Джордж Буль[i]

ЛОГИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Перевод с англ. А. Г. Пушкарского

Для цитирования: *Буль Дж.* Логическое исчисление // Логико-философские штудии. 2020. Т. 18, № 3. С. 276–291. DOI: 10.52119/LPHS.2021.99.42.005.

В недавно опубликованной работе[1] я продемонстрировал применение новой и оригинальной формы математики для выражения операций мышления в процессе рассуждения (reasoning)[ii]. Цель данной статьи — дать такое разъяснение части этого трактата, которое может предоставить правильный взгляд на природу разработанной системы. Я постараюсь более четко изложить положения, в которых заключаются ее отличительные черты, и дать более конкретную иллюстрацию некоторых ее особенностей, которые не так заметно выделены в оригинальной работе. Часть системы, которой я ограничу свое изложение, будут касаться трактовки категорических пропозиций[iii]. В рамках этого ограничения основные положения, которые я намерен представить, будут следующие:

(1) Задача логики состоит в исследовании соотношения классов и способов представления этих отношений в мышлении.

(2) Прежде чем мы распознаем существование пропозиций, действуют законы, объектом рассмотрения которых является понятие класса; это законы, которые зависят от строения интеллекта и которые определяют характер и форму процесса рассуждения.

[1]The Mathematical Analysis of Logic, being an Essay towards a Calculus of Deductive Reasoning. Cambridge, Macmillan; London, G. Bell.

[i]Перевод выполнен по: *Boole G.* The Calculus of Logic // Cambridge and Dublin Mathematical Journal. 1848. Vol. III. P. 183–198. Далее римскими цифрами идут примечания переводчика, арабскими оригинальные авторские.

[ii]Термин *reasoning* в англоязычной логической терминологии понимается как рассуждение в смысле ментального процесса в отличие от рассуждения-*argument* как результата этого процесса, выраженного вербально, что отчетливо не различается в отечественной логической традиции.

[iii]Термин *proposition* мы переводим устоявшимся отечественным логическим термином *пропозиция*, поскольку Буль отличает пропозицию от сужения (judgment) или от утверждения (assertion). Под пропозицией он понимает предложение, в котором делается утверждение (assertion is made) и которое выражает некоторое суждение (expression of a judgment). Категорическая пропозиция выражает суждение о связи его терминов посредством связки. Буль, однако, различает первичные и вторичные пропозиции. Последние «выражают суждение по отношению к другим пропозициям и могут делать это двумя способами. Либо они выражают суждение о какой-то отдельной пропозиции, утверждая их истинность или ложность, либо они выражают суждение относительно двух или более пропозиций, утверждая существование некоторого отношения или связи между ними» (см.: *Boole G.* Selected manuscripts on logic and its philosophy. 1997. P. 29).

(3) Эти законы имеют свое математическое выражение и, таким образом, составляют базис интерпретируемого исчисления.

(4) Более того, эти законы таковы, что все уравнения, составленные в соответствии с ними, хотя и составлены с использованием функциональных знаков, допускают точное решение, так что любая проблема логики может быть решена с помощью вывода из общей теоремы.

(5) Формы пропозиций, выраженных в соответствии с принципами данного исчисления, по существу аналогичны таковым для философского языка.

(6) Хотя символы исчисления не зависят в своей интерпретации от идеи количества, они, тем не менее, при конкретном применении к силлогистике приводят нас к количественным условиям вывода.

Особенно я хотел бы уделить внимание двум последним положениям, которые недостаточно полно разобраны в упомянутой выше работе. Остальные же будут предметом только побочного обсуждения. Для этого нам понадобятся следующие обозначения.

Универсум мыслимых объектов обозначим как 1, или целое (unity). Я принимаю его как первичное и самое элементарное понятие (subject conception). Все подчиненные понятия классов понимаются как полученные из него путем его ограничения, в соответствии со следующей схемой.

Предположим, что у нас есть понятие какой-либо группы объектов, содержащей X-ы, Y-и и другие объекты, и что , который мы будем называть элективным[iv] (elective) символом, будет репрезентировать ментальную операцию выбора из этой группы всех X-ов, которые она содержит, или фиксации нашего внимания только на X-ах, исключая все не-X-ы, а — ментальную операцию выбора Y-ов, и так далее; и затем, взяв за элементарное понятие 1, или универсума, мы будем иметь

$$
\begin{aligned}
x\,1 \text{ или } x &= \text{класс X}^{\text{v}},\\
y\,1 \text{ или } y &= \text{класс Y},\\
xy1 &= \text{класс, каждый член которого принадлежит и X, и Y},
\end{aligned}
$$

и т. д.

[iv]Т. е. символ, обозначающий произвольный выбираемый элемент определенного множества, или, в терминологии XIX века, класса.

[v]Это «загадочное» равенство, по мнению Ивора Граттан-Гиннесса, автора комментариев к сборнику работ Буля по логике и философии логики, свидетельствует об окончательном переходе Буля к знаковой традиции в трактовке языка как системы знаков, вследствие чего элективные символы были напрямую связаны с классами.

Аналогично, получаем

$$\begin{aligned} 1 - x &= \text{класс не-X}, \\ 1 - y &= \text{класс не-Y}, \\ x(1 - y) &= \text{класс, члены которого суть X-ы, но не Y-и}, \\ (1 - x)(1 - y) &= \text{класс, члены которого не суть ни X-ы, ни Y-и}, \end{aligned}$$

и тому подобное.

Далее, из рассмотрения природы ментальных операций следует выполнение следующих законов.

Для любых элективных символов, обозначенных x, y, z,

$$x(y + z) = xy + xz, \tag{1}$$

$$xy = yx \text{ и т. п.}, \tag{2}$$

$$x^n = x \text{ и т. п.} \tag{3}$$

Первый показывает, что элективные символы дистрибутивны в своем применении; второй — что они *коммутативны*. Третий я назвал индексным законом (index law); он характерен исключительно для элективных символов.

Истинность этих законов никак не зависит от природы, количества или взаимных отношений индивидов, включаемых в различные классы. Класс может включать один индивид или тысячу. Различные классы могут иметь общие элементы, а могут быть взаимоисключающими. Но все элективные символы дистрибутивны и коммутативны, и все они удовлетворяют закону, выраженному формулой (3).

Фактически эти законы проявляются в любой устной или письменной речи. Эквивалентность выражений «хороший мудрый человек» и «мудрый хороший человек» — не просто трюизм, но утверждение коммутативного закона, установленного в (2). Для других законов существуют аналогичные иллюстрации.

Эти законы связаны с общей аксиомой. Мы видели, что алгебраические операции, производимые с элективными символами, репрезентируют ментальные процессы. Таким образом, соединение двух символов знаком + представляет собой объединение двух классов в один класс, а соединение двух символов как умножение представляет собой ментальную операцию выбора из класса Y тех членов, которые принадлежат также к другому классу X, и так далее. С помощью таких операторов модифицируется понятие класса. Кроме того, мышление обладает способностью воспринимать отношения равенства классов. Аксиома, которая имеется здесь в виду, состоит в следующем: *если между двумя классами установлено отношение эквивалентности, то оно остается неизменным, когда они оба одинаково модифицируются с помощью описанных выше операций* (A). Именно эта аксиома, а не «dictum Аристотеля»[vi], является реальной основой всех процессов

[vi] Dictum de omni et nullo (лат. «обо всем или ни о чем») — закон силлогистики Аристотеля.

рассуждения, форма и характер которых, однако, определяется тремя законами, которые сформулированы выше.

Верно не только то, что каждый элективный символ, репрезентирующий класс удовлетворяет индексному закону (3), можно строго продемонстрировать, что любая комбинация элективных символов $\phi(xyz..)$, которая удовлетворяет закону $\phi(xyz..)^n = \phi(xyz..)$, представляет собой мыслимое понятие, — группу или класс, определяемый большим или меньшим числом свойств и состоящий из большего или меньшего количества частей.

Четыре категорических пропозиции, на которых построена теория обычного силлогизма, суть

Все Y-*и суть* X-*ы*.	A,
Ни один Y *не есть* X.	E,
Некоторые Y-*и суть* X-*ы*.	I,
Некоторые Y-*и не суть* X-*ы*.	O.

Мы рассмотрим их с помощью указания на классы, отношение между которыми выражается.

A. Выражение *Все* Y-*и* представляет класс Y и поэтому будет выражаться через y, связка — знаком $=$, неопределенный элемент X-*ы* эквивалентен выражению *Некоторые* X-*ы*. То, что слово *Некоторые* выражается в подлежащем, а не в сказуемом предложения — это просто условность языка. Термин *Некоторые* X-*ы* будет выражаться через vx, где v — это элективный символ, соответствующий классу V, некоторые члены которого являются X-ами и который в остальном произволен. Таким образом, пропозиция A будет выражена уравнением

$$y = vx. \tag{4}$$

E. В пропозиции *Ни один* Y *не есть* X кажется, что отрицательная частица относится к субъекту, а не к предикату, к которому она явно относится[2]. Мы собираемся говорить не что те вещи, которые не являются Y-ами, являются X-ами, а что вещи, которые являются Y-ами, не являются X-ами. Отсюда класс

[2]Существует два способа понимания пропозиции *Ни один* X *не есть* Y. Во-первых, в смысле *Все* X-*ы суть не*-Y-*и*. Во-вторых, в том смысле, что неверно, что любые X-ы суть Y-и, то есть пропозиция *Некоторые* X-*ы суть* Y-*и* ложна. Первое — это единичная категорическая пропозиция. Второе — это *утверждение о пропозиции*, и его выражение относится к другой части элективной системы. Мне кажется, что последнее значение принимается теми, кто относит отрицание, *не*, к связке. Отнести ее к предикату — это не бесполезное уточнение, а необходимый шаг для того, чтобы сделать пропозицию действительно отношением между классами. Я полагаю, что в ходе демонстрации аристотелевских правила распределения станет ясно, что мы делаем этот шаг.

Перестановка отрицания — очень распространенная черта языка. Привычка делает нас почти нечувствительными к ней в нашем собственном языке, но, когда в другом языке тот же принцип проявляется по-другому, как в греческом οὐ φημὶ вместо φημὶ οὐ, он привлекает внимание.

не-X выражается как $1 - x$, и, следовательно, пропозиция *Ни один* Y *не есть* X или, скорее, *Все* Y*-и не суть* X*-ы*, будет выражаться как

$$y = x(1 - x). \tag{5}$$

I. В пропозиции *Некоторые* Y*-и суть* X*-ы* или *Некоторые* Y*-и суть Некоторые* X*-ы*, мы могли бы рассматривать *Некоторые* в субъекте и *Некоторые* в предикате как имеющие отношение к одному и тому же произвольному классу V и записать ее как

$$vy = vx,$$

но воздержаться от этого означает следовать более слабому предположению. Таким образом, его следует записать как

$$vy = v'x, \tag{6}$$

где v' обозначает другой произвольный класс V$'$.

O. Аналогично, пропозиция *Некоторые* Y*-и суть не-*X*-ы* будет выражена уравнением

$$vy = v'(1 - x). \tag{7}$$

Теперь видно, что формы, в которых четыре категорических пропозиции A, E, I, O представлены с помощью элективных символов, аналогичны формам чистого языка, то есть формам, которые приняла бы человеческая речь, если бы ее правила полностью построены на научной основе. В подавляющем большинстве пропозиций, которые могут быть постигнуты разумом, законы выражения не были изменены употреблением, и там аналогия становится более очевидной; например, интерпретация уравнения

$$z = x(1 - y) + y(1 - x),$$

состоит в том, что класс Z состоит из всех X-ов, которые не являются Y-ами, и всех Y-ов, которые не суть X-ы.

Основные теоремы для элективных функций

Мы пришли к тому, что теперь имеем класс символов x, y, z и т. д., подчиненных определенным законам и применимых к строгому выражению любой категорической пропозиции. Следующим нашим делом будет продемонстрировать несколько общих теорем нашего исчисления, основанных на этих законах, и эти теоремы мы впоследствии применим для обсуждения конкретных примеров.

Из всех основных теорем я покажу только два их вида: те, которые относятся к построению функций, и те, которые относятся к решению уравнений.

Теоремы построения

(1) Если x есть любой элективный символ, тогда

$$\phi(x) = \phi(1)x + \phi(0)(1 - x), \tag{8}$$

коэффициенты $\phi(1)$ и $\phi(0)$ есть квантитативы, т. е. количественные или простые алгебраические функции, которые называются модулями, а x и $1 - x$ конституентами.

(2) Для функций двух элективных символов имеем

$$\phi(xy) = \phi(11)xy + \phi(10)x(1 - y) + \phi(01)(1 - x)y + \phi(00)(1 - x)(1 - y), \tag{9}$$

где $\phi(11), \phi(10)$ и т. д. — квантитативы и называются модулями, а $xy, x(1 - y)$ и т. д. — конституентами.

(3) Функции для трех символов:

$$\begin{aligned} \phi(xyz) = \phi(111)xyz &+ \phi(110)xy(1 - z) \\ &+ \phi(101)x(1 - y)z + \phi(100)x(1 - y)(1 - z) \\ &+ \phi(011)(1 - x)yz + \phi(010)(1 - x)y(1 - z) \\ &+ \phi(001)xy(1 - z) + \phi(000)(1 - x)(1 - y)(1 - z), \end{aligned} \tag{10}$$

где $\phi(111), \phi(110)$ и т. д. — модули, а $xyz, xy(1 - z)$ и т. д. — конституенты.

На этих примерах общий закон построения становится очевиден. И я желал бы, чтобы читатель заметил, что этот закон есть простое следствие основных законов, сформулированных в (1), (2), (3).

Теорема. *Если мы имеем какое-либо уравнение $\phi(xyz \ldots) = 0$ и если в нем полностью разложить его первый член, тогда каждая конституента, модуль которой не обращается в нуль, может быть приравнена к 0.*

Это позволяет нам интерпретировать любое уравнение по общему правилу.

Правило. *Перевести все члены уравнения в его левую часть, разложить ее относительно всех встретившихся в ней элективных символов и приравнять к 0 все образовавшиеся конституенты, модуль которых не обращается в нуль.*

Желающих видеть демонстрацию этих и многих других результатов я вынужден отослать к оригинальной работе. Следует отметить, что на стр. 66 w был по ошибке заменен на z и ссылка на стр. 80 должна отсылать к предложению 2.

Как пример возьмем следующее уравнение

$$x + 2y - 3xy = 0. \tag{11}$$

Здесь $\phi(xy) = x + 2y - 3xy$, отсюда значения его модулей равны

$$\phi(11) = 0, \qquad \phi(10) = 1, \qquad \phi(01) = 2, \qquad \phi(00) = 0,$$

так что разложение (9) дает

$$x(1-y) + 2y(1-x) = 0,$$

которое фактически есть только другая форма (11). Тогда по Правилу имеем

$$x(1-y) = 0, \tag{11}$$
$$y(1-x) = 0; \tag{12}$$

первое означает, что нет X-ов, которые не являются Y-ами, второе, что нет Y-ов, которые не являются X-ами, а вместе они выражают полное значение исходного уравнения.

Тем не менее, во многих случаях для упрощения мы можем рекомбинировать конституенты уравнения. В данном случае, вычитая (12) из (11), мы получаем $x - y = 0$ или $x = y$, то есть класс X идентичен классу Y. Полученная пропозиция эквивалентна двум предыдущим.

Таким образом, все данные уравнения имеют одинаковое значение, которые в результате преобразований дают один и тот же ряд конституент уравнений, и *все они интерпрепретируемы.*

Общее решение элективных уравнений

(1) Общее решение уравнения $\phi(xy) = 0$, в котором задействованы только два элективных символа, где y — тот, значение которого необходимо найти, есть

$$y = \frac{\phi(10)}{\phi(10) - \phi(11)} x + \frac{\phi(00)}{\phi(00) - \phi(01)} (1-x). \tag{13}$$

Коэффициенты

$$\frac{\phi(10)}{\phi(10) - \phi(11)}, \qquad \frac{\phi(00)}{\phi(00) - \phi(01)}$$

будут модулями.

(2) Общее решение уравнения $\phi(xyz) = 0$, где z — символ, значение которого нужно определить, есть

$$\begin{aligned} z = {} & \frac{\phi(110)}{\phi(110) - \phi(111)} xy + \frac{\phi(100)}{\phi(100) - \phi(101)} x(1-y) \\ & + \frac{\phi(010)}{\phi(010) - \phi(011)} (1-x)y + \frac{\phi(000)}{\phi(000) - \phi(001)} (1-x)(1-y), \end{aligned} \tag{14}$$

коэффициенты которого мы также будем называть модулями. Легко обнаружить закон их образования, так что основные теоремы, которые были даны для решения элективных уравнений от двух и трех символов, могут рассматриваться как примеры более общей теоремы, применимой ко всем элективным уравнениям. При применении этих результатов следует иметь в виду, что, если модуль принимает вид $\frac{0}{0}$, он должен быть заменен произвольным элективным символом w, а если модуль принимает любое числовое значение, кроме 0 или 1, конституента, чьим делителем он является, должна быть отдельно приравнена к 0. Хотя эти условия выводятся исключительно из законов, которым подчиняются символы, и без какого-либо указания на их интерпретацию, они, тем не менее, делают решение каждого уравнения логически интерпретируемым. К таким формулам *можно отнести* и *любой вопрос об отношениях классов*. Достаточно одной или двух очень простых иллюстраций.

(1) Пусть дано $yx = yz + x(1-z)$. (a)

Y-и, которые являются X-ами, состоят из Y-ов, которые являются Z-ами, и X-ов, которые не являются Z-ами. Требуется найти класс Z.

Здесь $\phi(xyz) = yx - yz - x(1-z)$,

$$\phi(111) = 0, \qquad \phi(110) = 0, \qquad \phi(101) = 0,$$

$$\phi(100) = -1, \qquad \phi(011) = -1, \qquad \phi(010) = 0,$$

$$\phi(001) = 0, \qquad \phi(000) = 0;$$

подставляя в (14), получаем

$$\begin{aligned} z &= \frac{0}{0}xy + x(1-y) + \frac{0}{0}(1-x)(1-y) \\ &= x(1-y) + wxy + w'(1-x)(1-y). \end{aligned} \tag{15}$$

Следовательно, класс Z включает в себя всех X-ы, которые не являются Y-ами, неопределенное число X-ов, которые являются Y-ами, и неопределенное число индивидов, которые не являются ни X-ами, ни Y-ами. Классы w и w' совершенно произвольны, поэтому таков же и неопределенный остаток; он может обращаться или не обращаться в нуль[3].

[3]Этот вывод можно проиллюстрировать и проверить, рассмотрев следующий пример.

Пусть x обозначает все пароходы, или паровые суда,
y обозначают все вооруженные суда,
z обозначают все суда Средиземного моря.

Уравнение (a) тогда выражает, что *вооруженные пароходы состоят из вооруженных судов Средиземноморья и пароходов не из Средиземноморья.* Из этого следует,

(1) Что в Средиземном море нет вооруженных судов, кроме пароходов.

Поскольку $1-z$ представляет собой класс не-Z и удовлетворяет индексному закону

$$(1-z)^n = 1-z,$$

как нетрудно проверить, — можно при желании определить значение этого элемента точно так же, как мы определяем значение z.

Для иллюстрации этого принципа возьмем уравнение $y = vx$ (*Все* Y-*и суть* X-*ы*) и найдем значение $1-x$, т. е. класс не-X.

Положим $1-x = z$, тогда $y = v(1-z)$, и если мы перепишем его в форме $y - v(1-z) = 0$ и представим первый член как $\phi(vyz)$, где v здесь займет место x в (14), то будем иметь

$$\phi(111) = 1, \qquad \phi(110) = 0, \qquad \phi(101) = 0, \qquad \phi(100) = -1,$$

$$\phi(011) = 1, \qquad \phi(010) = 1, \phi(001) = 0, \qquad \phi(000) = 0;$$

и тогда его решением будет

$$z = \frac{0}{0-1}vy + \frac{-1}{-1-0}v(1-y) + \frac{1}{1-1}(1-v)y + \frac{0}{0-0}(1-v)(1-y),$$

или

$$1-x = v(1-y) + \frac{1}{0}(1-v)y + \frac{0}{0}(1-v)(1-y). \qquad (16)$$

Бесконечный коэффициент второго компонента во втором члене позволяет нам записать

$$y(1-v) = 0, \qquad (17)$$

при замене коэффициента $\frac{0}{0}$ на произвольный элективный символ w имеем

$$1-x = v(1-y) + w(1-v)(1-y),$$

или

$$1-x = \{v + w(1-v)\}(1-y). \qquad (18)$$

В связи с этим результатом следует отметить, что коэффициент $v + w(1-v)$ в левой части члена удовлетворяет условию

$$\{v + w(1-v)\}^n = v + w(1-v),$$

(2) Все невооруженные пароходы находятся в Средиземном море (поскольку пароходы не из Средиземноморья вооружены). Отсюда мы выводим, что *средиземноморские суда состоят из всех невооруженных пароходов; некоторого количества вооруженных пароходов; и некоторого количества невооруженных судов без паровой машины.* Данное заключение, выраженное символически, и есть уравнение (15).

как становится ясно, если возвести его в квадрат. Следовательно, он представляет собой некоторый *класс*. Мы можем заменить его на элективный символ u, тогда имеем

$$1 - x = u(1 - y),$$

интерпретацией которого будет

Все не-X-*ы суть не*-Y-*и*.

Это известное преобразование в логике, которое называется противопоставлением предикату, или обращением с противопоставлением. Но решение, которое мы получили, этим далеко не исчерпывается. Логики упустили из виду тот факт, что, когда мы преобразуем пропозицию *Все* Y-*и являются* (*некоторыми*) X-*ами* в *Все не*-X-*ы являются* (*некоторыми*) *не*-Y-*ами*, между этими двумя (*некоторыми*) существует связь, обусловленная предикатами. Уравнение (18) показывает, что, каким бы ни было условие, ограничивающее X-ы в исходной пропозиции, не-Y-и в преобразованной пропозиции состоят из всех тех, которые подчиняются данному условию, и из произвольного остатка, который не подчиняется к этому условию. Уравнение (17) дополнительно показывает, что нет Y-ов, на которые не распространяется это условие.

Аналогичным образом мы можем привести уравнение $y = v(1 - x)$, *Ни один* Y *не есть* X, к форме $x = v'(1 - y)$, *Ни один* X *не есть* Y, с таким же отношением между v и v'. Если мы решим уравнение $y = vx$, *Все* Y *суть* X, относительно v, мы получим дополнительное отношение $y(1-x) = 0$, *Ни один* Y *не является* X, и аналогично из уравнения $y = v(1 - x)$ (*Никакие* Y *не являются* X), мы получаем $xy = 0$. Эти уравнения, которые также могут быть получены другими способами, я использовал в своей оригинальной работе. Все уравнения, интерпретации которых связаны, сами связаны аналогичным образом посредством решения или построения.

О силлогизме

Ранее дедуцированные формы категорических пропозиций таковы:

$y = vx$,	*Все* Y-*и суть* X-*ы*,
$y = v(1 - x)$,	*Ни один* Y *не есть* X,
$vy = v'x$,	*Некоторые* Y-*и суть* X-*ы*,
$vy = v'(1 - x)$,	*Некоторые* Y-*и суть не*-X-*ы*,

решения первых двух дают $1 - x = v'(1 - y)$. *Ни один не*-X *не есть не*-Y, $x = v'(1 - y)$, *Ни один* X *не есть* Y. К вышеприведенной схеме, принадлежащей Аристотелю, мы можем добавить еще четыре категорических пропозиции,

$1 - y = vx,$	*Ни один не*-Y *не есть* X,
$1 - y = v(1 - x),$	*Все не*-Y-*и суть не*-X-*ы*,
$v(1 - y) = v'x,$	*Некоторые не*-Y-*и суть* X-*ы*,
$v(1 - y) = v'(1 - x),$	*Некоторые не*-Y-*и суть не*-X-*ы*,

из которых первые два обращаются в

$1 - x = v'y,$	*Все не*-X-*ы суть* Y-*и*,
$x = v'y,$	*Все* X-*ы суть* Y-*и*,
или	*Ни один не*-X *не есть* Y.

Если теперь две посылки любого силлогизма выражаются уравнениями приведенных выше форм, исключение общего символа y приведет нас к уравнению, выражающему заключение.

Пример 1. *Все* Y-*и суть* X-*ы*, $\quad y = vx,$
Все Z-*ы суть* Y-*и*, $\quad z = v'y,$

интерпретацией которого будет

Все Z-*ы суть* X-*ы*,

исключение y дает

$$z = vv'x,$$

интерпретацией которого будет

Все Z-*ы суть* X-*ы*,

форма коэффициента vv' указывает на то, что предикат заключения ограничен обоими условиями, которые по отдельности ограничивают предикаты посылок.

Пример 2. *Все* Y-*и суть* X-*ы*, $\quad y = vx,$
Все Y-*и суть* Z-*ы*, $\quad y = v'z.$

Исключение y дает

$$v'z = vx,$$

которое интерпретируется как *Некоторые* Z-*ы суть* X-*ы*. Всегда необходимо, чтобы один термин заключения имел интерпретацию в уравнениях посылок. В приведенном выше случае таковы оба.

Пример 3. *Все* X-*ы суть* Y-*и*, $\quad x = vy,$
Ни один Z *не есть* Y, $\quad z = v'(1 - y).$

Вместо прямого исключения y преобразуем оба уравнения путем решения, как и в (19). Первое дает

$$1 - y = u(1 - x),$$

где u эквивалентно $v + w(1 - v)$, в котором w произвольно. Исключая $1 - y$ между этим и вторым уравнением системы, мы получаем

$$z = v'u(1 - x),$$

интерпретацией которого будет

Ни один Z *не есть* X.

Если бы мы напрямую исключили y, то получили бы

$$vz = v'(v - x),$$

приведенное решение которого —

$$z = v'\{v + (1 - v)\}(1 - x),$$

в котором w — произвольный элективный символ. Это в точности совпадает с первым результатом.

Этих примеров должно быть достаточно, чтобы проиллюстрировать использование данного метода для конкретных случаев. Но наиболее важной его особенностью здесь, как и в других случаях, является применимость к доказательству общих теорем. Я добавлю к этому результаты недавнего исследования законов силлогизма. Хотя они достаточно просты и в них трудно разглядеть источник их математического происхождения, я полагаю, что было бы очень трудно прийти к ним путем изучения и сравнения частных случаев.

Законы силлогизма, выведенные из элективного исчисления

Мы будем рассматривать все пропозиции, которые могут быть сделаны для классов X, Y, Z и относиться к любой из форм из следующей системы:

A,	*Все* X-*ы суть* Z-*ы*	A′,	*Все не*-X-*ы суть* Z-*ы*
E,	*Ни один* X *не есть* Z	E′,	*Ни один не*-X *не есть* Z, или (*Все не*-X-*ы суть не*-Z-*ы.*)
I,	*Некоторые* X-*ы суть* Z-*ы*	I′,	*Некоторые не*-X *суть* Z
O,	*Некоторые* X-*ы суть не*-Z-*ы*	O′,	*Некоторые не*-X-*ы суть не*-Z-*ы*

Следует отметить, что количество (общее и частное) и качество (утвердительное и отрицательное) понимаются как принадлежащие к *терминам* пропозиций, что действительно является правильным взглядом[4].

[4] Когда говорят, что на *пропозиции* оказывают влияние количество и качество, в действительности имеют в виду качество *предиката*, которое выражает *природу* утверждения, и количество *субъекта*, которое показывает его объем.

Таким образом, в предложении *Все* X-*ы суть* Y-*и* субъект *Все* X-*ы* общеутвердительный, предикат (*некоторые*) Y-*и* частноутвердительный.

В пропозиции *Некоторые* X-*ы суть* Z-*ы* оба термина являются частноутвердительными.

Пропозиция *Ни один* X *не есть* Z на философском языке была бы записана в форме *Все* X-*ы не суть* Z-*ы*. Субъект здесь общеутвердительный, предикат частноотрицательный.

В пропозиции *Некоторые* X-*ы суть не*-Z-*ы* субъект является частноутвердительным, предикат — частноотрицательным. В пропозиции *Все не*-X-*ы суть* Y-*и* субъект общеотрицательный, предикат частноутвердительный, и т. д.

В паре посылок четыре термина, а именно два субъекта и два предиката. Два из этих терминов, а именно те, которые включают Y или же не-Y, могут быть названы средними терминами, два других — крайними, один из которых включает X или же не-X, другой — Z или же не-Z.

Далее следуют условия и правила вывода.

Случай 1-й. Средний термин имеет одно и то же качество.

Условие вывода. Один средний термин общий.

Правило. Приравняйте друг к другу крайние термины.

Случай 2-й. Средние термины имеют противоположное качество.

1-й. Условие вывода. Один крайний термин общий.

Правило. Измените количество и качество этого крайнего термина и приравняйте результат к другому крайнему термину.

2-й. Условие вывода. Два общих средних термина.

Правило. Измените количество и качество любого крайнего термина и приравняйте результат к другому крайнему термину.

Добавлю несколько примеров:

1-й *Все* Y-*и суть* X-*ы*.
Все Z-*ы суть* Y-*и*.

Это относится к случаю 1. *Все* Y-*и* — общий средний термин. Сравнение крайних терминов дает *Все* Z-*ы суть* X-*ы*, сильнейший термин становится субъектом.

$$\text{2-й}\quad \left.\begin{array}{r}\textit{Все}\ \mathrm{X}\ \textit{суть}\ \mathrm{Y}\\ \textit{Ни один}\ \mathrm{Z}\ \textit{не есть}\ \mathrm{Y}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\textit{Все}\ \mathrm{X}\text{-}\textit{и суть}\ \mathrm{Y}\text{-}\textit{и}\\ \textit{Ни один}\ \mathrm{Z}\ \textit{не есть не}\text{-}\mathrm{Y}\end{array}\right.$$ [vii]

Это относится к случаю 2 и удовлетворяет первому условию. Средний термин в первой посылке является частноутвердительным, а во второй — частноотрицательным. Принимая *Все*-Z-*ы* как общий термин, мы при изменении его количества

[vii] В последнем случае, очевидно, опечатка: «No Zs are not-Ys», имеется в виду «All Zs are not-Ys», т. е. *Все* Z-*ы суть не*-Y-*и*.

и качества имеем *некоторые не*-Z-*ы*, и приравнивание к другому крайнему термину дает

Все X-*ы суть* (*некоторые*) *не*-Z-*ы* = *Ни один* X *не есть* Z.

Если мы возьмем *Все* X-*ы* как общий крайний термин, получаем

Ни один Z *не есть* X.

3-й *Все* X-*ы суть* Y-*и*.
Некоторые Z-*ы суть не*-Y*и*.

Это также относится к случаю 2 и удовлетворяет первому условию. Общий крайний термин *Все* X-*ы* преобразуется в *некоторые не*-X-*ы*, откуда

Некоторые Z-*ы суть не*-X-*ы*.

4-й *Все* Y-*и суть* X-*ы*.
Все не-Y-*и суть* Z-*ы*.

Это случай 2, удовлетворяющий второму условию. Крайний термин *Некоторые* X-*ы* преобразуется во *Все не*-X-*ы*,

$\therefore$ *Все не*-X-*ы суть* Z-*ы*.

Другой крайний термин, рассматриваемый таким же образом, дает

Все не-Z-*ы суть* X-*ы*,

что является эквивалентным результатом.

Если мы ограничимся аристотелевскими посылками A, E, I, O, второе условие вывода в случае 2 не понадобится. Заключение не обязательно будет ограничиваться аристотелевской системой.

$$\text{Пример}\quad \left.\begin{array}{l}\textit{Некоторые } \text{Y-}\textit{и суть не-}\text{X-}\textit{ы}\\ \textit{Ни один } \text{Z } \textit{не есть } \text{Y}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\textit{Некоторые } \text{Y-}\textit{и суть не-}\text{X-}\textit{ы}\\ \textit{Все } \text{Z-}\textit{ы суть не-}\text{Y-}\textit{и}\end{array}\right.$$

Это случай 2, удовлетворяющий первому условию. В результате

Некоторые не-Z-*ы суть не*-X-*ы*.

Мне кажется, что это основные законы силлогистического вывода. Они применимы к каждому случаю и полностью отменяют различие в фигурах, необходимость обращения, произвольные и частичные[5] правила распределения и т. д. Если бы всю логику можно было свести к силлогизму, они могли бы претендовать на то, чтобы их рассматривать как правила логики. Но логика, рассматриваемая как

[5]Частичные, так как они относятся только к количеству X, даже когда в пропозиции фигурирует не-X. Можно было бы построить точный аналог аристотелевских правил силлогизма, указывая количество только для не-X. Система в тексте *симметрична*, поскольку она полна.

наука об отношениях классов, оказалась гораздо более обширной областью. Силлогистический вывод в элективной системе соответствует элиминации терминов. Но это не самый высокий порядок логических процессов. В данной системе все вопросы элиминации можно рассматривать как вспомогательные по отношению к более общей проблеме решения элективных уравнений. К этой проблеме могут быть отнесены все без исключения вопросы логики и рассуждения. Однако желающих ознакомиться с более полными иллюстрациями этого принципа я должен отослать к своей оригинальной работе. Там же обсуждаются теория гипотетических пропозиций, анализ положительных и отрицательных элементов, в которых все пропозиции конечно разрешимы, и другие подобные темы.

Несомненно, что конечной целью спекулятивной логики является установление условий, обеспечивающих возможность процесса рассуждения, и законов, определяющих его характер и выражение. Общая аксиома (A) и законы (1), (2), (3), по всей видимости, дают наиболее обоснованное решение данного вопроса в настоящее время. Когда мы переходим к рассмотрению гипотетических пропозиций, одни и те же законы и та же общая аксиома, которую следует, пожалуй, также рассматривать как закон, остаются основополагающими; отличие состоит только в том, что объектом мышления являются уже не классы объектов, но случаи сосуществования истинности или ложности пропозиций. Отношения, которые логики обозначают терминами «условное», «дизъюнктивное» и так далее, Кант рассматривает как отдельные условия мышления (различные виды мысли)[viii]. Однако в высшей степени примечательным фактом является то, что выражение всех этих отношений можно дедуктивно вывести одно из другого путем простого аналитического процесса. Из уравнения $y = vx$, выражающего *условную* пропозицию «Если пропозиция Y истинна, то пропозиция X истинна», мы можем вывести уравнение

$$yx + (1 - y)x + (1 - y)(1 - x) = 1,$$

которое выражает *дизъюнктивную* пропозицию «Либо Y и X вместе истинны, либо X истинно и Y ложно, либо они оба являются ложными» и опять-таки уравнение $(1 - x) = 0$, которое выражает отношение сосуществования, а именно что истина Y и ложность X не сосуществуют. Я полагаю, что именно различие в мышлении между утвердительным и отрицательным более всего заслуживает считаться фундаментальным. Из них мы выводим прямое и обратное в операциях, истину и ложь в пропозициях и противоположность по качеству в их терминах.

Данное исследование представляет большой интерес с точки зрения изучения природы языка. Они показывают, что язык — это не просто совокупность знаков,

[viii] По Канту, основополагающим действием мышления является суждение. Он выделяет 12 основных форм суждений в соответствии с основными логическими функциями мышления. В результате предметного истолкование этих логических функций Кант выводит 12 априорных чистых понятий рассудка — категорий. Данный вывод известный как метафизическая дедукция категорий, хотя сам Кант называет его «путеводной нитью к открытию априорных понятий рассудка».

но система выражений, элементы которой подчиняются законам мышления, которые они выражают. Эти законы так же математически точны, как и законы, в которых определяются количественные представления о пространстве и времени, о числе и величине. Этот вывод я без колебаний представляю для самого строгого обсуждения.