ЛОГИКА СЕГОДНЯ

Илья Егорычев[1]

ПРОСТРАНСТВО МЫШЛЕНИЯ: КАТЕГОРНАЯ СТРУКТУРА И АКСИОМА СКЛЕЙКИ

Аннотация. В статье предпринимается попытка исследования логической модели пространства мышления формальными теоретико-категориальными средствими. Концепт пространства мышления был в свое время разработан современным отечественным психологом А. В. Курпатовым. По мнению автора статьи, в качестве модели пространства мышления при соблюдении ряда методологических допущений может быть использована категория полных гейтингозначных множеств, которая затем может быть положена в основу ряда перспективных разработок AGI.
Ключевые слова: топос, гейтингозначное множество, пространство мышления, интеллектуальный объект, общая точка, аксиома склейки.

Ilya Egorychev

SPACE OF THOUGHT: CATEGORIAL STRUCTURE AND THE GLUING AXIOM

Abstract. The present article attempts to investigate a logical model of the space of thought by the formal means of category theory. The concept of the space of thought was elaborated by the modern Russian psychologist Andrey Kurpatov. According to the present author, it would be appropriate to use the category of complete Heyting-valued sets as a model of space of thought, provided that certain methodological assumptions are accepted. The same model could be used in an array of approaches in the area of perspective AGI developements.
Keywords: topos, Heyting-valued set, space of thought, intellectual object, generic point, gluing axiom.

Для цитирования: *Егорычев И. Э.* Пространство мышления: категорная структура и аксиома склейки // Логико-философские штудии. 2020. Т. 18, № 4. С. 292–314. doi: 10.52119/LPHS.2021.98.94.001.

[1] *Егорычев Илья Эдуардович* — доктор философских наук.
Ilya Egorychev, Doctor of Science.

Введение

Что мы имеем в виду, когда говорим, что «мир мыслим» или что «миру присуща некая логика»? Это может означать, что существует *метод*, следуя которому субъект опыта способен в ситуации некоторой неопределенности доопределить ее до такого состояния, что у него появятся основания перейти от одного положения дел к другому. То есть, другими словами, мир таков, что в нем возможно *принятие рационального решения*. Но, прежде чем предпринять то или иное действие в мире как таковом, человеку нужно создать модель ситуации и «прокрутить» в ней, так сказать, вероятные исходы тех или иных своих действий. Как выразился однажды сэр Карл Поппер, мы позволяем нашим гипотезам гибнуть вместо нас. И это важное отличие организации нашего *пространства мышления* от таких же пространств других живых существ.

Эволюционное преимущество человека, скажем, перед собакой состоит еще и в следующем: если сбитое автомобилем животное способно, если так можно выразиться, «выдвинуть гипотезу» лишь о том, что с ней может случиться в будущем на том же самом перекрестке, мы с вами, потенциально оснащенные гигантским количеством «инструментов мышления», которые мы можем импортировать из общего культурно-исторического пространства, действительно не имеем никаких видимых пределов при «производстве будущего».

Используемая здесь пространственная метафора нам представляется весьма удачной, поскольку такая «геометризация», или, точнее даже сказать, «топологизация» мышления дает возможность максимально строго формализовать этот «ускользающий» объект исследования, в частности используя успешно применяющийся в логике аппатат теории категорий (MacLane, Moerdijk 1992; Goldblatt 2006 и др.).

Поводом для написания данной статьи во многом также послужило знакомство с методологией мышления, развиваемой современным отечественным врачом-психотерапевтом, философом и публицистом А. В. Курпатовым, в центре которой лежит концепция «мира интеллектуальной функции», который в ряде своих работ он также весьма продуктивно уподобляет пространству.

В частности, в работе «Пространство мышления. Соображения» одной из центральных идей является следующая: традиционно способность человека к абстрактному мышлению считается одним из высших его эволюционных завоеваний, но эта же способность одновременно означает и то, что человеку не составляет особого труда вообразить себе и помыслить в буквальном смысле все что угодно. Эту особенность человеческого рассудка А. В. Курпатов описывает как то, что в мире интеллектуальной функции, которому мы все — мыслящие существа — принадлежим, нет никаких естественных ограничителей. Однако «в интересах реальности» могут встать и высказаться другие люди. Автор методологии мышления проводит очень удачную, на наш взгляд, аналогию с двумя типами компьютерных игр:

с так называемыми «стратегиями», где игрок может выстраивать свою игру так, как ему заблагорассудится (если не учитывать ограничения, определенные самой программой), и многопользовательскими сетевыми играми, где игрок находится в онлайн-соперничестве с другими игроками и где каждый представлен в пространстве игры своим аватаром. В последнем случае игрок уже не может действовать всецело по своему усмотрению — ему придется учитывать и то, что делают в тот или иной момент его соперники. Казалось бы, в том и в другом случае мы имеем дело с интерфейсом (с миром интеллкутуальной функции). Но в одном случае мы можем делать все, что нам вздумается, а в другом мы оказываемся *втянутыми в отношения* и уже не можем поступать всецело по своему усмотрению — через мир интеллектуальной функции, если он все-таки нам сопротивляется, нам сопротивляются другие люди (Курпатов 2019: 309–311).

Другими словами, есть принципиальная разница между «сопротивляющимися» нам в реальности «законами природы», или так называемыми естественными содержательными ограничениями, и сопротивлением других людей. Даже если вынести за скобки тот факт, что пресловутым «законам природы» нас обучили все те же другие люди, фундаментальное отличие первых от вторых состоит в некоей априорной понятности первых (презумпция понятности): даже если мы и говорим о вероятностном или случайном характере каких-то природных процессов, этот люфт как бы уже всегда заложен нами в их понимание. Другими словами, даже если нам и неизвестны точные закономерности, по которым «работает Вселенная», нам каким-то непостижимым образом «известно», что они, тем не менее, есть: да, мы не ходим сквозь стены, вполне можем обжечься о кухонную плиту или съесть столько шоколада, что нам станет от него дурно, из чего мы вполне автономно способны прийти к заключению (которое, скорее всего, даже и не понадобится — тело само сделает все за нас), что больше так, наверное, делать не стоит. Но все эти самостоятельные ожоги, удары лбом о стену и дурнота от шоколада не создали бы в нас и сотой доли того, что все эти и подобные им ситуации способны породить в пространстве наших с вами представлений благодаря нашей включенности в отношения с другими людьми.

Таким образом, ближайшая наша цель — это попытаться построить модель мышления, используя теоретико-категориальную структуру топоса как обобщенного пространства дискурса, а также предложить формальные инструменты, с помощью которых данный аспект сопротивления со стороны других людей, а также возможные трансформации, которые могут, а иногда и с необходимостью будут, происходить в пространстве мышления субъекта и в его системе суждений и оценок в результате такого сопротивления, могли бы адекватно отслеживаться в соответствующей модели.

I

Мир субъекта опыта безусловно имеет свою динамику: его объекты постоянно модифицируются, изменяя тем самым свое значение на шкале Ω, которую в общем случае мы будем мыслить как гейтингову алгебру, и посредством которой задается так называемая «внутренняя логика топоса», или в нашем случае — внутренняя логика пространства мышления.

Поэтому, строго говоря, пространство мышления есть сумма всех таких модификаций. Это означает, что изменение, с одной стороны, уже предусмотрено той самой логикой, которая имманентна пространству мышления, но, с другой стороны, ее же структурой и ограничивается — другими словами, от устройства Ω сущностно зависят *границы мыслимого*. Таким образом, мы можем свидетельствовать о значительных преобразованиях, происходящих с каким-то элементом, без того, чтобы эти преобразования оказали хоть какое-то влияние на саму Ω. В наиболее явном виде совокупность всех подобных изменений, или множество всех мыслимых субъектом отношений, может быть проиллюстрировано с помощью такой категорной конструкции, как *гипердоктрина*. Гипердоктриной h называют функтор, ставящий в соответствие каждому объекту некоторой категории T (в данном, откровенно логическом контексте категорию, из которой действует h, рассматривают как *теорию*, объекты которой называют *типами*) специального вида категорию $P(X)$, которая в самом простом случае может представлять из себя множество подобъектов объекта X. Множество подобъектов, или множество частей некоторого объекта X, невозможно построить, не указав тех или иных свойств (атрибутов), наличие которых требуется для определения принадлежности какой-либо вещи той или иной его части (в аксиоматической теории множеств за это отвечает аксиома выделения). Поэтому неудивительно, что категорию $P(X)$ называют в таком случае *категорией атрибутов* типа X, а морфизмы атрибутов оказывается вполне естественно интерпретировать как дедукции, или логические следования. Поскольку h — функтор, назначение его по определению должно являться категорией, и в нашем случае это так называемая 2-категория, объектами которой являются категории, а стрелками — функторы между этими категориями. В частности, каждому морфизму (в теории такой морфизм принято называть *термом*) $f : X \to Y$ теории T h ставит в соответствие функтор подстановки $s_f : P(Y) \to P(X)$, который как раз и соответствует всем мыслимым изменениям, или (по)следствиям. Более того, как заметил в свое время Уильям Ловер, данный функтор индуцирует как левый, так и правый сопряженный, которым соответствуют логические же кванторы существования и всеобщности, которые также являются морфизмами атрибутов в рассматриваемой 2-категории. Таким образом, гипердоктрина как бы наращивает над исходной категорией некоторое нетривиальное пространство рационального дискурса, которое как раз и есть мир, понятный как сумма всех своих модификаций. (Подробно см. Егорычев 2018:

40–47.) Тем самым сколько-нибудь фундаментальные изменения, являющиеся не просто следствиями данной феноменологической структуры, но, напротив, исключениями — сингулярностями, радикально трансформирующими саму структуру субъекта, рискуют оказаться попросту незамеченными. И наша цель — исследовать условия и возможные формы существования таких исключений. И если нам удастся найти некоторый формализованный способ воздействия на Ω, который бы соответствовал в реальности встрече субъекта опыта с Другим, т. е. с чем-то травмирующим и/или впечатляющим настолько, что это приводило бы к системной перестройке всех экзистенциальных оценок, то мы получим в наше распоряжение алгоритмическую процедуру, существенно расширяющую возможности нашей модели.

Возможный ход мог бы состоять в том, чтобы более внимательно рассмотреть «пародоксальные» множества, являющиеся элементами самих себя. Прямым следствием аксиомы регулярности является запрет на подобные конструкции, но аксиома регулярности — это всего лишь одно из условий возможности построения непротиворечивой аксиоматической теории *множеств*, а мы сейчас работаем, вообще говоря, внутри совершенно иной теории — теории категорий. Поэтому теперь успешное продолжение нашего анализа будет целиком зависеть от экзистенциальной интерпретации объектов вида $A \in A$.

Вся аналитика будет строиться нами на основании понятия *объекта* $\mathbf{A} = (A, Exp_A)$, в котором множество A играет роль «носителя» — своего рода «материи» интеллектуального объекта, но само множество как элемент в себе не содержится. Сейчас мы хотим пополнить гейтингозначное множество A «парадоксальным», с точки зрения аксиоматической теории множеств, элементом A, как бы подчеркивая тем самым, во-первых, что данный объект не является ординарным — это такая «вещь» мира субъекта, опыт встречи с которой не укладывается в привычную для него «логику вещей». А во-вторых, субъект получает возможность приписать этой вещи меру ее неординарности $Ess_A(A, A)$ (подробно см. Егорычев 2020). Соответственно, по-настоящему затрагивающим существо субъекта опыта будет только такой интеллектуальный объект A, для которого $Exp_A(A, A) = Ess_A A = \mathbf{1}$. (Единица здесь — это наибольший элемент гейтинговой шкалы Ω. Его, в зависимости от контекста, мы будем обозначать как M, $\top$ или «истина» (true). Минимальный элемент этой же шкалы принято обозначать нулем, μ, $\perp$, или «ложь» (false).)

Но и это еще не все. Вводимый нами формальный аппарат дает возможность говорить также и о масштабе (по)следствий, производимых таким присоединенным парадоксальным элементом A. Хотя для этого нам вновь придется ненадолго вернуться к анализу логических выразительных ресурсов гейтинговой алгебры Ω. В свое время для прояснения интуиционистской интерпретации логического отрицания Аренд Гейтинг воспользовался таким элементом частично упорядоченных структур, как псевдодополнение (*pseudocomplement*). Напомним, что псевдодополнение строится путем естественного ослабления свойств обычного дополнения. Если мы в множестве X выделим некоторую его часть A, то оставшуюся часть X естественно назвать дополнением A до X, или не-A. Очевидно, что если при этом объединить A и не-A, то мы получим снова X, и также понятно, что пересечение A и не-A пусто. Очевидно, что то же останется верным и для любого подмножества A. Псевдодополнение является ослаблением этих свойств в том смысле, что в качестве его определения берется только последнее свойство, которое, будучи перенесенным на множество L со структурой частичного порядка, выглядит следующим образом: псевдодополнение элемента $a \in L$ — это наибольший элемент из множества всех таких $b \in L$, что $a \wedge b = \emptyset$. Объединение такого элемента с a, как того и хотели интуиционисты, далеко не всегда возвращает нам максимальный элемент $\mathbf{1}$ из L. Теперь, если требование пустого пересечения ослабить еще больше до, скажем, наибольшего элемента из множества всех таких $b \in L$, что $a \wedge b \leq c$, то мы получим определение так называемого относительного псевдодополнения (в этом смысле абсолютное псевдодополнение есть псевдодополнение относительно $\mathbf{0}$ — минимального элемента частично упорядоченного множества), которое в точности совпадает с интуиционистким же понятием импликации, или искомого нами «следствия», то есть

$$p \Rightarrow q = \bigcup_{s \in L} \{s : p \cap s \leq q\}$$

Это означает буквально следующее: «элемент q следует из p в степени s», или в интерпретации мира интеллектуальной функции — субъект ожидает со степенью уверенности s, что q произойдет или произошло *по причине* p. И тогда у нас появляется способ сказать, что элемент $a \in A$ сущностно воздействует на некоторый элемент $b \in A$ в том и только в том случае, если $Ess_A a \Rightarrow Ess_A b = \mathbf{1}$, где $\mathbf{1} \in \Omega$ — это максимальное значение шкалы Ω.

Однако мы тут же сталкиваемся с некоторой проблемой. Дело в том, что можно строго показать[2], что имеет место следующее тождество:

$$p \Rightarrow q = \mathbf{1} \Leftrightarrow p \leq q \tag{1}$$

Другими словами, некий ординарный факт a может действивать абсолютно только на такие элементы b, веса которых превосходят его собственный[3]. Соответственно, если мы с самого начала требуем, чтобы $Ess_A A = \mathbf{1}$, то объект A может быть абсолютной причиной только таких модификаций, сущность которых также абсолютна. Значит, нам необходимо аксиоматически потребовать, чтобы сила воздействия присоединенного интеллектуального объекта была таковой (здесь,

[2] Badiou 2009: 171–172.

[3] Это становится совсем отчетливо видно, если мы отношение частичного порядка проинтерпретируем как отношение включения множеств: импликация «Если Сократ человек, то он смертен» истинна только в том случае, если люди являются подмножеством смертных существ.

возможно, снова удачнее было бы сказать даже не «сила воздействия», а «*тяжесть*»), чтобы он буквально «потрясал самые основы», т. е. воздейстовал максимально на несуществующее объекта A, или $\emptyset_A$. Несуществующим объекта мы договоримся называть такой элемент полного гейтингозначного множества A, что $\forall x \in A : \mathrm{Exp}_A(x, \emptyset_A) = \mathbf{0}$. В частности, $\mathrm{Ess}_A(\emptyset_A) = \mathbf{0}$.

Таким образом, *сингулярным*, или *исключительным*, *интеллектуальным объектом* мы будем называть полное гейтингозначное множество $\mathbf{A} = (A, Exp_A)$, такое, что:

- $A \in A$;
- $Ess_A A = \mathbf{1}$;
- $Ess_A A \Rightarrow Ess_A \emptyset_A = \mathbf{1}$.

Последнее требование чрезвычайно существенно. Поскольку в обычных условиях $\mathrm{Ess}_A(\emptyset_A) = \mathbf{0}$, оно в силу тождества (1) может быть выполнено, только если $Ess_A A = \mathbf{0}$. Но $Ess_A A = \mathbf{1}$ по только что введенному нами определению. Таким образом, чтобы удовлетворить данным условиям, согласно тому же тождеству (1), нам необходимо радикально видоизменить функцию ожидания Exp_A: теперь элементу $\emptyset_A \in A$, соответствовавшему несуществующему данного объекта, эта функция должна приписать максимальное значение, что немедленно превращает его из несуществующего в элемент интеллектуального объекта, сущность которого проявлена максимально: то, что раньше субъектом тотально игнорировалось, теперь приобретает для него максимально возможную значимость.

Но полнота интеллектуального объекта A как гейтингозначного множества *требует*[4] существования в нем его несуществующего — поэтому функция ожидания должна измениться еще раз и, неформально выражаясь, «уничтожить» какой-то элемент $\delta \in A$, сущность которого не была минимальной, и теперь уже в буквальном смысле обнулить ее, приписав ей минимальное значение в Ω. Формальная запись даной транформации, смерти или разрушения δ выглядит следующим образом $(Ess_A \delta = p) \to (Ess_A \delta = \mathbf{0})$. Однако трансформации функции ожидания, скорее всего, не закончатся и на этом. По построению функции Exp, $\forall a \in A : Exp_A(\delta, a) \leq Ess_A \delta$[5]. В случае, когда $Ess_A \delta = p$, это просто означает, что $Exp_A(\delta, a) \leq p$. Но, как только $Ess_A \delta = \mathbf{0}$, $\forall a \in A$ значения $Exp_A(\delta, a)$ не должны превышать нуля, а это значит, что $\forall a \in A : Exp_A(\delta, a) = \mathbf{0}$. Таким образм, становится вполне очевидно, сколь радикальные трансформации претерпевает функция ожидания Exp_A.

Однако не будем забывать, что данная функция действует в Ω и в принципе на произошедшие переоценки правильнее смотреть как на транформации самой

[4] Подробно см. Егорычев 2020.

[5] Данное тождество непосредственно следует из определения функции ожидания — в частности, из второй аксиомы. Действительно, $\forall a, b, c \in A : Exp_A(a, b) \cap Exp_A(b, c) \leq Exp_A(a, c)$. Полагая a и c равными δ, получаем $Exp_A(\delta, b) \leq Ess_A \delta : \forall b \in A$.

Ω. На соответствующей диаграмме это можно было бы изобразить следующим образом:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "Exp_A"'] \arrow[dr, "Exp^*_A"] & \\ \Omega \arrow[rr, "\alpha"'] & & \Omega \end{tikzcd}$$

Иначе говоря, если у нас существуют две различные функции ожидания Exp_A и Exp^*_A, то мы всегда можем выразить Exp^*_A как композицию старой функции ожидания Exp_A и некоторой транформации (автоморфизма) $\alpha : \Omega \to \Omega$, подобранной таким образом, что: $Exp^*_A = \alpha \circ Exp_A$. Указанный автоморфизм α и будет формализовывать ту переоценку ценностей, которая происходит в субъекте опыта Ω в результате его травматического столкновния с Другим (исключительным интеллектуальным объектом A).

В заключение можно добавить, что нам нет необходимости в сохранении парадоксального свойства самопринадлежности множества $A \in A$: как только процедура «возвышения несуществующего» $(Ess_A A \Rightarrow Ess_A \emptyset_A) = \mathbf{1}$ будет завершена, множество A может исчезнуть, оставив в качестве собствнного следа тот самый автоморфизм α, из которого все остальное уже будет следовать автоматически.

II

Дальшейшие наши усилия будут направлены на исследование структуры субъекта опыта Ω на предмет того, позволяет ли устройство его системы оценок устанавливать такие различия в пространстве мышления, что они хотя бы в принципе могли бы быть редуцированы до альтернативы «или—или», т. е. до некоего бинарного выбора.

С формальной точки зрения этому будет соответствовать выявление всех возможных способов отобразить некоторое фиксированное множество Ω, соответствующее устройству различительной способности какого-то конкретного субъекта опыта, в множество, состоящее из нуля и единицы, рассматриваемое, однако, тоже как множество со структурой гейтинговой алгебры (в дальнейшем мы будем обозначать эту структуру как Ω_0).

Множество $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ является стандартной моделью для классического исчисления высказываний, поскольку на нем легко усматривается структура булевой алгебры, которая в то же самое время является и гейтинговой. Учитывая сказанное, нам нужно исследовать далеко не все способы, которыми можно отобразить Ω в Ω_0 (а таких способов существует в точности $2^{|\Omega|}$ штук), а только так называемые *сюръективные гомоморфизмы* этих структур как гейтинговых решеток. Сюръективность означает, что элементы Ω отправляются как в ноль, так и в единицу, т. е. каждый элемент Ω_0 является образом хотя бы одного элемента из Ω. Данное требование, собственно, и обеспечивает наличие выбора: если все элементы Ω мы отправим, скажем, в $\mathbf{1}$, то ни о какой альтернативе, разумеется, речи уже идти не может. Неформально гомоморфность отображения означает сохранение структуры. В данном случае мы хотим, чтобы сохранялась структура решетки, т. е. верхние грани переходили в верхние, а нижние — в нижние. Ниже мы покажем, что отображения, удовлетворяющие таким требованиям, сохраняют порядок, минимальный элемент Ω необходимо будут переводить в ноль, а максимальный — в единицу. И наконец, таких способов не может быть больше, чем число элементов в Ω. Все выявленные таким образом отображения $\phi : \Omega \to \Omega_0$ мы соберем в отдельное множество, обозначив его через $\pi(\Omega)$, и будем называть его множеством *точек*, имея в виду, что каждая «точка» символизирует теперь для нас возможность (а сказать точнее — необходимость) выбора субъекта — место принятия решения.

Мы неслучайно употребили именно это слово — место. Сейчас мы покажем, что множество $\pi(\Omega)$ образует топологическое пространство, внутри которого, таким образом, каждая точка может быть *локализована*.

Чтобы на множестве X задать структуру топологического пространства, нужно определить систему окрестностей. Однако существует и другой способ — сопоставить каждой части X ее так называемую *внутренность* Int[6]. (Собственно, можно сказать, что топологическое пространство и является таким объектом, в котором формализовано различие между понятиями «принадлежать» и «находиться внутри», поскольку в общем случае для $A \subseteq X : \mathrm{Int}(A) \neq A$.)

Как писали в свое время Бурбаки, если исходить из физического понимания приближения, то естественно сказать, что часть A множества A является окрестностью своего элемента a, если при замене последнего на достаточно близкий к нему элемент b данный элемент также будет содержаться в данной окрестности A. Очевидно, что близкими к a элементами будут считаться разные элементы в зависимости от того, какая точность приближения нас интересует. И вот оказывается возможным сформулировать довольно много свойств этой самой близости, никак не касаясь понятия расстояния.

Поэтому, прежде чем формализовать «внутренность» как некоторую операцию, относительно которой замкнута алгебра подмножеств некоторого множества X, попробуем понять, чего мы ожидаем от понятия «внутри» на интуитивном уровне — что, скажем, означает для нас находиться внутри какого-то города или какой-то его части. Очевидно, что внутренность всего города совпадает с самим городом как множеством элементов, ему принадлежащих: когда я говорю, что живу в Петербурге или что я приехал в Петербург, то это значит, что я (по крайней мере на время своего пребывания) являюсь одним из его элементов. Поэтому $\mathrm{Int}(X) = X$.

Ситуация слегка изменится, если мы будем говорить о нахождении внутри

[6]См. https://en.wikipedia.org/wiki/Interior_algebra.

какой-либо части Петербурга: в этом случае нам нужно исключить пребывание на границе, которая может являться общей с другими частями. Формально мы запишем это так: $\forall A \subseteq X : \mathrm{Int}(A) \subseteq A$.

Теперь осталось только понять, что из себя представляет внутренность объединения двух частей, а также внутренность внутренности. Но это кажется совсем простым:

- внутренность объединения частей есть объединение их внутренностей: $\mathrm{Int}(A \cup B) = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$;
- «внутренность внутренности» очевидным образом звучит тавтологично, хотя дотошные математики предусмотрительно запаслись специальным словом именно для такой «продуктивной тавтологии» и операцию, обладающую данным свойством назвали *идемпотентной*[7], т. е. такой, что применение ее более одного раза к некоторому элементу не изменяет результата: $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}(A)) = \mathrm{Int}(A)$.

Собственно, данными четырьмя аксиомами исчерпывается список требований к внутренности как операции, которая в данном случае и будет служить нам формальным инструментом, устанавливающим различия между понятиями «принадлежности» и «нахождения внутри». Как можно догадаться, способов провести такие различия может быть более одного. Мы же поступим следующим образом.

Прежде всего сопоставим каждому значению $p \in \Omega$ некоторое подмножество $P_p \subseteq \pi(\Omega)$, состоящее из тех «точек» $\phi : \Omega \to \Omega_0$, которые данному значению $p \in \Omega$ сопоставляют единицу в Ω_0. В некотором экзистенциальном смысле это такие «точки» в пространстве мышления субъекта опыта (жизненные ситуации), в которых все элементы всех интеллектуальных объектов, ожидаемо относящиеся к данной ситуации со степенью p (а как мы увидим в дальнейшем, и со степенью *не ниже* p), активно влияют на представление субъекта об истине, т. е. это некий «опыт правильного» субъекта:

$$P_p = \{\phi : \phi \in \pi(\Omega) \text{ and } \phi(p) = \mathbf{1}\}$$

И тогда для каждой части «пространства точек», т. е. $\forall A : A \subseteq \pi(\Omega)$, внутренность этой части мы определим как множество всех активных точек, содержащихся в A. Другими словами, пробегая по всем частям $P_p \subseteq \pi(\Omega)$, мы отбираем те из них, которые сами являются частями A, и затем объединяем все содержащиеся в них «точки» в отдельное множество:

$$\mathrm{Int}(A) = \cup(P_p : \ P_p \subseteq A)$$

Если вдуматься, то связь внутренности того или иного подмножества точек с окрестностями, а следовательно и с близостью, прослеживается довольно явно.

[7]См. `https://en.wikipedia.org/wiki/Idempotence`.

Потому что, во-первых, на множества $P_p \subseteq \pi(\Omega)$ можно смотреть как на множества всех окрестностей элемента p в Ω, понятом тоже как топологическое пространство. Такое множество окрестностей иногда еще называют фильтром или ультрафильтром — «совершенной локализующей схемой»[8]. Локализация становится буквальной, если отношение частичного порядка на Ω есть отношение включения: в этом случае ультрафильтр «отфильтровывает» в Ω все такие части, которые *содержат* p. В общем же случае фильтр выделяет в Ω так называемое *верхнее множество*[9]. В нашей же неформальной интерпретации мы хотим показать, что множество точек выбора имеет внутренность (или, другими словами, «нутро», «внутренний стержень», «целостность»), если они исчерпывают собой все те точки, которые любым свойствам, явленным в некоторой ситуации с весом p *и выше*, приписывают максимальное значение (относят их к классу *истинных*, или *должных*). Еще раз: точка $\phi \in A$, оценивающая положительно (отправляющая в единицу) по крайней мере один элемент $p \in \Omega$, принадлежит $\mathrm{Int}(A)$, только если вместе с ней в A содержатся и абсолютно все «близкие» точки, т. е. такие, которые оценивают положительно (также отправляют в единицу) и все элементы, «близкие» к p в топологии, порожденной системой ультрафильтров (или все такие q, что $p \leq q$). Существует и еще одна, еще более техническая интерпретация того, что что мы тут определили как «точку»: это так называемая общая точка (generic point[10]).

Подробное доказательство того, что таким образом определенное понятие внутренности любой части множества точек удовлетворяет четырем аксиомам внутренности, сформулированным нами выше, изложено в нашей более ранней монографии[11]. Пытливым читателем мы рекомендуем обратиться к ней и самостоятельно проверить приведенные там доказательства.

Сейчас же нам остается лишь добавить, что точки бинарного выбора, помимо того что они образуют топологическое пространство (в том случае, разумеется, когда они существуют), могут, вообще говоря, либо не существовать вовсе, либо количественно существенно различаться. И таким образом мы получаем своего рода дополнительную метрику, на основании которой можно судить об устройстве различительной способности субъекта опыта и, как следствие, об организации его пространства мышления. Эффективным критерием отсутствия точек принятия решений в пространстве мышления субъекта являются следующие два условия:

1) Ω представляет собой не просто гейтингову, но булеву алгебру, т. е., неформально выражаясь, субъект опыта является выразителем классической рациональности;
2) В Ω отсутствуют *изолированные элементы*, т. е. такие $i \in \Omega$, что:

[8] См. `https://en.wikipedia.org/wiki/Filter_(mathematics)`.

[9] См. `https://en.wikipedia.org/wiki/Upper_set`.

[10] См. `https://en.wikipedia.org/wiki/Generic_point`.

[11] Егорычев 2014, 217–218.

– $i \neq \mu$;

– если $j < i$, то $j = \mu$.

Изолированными их называют потому, что между ними и минимальным значением в Ω нет промежуточных значений — они *следуют* за нулем в строгом смысле этого слова. Так вот, можно доказать теорему (хотя мы сейчас этого делать и не будем), из которой в точности следует, что если для некоторой Ω выполняются перечисленные выше условия, то в таком пространстве нет ни одного места, в котором было бы возможно сделать выбор.

Миры, в которых невозможно ничего решать, философ Ален Бадью поэтично именует *атоничными*: «Это такой вид счастья, о котором мечтают приверженцы демократического материализма: ничего не происходит, кроме умирания, о котором мы ничего не желаем знать» (Badiou 2009: 420).

Когда-то по этому поводу нами был сделан следующий комментарий: «С ним сложно не согласиться, учитывая действительно сложившиеся в XX веке тенденции: от сугубо теоретических усилий философии постмодерна по преодолению любого метанарратива и деконструкции бинарных оппозиций до демократического движения в политике, крайними проявлениями которого является уже отнюдь не теоретическая деконструкция пола, т. е. деконструкция фундаментальной оппозиции мужское/женское, а также граничащее с одержимостью стремление уравнять в правах любые социально-политические меньшинства и „дискурсы“. Последнее, кстати, может быть взято в качестве трансцендентального критерия атоничного мира: в мире, где каждый пытается понять каждого, где все коммуницирует со всем, невозможно уединиться: тотальная коммуникация делает невозможным одиночество. В то время как радикальная субъективация всегда требует уединенности» (Егорычев 2014: 219).

Если, однако, оставить поэтику в стороне, представляется вполне очевидным, что даже в контексте разработок AGI категорная модель пространства мышления с таким устройством Ω не является удобной или практичной — тем более что машинный интеллект оказывается востребован преимущественно с целью моментальных принятий решений в ситуациях, где «человеческий фактор» склонен существенно тормозить процесс. Напротив, удобным было бы не только уметь моделировать пространство мышления, в котором решения возможны, но и моделировать пространства с предзаданным количеством точек. В рамках настоящего исследования нами будет доказана теорема, которая утверждает, что максимальное количество точек в пространстве мышления не может превосходить число элементов Ω и что этот максимум достигается.

Действительно, пусть Ω_0 обозначает решётку $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, а Ω — решётку, у которой каждое подмножество имеет нижнюю грань (например, Ω может обозначать любую конечную решётку), и $f : \Omega \to \Omega_0$ является отображением, сохраняющим наименьшие верхние и наибольшие нижние грани (возможно, бесконечные), т. е.

f — «точка» в определенном нами ранее смысле. Другими словами, для любого подмножества $S \subseteq \Omega$, если $\bigwedge\limits_{s \in S} s$ существует, то

$$f\left(\bigwedge_{s \in S} s\right) = \bigwedge_{s \in S} f(s),$$

и если $\bigvee\limits_{s \in S} s$ существует, то

$$f\left(\bigvee_{s \in S} s\right) = \bigvee_{s \in S} f(s).$$

Рассмотрим множество $P = \{p \in \Omega : f(p) = 1\}$ и наибольшую нижнюю грань его элементов $q = \bigwedge\limits_{p \in P} p$. Заметим, что $f(q) = f\left(\bigwedge\limits_{p \in P} p\right) = \bigwedge\limits_{p \in P} f(p)$, и поскольку все $p \in P$, то все $f(p) = 1$. Поэтому $f(q) = 1$.

Покажем теперь, что если для некоторого $p \in \Omega$ верно, что $q \leq p$, то $f(p) = 1$. Так как $p \vee q = p$, то $f(p) = f(p \vee q) = f(p) \vee f(q) = f(p) \vee 1 = 1$.

И наоборот, если $f(p) = 1$, то $q \leq p$. Действительно, если $f(p) = 1$, то $p \in P$, а поскольку $q = \bigwedge\limits_{p \in P} p$, то $q \leq p$.

Таким образом, для любой «точки» $f : \Omega \to \Omega_0$ существует $q_f \in \Omega$, которым «точка» f определяется однозначно. А именно, $\forall p \in \Omega$

$$f(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } q \leq p \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

С другой стороны, различным «точкам» f соответствуют различные $q_f \in \Omega$, а значит, $|\pi(\Omega)| \leq |\Omega|$. В качестве примера Ω, для которой достигается равенство $|\pi(\Omega)| = |\Omega|$, можно привести любое линейно-упорядоченное множество, или наоборот — множество, в котором каждый элемент является несравнимым.

Таким образом, мы вполне строго обосновали возможность построения категорных моделей пространства мышления, в которых число точек принятия решений может заранее регулироваться — в частности, с помощью увеличения или уменьшения числа упомянутых выше изолированных элементов в Ω.

III

Наконец, мы приступаем к заключительной части нашей работы, которая будет посвящена *внешнему* аспекту рациональности субъекта, работающего в пространстве мышления. Этот аспект представляет собой «аналитику» (в фактически буквальном, как мы увидим далее, смысле их дезинтеграции) интелектуальных объектов пространства мышления с целью обнаружения в нем такого синтетического интеллектуального объекта (элемента мира), который был бы типичным в глобальном смысле, т. е. такого, который являл бы собой так называемую синтетическую ценность объекта в смысле подчинения себе всех остальных составляющих его элементов с точки зрения своей роли, или веса, в ситуации, был бы для нее, так сказать, ее наименьшей верхней гранью.

Мы покажем, что пространство мышления, рассматриваемое как категория (или подкатегория) полных гейтингозначных множеств, обладает весьма важным и далеко не очевидным свойством: в нем возможна *«склейка»*[12]. Ален Бадью придает этому свойству глубокий неформальный смысл — он полагает (и мы постараемся показать, что у этой гипотезы есть достаточно оснований), что ему соответствует мыслимость мира как такового. Причем мыслимость именно в том смысле, который ей придает и А. В. Курпатов в своей методологии: собрав максимально возможное число относящихся к делу фактов, мы в принципе способны реконструировать реальность — воспроизвести ее, так сказать, логический рисунок. Но нам никогда не даны все факты; поэтому реконструкция всегда носит локальный характер, всегда есть риск, или возможность того, что придут другие и сделают лучше.

Результатом реконструкции в данном случае выступит некий системообразующий элемент ситуации — *такой синтетический факт, через который определяются все остальные факты.* Поясним сказанное на относительно несложном примере.

Пускай нам дан некий мир. Для простоты и наглядности рассуждения мы воспользуемся примером, к которому неоднократно обращается и сам Бадью, — сузим мир до мира-изображения, представленного картиной известного французского художника Юбера Робера «Купальня», на которой изображены обнаженные и полуобнаженные женщины, купающиеся в лесу на фоне развалин античного храма. Храм занимает на картине одно из центральных мест и очевидно выделяется в данном мире-изображении как объект в определенном нами выше смысле. Мы всегда можем перегруппировать элементы x каждого объекта A в зависимости от того значения, которое им предписано функцией ожидания $Ess(x)$. Действительно, довольно естественным представляется такое «расслоение» объекта (A, Exp_A), при котором каждому значению p на шкале Ω будет поставлено в соответствие подмножество тех и только тех элементов $x \in A$, чья степень «близости к сущности» равняется p $(Ess_A(x) = p)$. К примеру, три полностью видимые колонны храма на картине Робера присутствуют на ней наиболее отчетливо, и поэтому будут иметь максимальную степень Ess. Колонны, расположенные на картине чуть дальше справа, будут иметь промежуточную степень, едва различимые колонны слева — минимальную, и т. д. В результате мы получим расслоение объекта «храм» на строго однородные «слои». Основная сложность будет состоять в том,

[12]См. https://en.wikipedia.org/wiki/Gluing_axiom.

что мы хотим, чтобы наш анализ «уважал» синтез: предположим, что нам удалось каким-то образом из каждого слоя выбрать по представителю: например, каждому значению p из нашего примера соответствует какая-то конкретная колонна, которая уникальным образом представляет это значение. У множества значений в Ω супремум есть всегда — это верно просто по построению гейтинговой решетки. Но верно ли и обратное? Т. е. верно ли, что, во-первых, группа колонн как элементов объекта также имеет супремум в смысле *реального* синтеза — элемента, выступающего в роли супремума для данной группы колонны как элементов объекта «храм»? И во-вторых, соответствует ли данный элемент тому значению супремума, которое было нами получено в результате анализа? Если ответ на этот вопрос окажется положительным, то мы сможем сказать, что располагаем вполне строгим правилом, по которому внутренние законы различительной способности субъекта опыта, в соответствии с которыми субъект опыта упорядочивает (создает) свой мир интеллектуальной функции, могут быть непротиворечивым образом спроецированы непосредственно в мир.

Как мы покажем ниже, такое строгое правило действительно существует; для этого нам придется продемонстрировать, что упомянутое выше сопоставление, во-первых, является функтором, а во-вторых, данный функтор удовлетворяет аксиоме склейки, т. е. является *пучком.* А в заключение мы, разумеется, сделаем по возможности явной связь между данным категорным формализмом, с одной стороны, и синтезом мышления в реальности и о реальности — с другой.

Бадью подчеркивает, что успешная реализация существующей формальной возможности, во-первых, не является чем-то заурядным: напротив, тех субъектов, которые владеют этим навыком, философ именует гениями. И, тем не менее, всякая подобная реконструкция имеет принципиально локальный характер — как во времени, так и в пространстве. Это, в частности, по его мнению, объясняет то, почему даже великие полководцы-победители рано или поздно терпят поражения (Badiou 2009: 288).

Итак, давайте последовательно во всем разбираться.

Во-первых, заметим, что любое частично упорядоченное множество образует категорию. Поэтому мы можем рассмотреть организованное описанным выше образом отображение F из Ω в $\mathbf{Set}$ и «руками» убедиться, что данное отображение функториально, т. е. согласовано на стрелках. Для этого мы предлагаем рассмотреть следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd} p \in \Omega \arrow[r, "F_A"] & \begin{array}{c} F_A(p) \subseteq A, \\ \mathbf{E}x = p \end{array} \arrow[d, "\varphi_q(x)=x\upharpoonright q"] \\ q \in \Omega \arrow[u, "q \leq p"] \arrow[r, "F_A"'] & \begin{array}{c} F_A(q) \subseteq A, \\ \mathbf{E}x = q \end{array} \end{tikzcd}$$

Большую часть того, что изображено на этой диаграмме, мы подробно проговорили выше. Повторим, однако, что над каждым значением $p \in \Omega$ мы как бы подвешиваем «слой» — множество таких элементов (деталей) x интеллектуального объекта $\mathbf{A} = (A, Exp_A)$, для которых $Exp_A(x, x) = p$. То есть для каждого объекта $\mathbf{A} \in C\Omega{-}\mathbf{Set}$ у нас возникает по соответствующему, совершенно идентично устроенному отображению $F_A : \Omega \to \mathbf{Set}$. Обращаем внимание, что отбражения действуют именно в категорию обычных множеств — просто правило, которым они задаются, не могло бы быть определено в отсутствие в пространстве мышления структуры, зависящей от устройства функции ожидания. Это же касается и незнакомой нам пока стрелки, обозначенной на диаграмме как $\varphi_q(x) : F_A(p) \to F_A(q)$: это обыкновенная функция, заданная на множествах, но задание ее также существенным образом зависит от гейтингозначной структуры, имеющейся на наших множествах и, что самое главное, от полноты этих множеств. Как написал по этому поводу Роберт Голдблатт, «Свойство полноты Ω-множества допускает весьма элегантную абстрактную реализацию идеи сужения функции на подмножество ее области определения» (Goldblatt 2006: 389). Дело в том, что при фиксированных $a \in A$ и $p \in \Omega$ функция, определенная как $Exp_A(a, x) \cap p$, оказывается синглетоном (или атомарным означающим), а поскольку интеллектуальный объект A *полон*, то в нем, по определению, существует единственный элемент $b \in A$, для которого $Exp_A(b, x) = Exp_A(a, x) \cap p$. Такой атомарный предикат $b(x)$ мы и будем называть сужением $a(x)$ на p и обозначать как $a \upharpoonright p$.

То есть мы совершаем далеко не тривиальный ход: по элементу $a \in F_A(p)$ мы строим атомарный предикат $a(x) = Exp_A(a, x)$, сужаем его на $q \in \Omega$, строя, вообще говоря, новый атомарный предикат $Exp_A(a, x) \cap q$, которому в силу полноты A соответствует атомарный предикат $b(x) = Exp_A(b, x) = Exp_A(a, x) \cap q$, задаваемый единственным элементом $b \in A$. Это и есть правило, задающее стрелку $\varphi_q(x) = x \upharpoonright q$. Однако, чтобы нам быть уверенными в том, что эта функция определена корректно, нужно еще доказать, что все найденные таким образом $b \in A$ действительно сожержатся в его подмножестве $F_A(q) \subseteq A$.

Рассмотрим $Exp_A(b, x) = Exp_A(a, x) \cap q$. Положив $x = b$, имеем: $Exp_A(b, b) =$

$Exp_A(a,b) \cap q$. То есть

$$Ess_A(b) = Exp_A(a,b) \cap q. \tag{2}$$

Положив теперь $x = b$, получим $Exp_A(b,a) = Exp_A(a,a) \cap q$, или $Exp_A(a,b) = Ess_A(a) \cap q$. И тогда из (2) следует, что $Ess_A(b) = Ess_A(a) \cap q \cap q$. Но b, по допущению, есть $Exp_A(a,x) \cap q$, следовательно $Ess_A(a \restriction q) = Ess_A(a) \cap q$. Опять-таки, поскольку $a \in F_A(p)$ и, значит, $Ess_A(a) = p$, то $Ess_A(a \restriction q) = p \cap q$, а поскольку $q \leq p$, $Ess_A(a \restriction q) = q$, следовательно, $\forall a \in F_A(p) : b = a \restriction q$ действительно лежит в $F_A(q)$.

Утверждение доказано.

В принципе к настоящему моменту мы сделали не так уж и мало: мы построили функтор F из Ω в **Set**. Функтор этот, как, возможно, кто-то заметил, внимательно изучив приведенную выше диаграмму, «переворачивал стрелки», а именно такой функтор мы в первой части нашего исследования называли контрвариантным. И именно такой функтор имеет в теории категорий и другое название — *предпучок*. Вообще говоря, предпучки (а с ними вместе и пучки) традиционно рассматривались над топологическими пространствами, и только гениальный Александр Гротендик заметил, что эта самая пресловутая аксиома склейки может быть переформулирована в терминах категорных свойств, являющихся значительно более абстрактными. В результате такого глубокого обобщения предпучки и пучки стало возможным рассматривать как функторы определенного вида, действующие из категории, на которой удается определить структуру, напоминающую структуру топологического пространства, — в частности, пучком будет и наш функтор $F : \Omega \to \mathbf{Set}$, если мы покажем, что, во-первых, на Ω такая структура есть, и, во-вторых, если он удовлетворяет аксиоме склейки, о которой, наконец, уже пора сказать что-то вразумительное.

Сама идея гейтингозначных множеств возникла для того, чтобы получить возможность говорить о так называемых «потенциально существующих» элементах, т. е. элементах, существующих не актуально (абсолютно), а с некоторой степенью, значения которой и оказалось очень удобно отыскивать на частично упорядоченной шкале. В качестве таких потенциально существующих элементов изначально рассматривались функции, определенные на частях некоторого топологического пространства X. Поскольку эти функции определены лишь частично (т. е. не на всем X, а только на каком-то его подмножестве), то можно было вполне осмысленно говорить как об актуально существующих элементах, то есть о таких, которые определены на всем X, так и об элементах, существующих лишь в определенной степени, в зависимости от величины того подмножества, на котором они определялись. Более того, если, скажем, функция f определена на $U \subseteq X$, а функция g — на $V \subseteq X$, то можно было говорить и о *мере сходства* f и g, определяя ее как внутренность такого пересечения $U \cap V$, для которого $f = g$, и о *совместимости* данных элементов, то есть о ситуации, при которой значения f и g совпадают максимально, т. е. на всем пересечении $U \cap V$. Очевидно, что при выполнении такого условия эти элементы можно «склеить» между собой и получить новую функцию h, определенную уже на большем по размеру подмножестве, а именно на объединени $U \cup V$. Ровно эта же идея и лежит в основе аксиомы склейки, которой должен удовлетворять контрвариантный функтор, для того чтобы быть пучком.

Поскольку мы теперь говорим о пучке над категорией Ω, то для каждого объекта данной категории нам нужно прежде всего указать то, что Александр Гротендик назвал его *покрытиями*, совокупность которых и позволяет рассматривать категорию, что называется, топологически. Вообще говоря, покрытием Cov, или топологией Гротендика, на категории C называют сопоставление каждому ее объекту a некоторого специальным образом устроенного множества стрелок с назначением в a[13]. Главным требованием к такому семейству стрелок является следующее: если $\{a_i \to a\}_{i \in I} \in Cov(a)$ и $a_j \to a$ — стрелка из $Cov(a)$, то для любой стрелки $a_i \to a$ существует декартов квадрат

$$\begin{tikzcd} a_j \times_a a_i \arrow[r] \arrow[d] & a_i \arrow[d] \\ a_j \arrow[r] & a \end{tikzcd}$$

и семейство $\{a_j \times_a a_i \to a_j\}_{i \in I} \in Cov(a_j)$. Говоря чуть более простыми словами, это означает, что «пересечение» любых двух покрытий является покрытием для пересекающихся компонент.

Теперь, поскольку F — (контрвариантный) функтор, стрелки $a_j \times_a a_i \to a_i$ и $a_j \times_a a_i \to a_j$ имеют «перевернутые» образы $f_j^i : F(a_i) \to F(a_j \times_a a_i)$ и $f_i^j : F(a_j) \to F(a_j \times_a a_i)$ в $\mathbf{Set}$. Если мы теперь также всегда существующую стрелку $F(a) \to F(a_i)$ обозначим как f_i, то аксиома склейки в максимально обобщенных, категорных терминах будет звучать следующим образом: для любого покрытия $\{a_i \to a\}_{i \in I} \in Cov(a)$ и при любом выборе попарно совместимых элементов $s_i \in F(a_i)$, т. е. таких, что $f_j^i(s_i) = f_i^j(s_j)$, существует единственный элемент $s \in F(a)$, такой, что $f_i(s) = s_i$.

Если функторы из произвольной категории (C, Cov_C) в $\mathbf{Set}$ удовлетворяют аксиоме склейки, то их совокупность образует категорию пучков над C, и любую категорию, ей эквивалентную, называют *топосом Гротендика*.

Заметим, что в категории полных гейтингозначных множеств данная аксиома равносильна тому, что $\forall \mathbf{A} \in \mathbf{C}\Omega - \mathbf{Set}$ любое подмножество $B \subseteq A$ попарно совместимых элементов имеет единственную наименьшую верхнюю грань.

Помните наш вопрос о том, имеет ли группа колонн супремум? Так вот, ответ

[13]См. `https://en.wikipedia.org/wiki/Grothendieck_topology`.

оказывается утвердительным, коль скоро колонны будут являться совместимыми элементами.

Здесь нужно сказать несколько слов как о том, что такое совместимые элементы в полном гейтингозначном множестве A, так и о том, откуда на них возникает некий порядок, который очевидным образом необходим для того, чтобы говорить о верхних или нижних гранях.

В нашем конкретном случае частично упорядоченного множества Ω, рассматриваемого как категория, покрытие Cov_Ω есть сопоставление каждому объекту $q \in \Omega$ множества таких подмножеств $C \subseteq \Omega$, для которых $\bigcup C = q$. Вспомним, что в категории Ω из p в q есть стрелка в том и только в том случае, когда $p \leq q$. То есть покрытие Ω действительно образует множество стрелок $p \leq q$, или элементов $p \leq q$ для каждого $q \in \Omega$. Очевидно, что q будет являться наименьшей верхней гранью множества всех таких элементов.

Вспомним, что образы стрелок любых стрелок вида $q \to p$ в Ω у нас устроены как сужение всех синглетонов $a = Exp_A(a, x) \in F_A(p)$ на q. Соответственно, если мы зафиксируем в подмножестве $C \subseteq \Omega : \bigcup C = p$ два элемента q и q' и выберем в множествах, соответствующим их образам, по представителю $s_q \in F(q)$ и $s_{q'} \in F(q')$, то условие совместимости из аксиомы склейки примет вид $s_q \upharpoonright q \cap q' = s_{q'} \upharpoonright q \cap q'$. Однако, используя ряд тождеств, которые, скажем, приводит Голдблатт в качестве самостоятельных упражнений (Goldblatt 2006: 389), можно и дальше преобразовать это равенство:

$$s_q \upharpoonright q \cap q' = (s_q \upharpoonright q) \upharpoonright q' = (s_q \upharpoonright Ess_A(s_q)) \upharpoonright q' = s_q \upharpoonright q' = s_q \upharpoonright Ess_A(s_{q'}).$$

Но, с другой стороны,

$$s_{q'} \upharpoonright q \cap q' = (s_{q'} \upharpoonright q') \upharpoonright q = (s_{q'} \upharpoonright Ess_A(s_{q'})) \upharpoonright q = s_{q'} \upharpoonright q = s_{q'} \upharpoonright Ess_A(s_q).$$

И поэтому мы можем утверждать, что в полном гейтингозначном множестве A два элемента $s_q, s_{q'} \in B \subseteq A$ являются совместимыми (ниже совместимость мы будем обозначать как $s_q \backsim s_{q'}$), если

$$s_q \upharpoonright Ess_A(s_{q'}) = s_{q'} \upharpoonright Ess_A(s_q).$$

Напомним, что в геометрической (топологической) интерпретации совместимость двух элементов f и g оэначала совпадение их значений как функций на всем пересечении их областей определения. То есть если, для произвольных f и g, $Exp(f, g) \leq Ess(f) \cap Ess(g)$, то при совместимости достигается равенство: $Exp(f, g) = Ess(f) \cap Ess(g)$. Тот факт, что равенство действительно достигается, следует почти немедленно из приведенного выше определения совместимости, и может, вообще говоря, сам служить определением. Тем более что данное тождество позволяет наиболее наглядно рассмотреть второй аспект совместимости — логический, который по понятным причинам будет интересовать нас в гораздо большей степени. (Геометрический и логический аспекты неизменно соприсутствуют в категорном анализе пучков — основателем теории категорий Сондерсом Маклейном даже написан фундаментальный труд, специально посвященный двум данным аспектам, с говорящим за себя названием «Пучки в геометрии и логике» — MacLane, Moerdijk 1992.)

Ранее (см. Егорычев 2020) мы довольно много времени уделили так называемым атомарным означающим, или атомарным предикатным функциям, которые мы отождествили с остенсивными предикатами вида «он вот какой, как это a». Именно в этом отождествлении и проявляется тесная онто-логическая связь между синглетонами как единицами логическими (тяготеющими к языку) и элементами гейтингозначного множества как воспринятыми деталями, отвлеченными, так сказать, субъектом опыта от реальности как таковой. И тогда совместимость двух синглетонов, с логической точки зрения, будет означать, что они «сообщают одно и то же обо всех остальных», или то, что они как элементы одинаково отличны от всех других элементов $x \in \mathbf{A}$. (Они наименее непохожи в сравнении с тем остальным, в чем они совпадают.) В одной из наших статей мы приводили такой пример: мы предлагали рассмотреть некий условный «мир офиса» и два атомарных предиката «блондинка» и «рыженькая». Реальные индивиды, служащие в офисе, будут совместимы, если их общее положение в экзистенциальной иерархии мира-офиса окажется идентичным: они обе, скажем, будут трудоголиками, обе будут руководить отделами и т. п. (Egorychev 2016: 193–210).

Далее, предикатная функция у нас имела вид $\pi(x) : A \longrightarrow \Omega$. Синглетон, или атомарная предикатная функция, в этом смысле устроен точно так же — это приписывание меры «близости» элементов $x \in \mathbf{A}$ некоторому $a \in \mathbf{A}$ на шкале Ω. Поэтому сужение синглетона $s_q \restriction Ess_A(s_{q'})$, опять-таки с логической точки зрения, следует понимать как некую перекалибровку шкалы Ω таким образом, чтобы она стала более чувствительной к свойствам элемента $s_{q'}$. Это как бы «урезание» ее до элемента $Ess_A(s_{q'}) = p$ так, что последний становится единицей, максимальным значением, или «истиной» в новой, отредактированной шкале. Очевидно, что совместимость, понятая как равенство $s_q \restriction Ess_A(s_{q'}) = s_{q'} \restriction Ess_A(s_q)$, — это совпадение всех оценок атомарных предикатов s_q и $s_{q'}$ на взаимно откалиброванных шкалах.

Теперь, наконец, мыслимость мира (или наличие в нем внутренней логики) может быть представлена нами как совершенно формальная процедура:

1. По построению функтора F_A, над любым покрытием $C \subseteq \Omega$ «висят» слои $F_A(q)$ — по одному для каждого $q \in C$. Мы помним при этом, что $\bigcup C = p$. Наша аналитическая задача состоит в том, чтобы из каждой части $F_A(q) \subseteq A$ выбрать ровно по одному характерному «представителю» таким образом, чтобы каждый из них был попарно совместим со всеми остальными. Такое множество элементов $B \subseteq A$ имет единственный супремум $s(x) = \bigcup\limits_{s_q \in B} Exp_A(x, s_q)$.

Дело в том, что равенство $s_q = s_{q'} \restriction Ess_A(s_q)$ индуцирует на элементах s_q и $s_{q'}$ отношение частичного порядка $s_q < s_{q'}$, которое, в свою очередь, влечет как их совместимость, так и отношение $Ess(s_q) \leq Ess(s_{q'})$ (Goldblatt 2006: 390). И можно показать, что, во-первых, $s(x) = \bigcup\limits_{s_q \in B} Exp_A(x, s_q)$ определяет синглетон, если только все $s_q \in B$ попарно совместимы, а во-вторых, элемент $s \in A$, соответствующий синглетону $s(x)$, есть наименьшая верхняя грань $\vee B$ по отношению частичного порядка $<$, индуцированному на элементах B.

2. Покажем, что элемент $s = \vee B$ принадлежит $F_A(p)$, то есть что $Ess_A(s) = p$.

Поскольку $s = \vee B$, то $\forall s_q \in B : s_q < s$. То есть элементы s_q и s совместимы, и $Ess(s_q) \leq Ess(s)$. Отсюда следует, что $Ess(s_q) \cap Ess(s) = Ess(s_q)$. С другой стороны, для совместимых элементов, как мы помним, верно равенство $Exp(s_q, s) = Ess(s_q) \cap Ess(s)$. Следовательно, $Exp(s_q, s) = Ess(s_q)$.

Теперь, $s(x) = Exp_A(x, s) = \bigcup\limits_{s_q \in B} Exp_A(x, s_q)$. Подставляя $x = s$, имеем $Exp_A(s, s) = \bigcup\limits_{s_q \in B} Exp_A(s, s_q)$, т. е. $Ess_A(s) = \bigcup\limits_{s_q \in B} Exp_A(s, s_q)$. Но $Exp(s_q, s) = Ess(s_q)$, и, значит, $Ess_A(s) = \bigcup\limits_{s_q \in B} Ess_A(s_q) = \bigcup\limits_{q \in C} q = \bigcup C = p$.

Итак, основываясь на функториальном анализе интеллектуального объекта A, мы имеем возможность любое покрытие $C \subseteq \Omega$ как бы спроецировать в объект и выбрать в нем часть $B \subseteq A$, состоящую из попарно совместимых представителей так называемой страты, соответствующей каждому значению $q \in C$. На множестве таких представителей имеется реальный порядок $<$, индуцируемый отношением $Ess(s_q) \leq Ess(s_{q'})$, и существует синтетический элемент $s \in A$ такой, что $s = \vee B$, и $Ess_A(s) = \bigcup C$. То есть s представляет собой как некий синтез в реальности, являясь верхней гранью для всех элементов, содержащихся в множестве B, так и синтез с точки зрения различительной способности субъекта опыта, поскольку является представителем страты, соответствующей значению $p \in \Omega$, которое, в свою очередь, тоже есть верхняя грань (супремум) для покрытия C.

Синтетический характер элемента s, уже как атомарного предиката (означающего), проявляется во всей своей полноте в том, что он является как бы логическим эквивалентом геометрической аксиомы склейки, поскольку $\forall s_q \in B : s \restriction q = s_q$!

Действительно, $\forall s_q \in B : s_q < s$. Это, по определению «онтологического» порядка, означает, что $s_q = s \restriction Ess_A(s_q)$. Но $Ess_A(s_q) = q$, следовательно, $s \restriction q = s_q$. То есть? как предикатная функция, данный элемент, будучи соответствующим образом откалиброван на любое подмножество $p \in \Omega$, автоматически породит новый атомарный предикат, локально наиболее точно схватывающий, так сказать, «свою зону ответственности».

Заключение

Итак, мир мыслим. Это обнадеживает, поскольку, несмотря на то что я всегда отделен от реальности своими представлениями о ней, я хотя бы сугубо теоретически способен занять критическую позицию по отношению к любым принятым в моей, скажем так, культуре «очевидностям» и запросить больше фактов. Другими словами, у меня есть право сомневаться. В таком случае высока вероятность того, что я изменю свой взгляд на интересующий меня фрагмент реальности, внесу в него ряд уточнений.

Более того: поскольку человечество, преимущественно благодаря языку и письменности, на данный момент обладает специфически развитой структурой головного мозга, каждый человек способен получить доступ к привычкам, методам, техникам, инструментам мышления и информации, наличествующим в мозгу огромного числа людей, которые не являются его прямыми предками. Все это, будучи существенно усиленным с помощью сознательного и целенаправленного научного творчества, ставит наше пространство мышления в совершенно уникальное положение, радикально отличающееся от того, в котором находятся все остальные живые существа. Возможность сравнить наши записи по сути объединяет все наши индивидуальные пространства мышления в единую разветвленную сеть, каждый член которой, благодаря языковой коммуникации, может стать бенефициаром интеллектуального багажа любого другого участника данной «сети». В результате пространство мышления также обретает уникальную структуру, в которой путем последовательности приближений оказывается достижима некоторая объективная картина мира, или верифицируемая модель реальности, в которой всегда можно обнаружить достаточные основания для перехода от одного положения дел к другому.

Литература

Деннетт 2004 — *Деннетт Д.* Виды психики: На пути к пониманию сознания. М.: Идея-Пресс, 2004.

Егорычев 2018 — *Егорычев И. Э.* Язык теории категорий и «границы мира». СПб.: Трактат, 2018.

Егорычев 2020 — *Егорычев И. Э.* Категорная формализация методологии мышления А. В. Курпатова в контексте перспективных разработок AGI // Логико-философские штудии. 2020. Т. 18, № 1. С. 11–33.

Курпатов 2016 — *Курпатов А. В.* Пространство мышления. Соображения. СПб.: Трактат, 2016.

Курпатов 2018 — *Курпатов А. В.* Методология мышления. Черновик. СПб.: Трактат. 2018.

Курпатов 2019 — *Курпатов А. В.* Мышление. Системное исследование. СПб.: ООО «Дом Печати Издательства Книготорговли „Капитал“», 2019.

Badiou 2009 — *Badiou A.* Logics of worlds. N. Y.: Continuum, 2009.

Badiou 2014 — *Badiou A.* Mathematics of the Transcendental. N. Y.: Bloomsbury, 2014.

Borceux 1994 — *Borceux F.* Handbook of Categorical Algebra. Vol. 3. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.

Dennett 1995 — *Dennett D. C.* Darwin's dangerous idea. N. Y.: Simon and Schuster Paperbacks, 1995.

Egorychev 2016 — *Egorychev I.* Thought and Being are the Same: Categorial Rendition of the Parmenidian Thesis // Studies in Logic, Grammar and Rhetoric. 2016. Vol. 46, no. 59. P. 193–210.

Goldblatt 2006 — *Goldblatt R.* Topoi. The categorial analysis of logic. N. Y.: Dover Publications, 2006.

Lawvere, Schanuel 1997 — *Lawvere F. W., Schanuel S.* Conceptual Mathematics: A First Introduction to Categories. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

MacLane, Moerdijk 1992 — *MacLane S., Moerdijk I.* Sheaves in Geometry and Logic. N. Y.: Springer, 1992.

Shapiro 2000 — *Shapiro S.* Thinking about Mathematics: Structure and ontology. N. Y.: Oxford University Press, 2000.