Соч. в шести томах. Т. 3. М.: Мысль, 1964.

Пушкарский 2015 — *Пушкарский А. Г.* О судьбе центрального философского замысла создателя алгебры логики: к 200-летию Джорджа Буля // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2015. Вып. 12. С. 81–88.

Пушкарский 2019 — *Пушкарский А. Г.* Основной закон мышления: от Канта к Булю // Вестник Томского государственного университета. Философия. Социология. Политология. 2019. № 51. С. 114–128.

Стяжкин 1967 — *Стяжкин Н. И.* Формирование математической логики. М.: Наука, 1967.

Черноскутов 2012 — *Черноскутов Ю. Ю.* Язык и предмет логики в Британской логической традиции XIX века // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 6. 2012. Вып. 1. С. 3–15.

Черноскутов 2016 — *Черноскутов Ю. Ю.* Развитие семантических идей в Британской логике XIX века // РАЦИО.ru. 2016. № 17 (2). С. 111–133.

Boole 1847 — *Boole G.* The mathematical analysis of logic, being an essay towards a calculus of deductive reasoning. London: Macmillan, 1847.

Boole 1848 — *Boole G.* The Calculus of Logic // Cambridge and Dublin Mathematical Journal. 1848. Vol. III. P. 183–198.

Boole 1854 — *Boole G.* An investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities. London-Cambridge: Macmillan, 1854.

Boole 1997 — *Boole G.* Selected manuscripts on logic and its philosophy / [ed. by] lvor Grattan-Guinness, Gerard Bornet. Basel; Boston; Berlin: Birkhauser, 1997.

Gregory 1865 — *Gregory D. F.* The Mathematical Writings of Duncan Farquharson Gregory, M.A. / W. Walton, Ed.. Cambridge, UK: Deighton, Bell, 1865.

Hailperin 1986 — *Hailperin T.* Boole's Logic and Probability. N.Y., 1986.

Hailperin 2000 — *Hailperin T.* Boole's Algebra Isn't Boolean Algebra (1981) // A Boole Anthology. Recent and Classical Studies in the Logic of George Boole. Springer-Science + Business Media, B.Y., 2000. P. 61–78.

Laita 1980 — *Laita L. M.* Boolean algebra and its extra-logical sources: the testimony of Mary Everest Boole // History and Philosophy of Logic. 1980. Vol. 1. P. 37–60.

Laita 2000 — *Laita L. M.* The Influence of Boole's Search for a Universal Method in Analysis on the Creation of His Logic (1977) // A Boole Anthology. Recent and Classical Studies in the Logic of George Boole. Springer-Science + Business Media, B.Y., 2000. P. 45–59.

MacHale 2014 — *MacHale D.* The Life and Work of George Boole. A Prelude to The Digital Age. Cork University Press, 2014.