ЛОГИКА СЕГОДНЯ

Владимир Попов[1]

К ПРОБЛЕМЕ РАСШИРЕНИЯ МАТРИЧНОЙ СЕМАНТИКИ, АДЕКВАТНОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ИМПЛИКАТИВНОЙ ЛОГИКЕ, ДО МАТРИЧНОЙ СЕМАНТИКИ, АДЕКВАТНОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ КОНЪЮНКТИВНО-ИМПЛИКАТИВНОЙ ЛОГИКЕ[2]

Аннотация. В (Попов 2019) дан перечень всех логических матриц, носитель каждой из которых есть $\{1, 1/2, 0\}$ и выделенное множество каждой из которых есть $\{1\}$, адекватных классической импликативной логике. В частности, этому перечню принадлежат логические матрицы $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset (1, 0, 0, 1)\rangle$ и $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset (1/2, 0, 0, 1/2)\rangle$. Настоящая статья содержит построение бинарной операции $\underline{\&}$ на $\{1, 1/2, 0\}$ и доказательство того, что $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \underline{\&}, \supset (1, 0, 0, 1)\rangle$ есть $L_{\&\supset}$-матрица, адекватная классической конъюнктивно-импликативной логике, а также доказательство того, что не существует операции ψ, для которой $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \psi, \supset (1/2, 0, 0, 1/2)\rangle$ есть $L_{\&\supset}$-матрица, адекватная классической конъюнктивно-импликативной логике.

Ключевые слова: классическая импликативная логика, классическая конъюнктивно-импликативная логика, трехзначная логическая матрица с одним выделенным значением.

Vladimir Popov

ON THE PROBLEM OF EXTENDING MATRIX SEMANTICS ADEQUATE TO CLASSICAL IMPLICATIVE LOGIC TO MATRIX SEMANTICS ADEQUATE TO CLASSICAL CONJUNCTIVE-IMPLICATIVE LOGIC

Abstract. In (Popov 2019), a list of all logical matrices is given, the carrier of each of which is $\{1, 1/2, 0\}$ and the designated set of each of which is $\{1\}$, adequate to classical implicative

[1] *Попов Владимир Михайлович* — кандидат философских наук, доцент кафедры логики философского факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.
Vladimir Popov, Ph.D., associate professor, Department of Logic, Faculty of Philosophy, Lomonosov Moscow State University.
pphiloslog@mail.ru

[2] Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 19-011-00536 А.

logic. In particular, to this list belong the logical matrices $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset (1, 0, 0, 1)\rangle$ and $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset (1/2, 0, 0, 1/2)\rangle$. This article contains the construction of the binary operation $\underline{\&}$ on $\{1, 1/2, 0\}$ and the proof that $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \underline{\&}, \supset (1, 0, 0, 1)\rangle$ there is an $L_{\&\supset}$-matrix adequate to the classical conjunctive-implicative logic, as well as a proof that there is no operation ψ for which $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \psi, \supset (1/2, 0, 0, 1/2)\rangle$ is an $L_{\&\supset}$-matrix that is adequate to the classical conjunctive-implicative logic.
Keywords: classical implicative logic, classical conjunctive-implicative logic, three-valued logical matrix with one designated value.

Для цитирования: *Попов В. М.* К проблеме расширения матричной семантики, адекватной классической импликативной логике, до матричной семантики, адекватной классической конъюнктивно-импликативной логике // Логико-философские штудии. 2021. Т. 19, № 1. С. 1–11. DOI: 10.52119/LPHS.2021.25.58.001.

Будем использовать стандартно определяемые пропозициональные языки $L_{\supset}$ и $L_{\&\supset}$, алфавиты которых — множества $\{\supset,), (, p_1, p_2, p_3, ...\}$ и $\{\&, \supset,), (, p_1, p_2, p_3, ...\}$ символов соответственно (при этом $p_1, p_2, p_3, ...$ являются пропозициональными переменными языков $L_{\supset}$ и $L_{\&\supset}$,), (— технические символы языков $L_{\supset}$ и $L_{\&\supset}$, $\supset$ — бинарная логическая связка $L_{\supset}$ и $L_{\&\supset}$, & — бинарная логическая связка языка $L_{\&\supset}$).

Определение 1. Называем $L_{\&\supset}$-логикой множество $L_{\&\supset}$-формул, замкнутое относительно правила modus ponens в $L_{\&\supset}$ и относительно правила пропозициональной подстановки в $L_{\&\supset}$.

Определение 2. Называем $L_{\&\supset}$-матрицей упорядоченную четверку $\langle M, N, e, g\rangle$, где M есть непустое множество, N есть подмножество множества M, e и g — бинарные операции[3] на M (при этом M называем носителем $L_{\&\supset}$-матрицы $\langle M, N, e, g\rangle$, N называем выделенным множеством $L_{\&\supset}$-матрицы $\langle M, N, e, g\rangle$, e называем первой операцией $L_{\&\supset}$-матрицы $\langle M, N, e, g\rangle$, а g называем второй операцией $L_{\&\supset}$-матрицы $\langle M, N, e, g\rangle$).

Определение 3. Оценкой языка $L_{\&\supset}$ в $L_{\&\supset}$-матрице K называем отображение множества всех пропозициональных переменных языка $L_{\&\supset}$ в носитель $L_{\&\supset}$-матрицы K.

Можно доказать справедливость следующего замечания 1.

Замечание 1. Для всякой $L_{\&\supset}$-матрицы K существует единственное отображение $|\cdot|^K$ множества всех упорядоченных пар, каждая из которых имеет вид $\langle A, w\rangle$,

[3] В предлагаемой статье «операция» и «всюду определенная операция» — синонимы.

где A есть $L_{\&\supset}$-формула и w есть оценка языка $L_{\&\supset}$ в $L_{\&\supset}$-матрице K, в носитель $L_{\&\supset}$-матрицы K, выполняющее следующие три условия: (1) для всякой пропозициональной переменной q языка $L_{\&\supset}$ и для всякой оценки v языка $L_{\&\supset}$ в $L_{\&\supset}$-матрице K верно, что $|q|^K_v = v(q)$, (2) для всякой $L_{\&\supset}$-формулы A, для всякой $L_{\&\supset}$-формулы B и для всякой оценки v языка $L_{\&\supset}$ в $L_{\&\supset}$-матрице K $|(A\&B)|^K_v = (|A|^K_v e|B|^K_v)$, где e есть первая операция $L_{\&\supset}$-матрицы K, (3) для всякой $L_{\&\supset}$-формулы A, для всякой $L_{\&\supset}$-формулы B и для всякой оценки v языка $L_{\&\supset}$ в $L_{\&\supset}$-матрице K $|(A \supset B)|^K_v = |A|^K_v g|B|^K_v$, где g есть первая операция $L_{\&\supset}$-матрицы K.

Определение 4. Называем $L_{\&\supset}$-формулой, общезначимой в $L_{\&\supset}$-матрице K, такую $L_{\&\supset}$-формулу A, что для всякой оценки v языка $L_{\&\supset}$ в $L_{\&\supset}$-матрице K $|A|^K_v$ принадлежит выделенному множеству $L_{\&\supset}$-матрицы K.

Определение 5. Называем $L_{\&\supset}$-матрицей, адекватной $L_{\&\supset}$-логике L, такую $L_{\&\supset}$-матрицу K, что для всякой $L_{\&\supset}$-формулы A верно следующее: $A \in \mathbf{L}$ тогда и только тогда, когда A есть $L_{\&\supset}$-формула, общезначимая в $L_{\&\supset}$-матрице K.

Обозначаем через $M^2_{\&\supset}$ хорошо известную логическую матрицу $\langle\{0,1\},\{1\},\&_{Cl},\supset_{Cl}\rangle$, где $\&_{Cl}$ и $\supset_{Cl}$ являются бинарными операциями на $\{0,1\}$, определяемыми соответственно таблицами

$\&_{Cl}$	1	0
1	1	0
0	0	0

и

$\supset_{Cl}$	1	0
1	1	0
0	1	1

Разумеется, $M^2_{\&\supset}$ есть $L_{\&\supset}$-матрица. Следуя традиции, даем следующее определение 6.

Определение 6. Классической конъюнктивно-импликативной логикой называем множество всех $L_{\&\supset}$-формул, общезначимых в $L_{\&\supset}$-матрице $M^2_{\&\supset}$.

Ясно, что существует единственная классическая конъюнктивно-импликативная логика.

Можно доказать, что верно следующее замечание 2.

Замечание 2. Классическая конъюнктивно-импликативная логика является $L_{\&\supset}$-логикой.

Нам потребуются три бинарные операции на $\{1, 1/2, 0\}$: бинарная операция $\underline{\&}$, определяемая таблицей

$\underline{\&}$	1	1/2	0
1	1	1	0
1/2	1	1	0
0	0	0	0

и бинарные операции $\supset(1,0,0,1)$ и $\supset(1/2,0,0,1/2)$, определяемые, соответственно, таблицами

$\supset(1,0,0,1)$	1	1/2	0
1	1	1	0
1/2	1	1	0
0	1	1	1

и

$\supset(1/2,0,0,1/2)$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1	0
0	1	1/2	1

Замечание 3. Существует единственная упорядоченная четверка, первый член которой есть $\{1,1/2,0\}$, второй член которой есть $\{1\}$, третий член которой есть $\underline{\&}$, а четвертый член которой есть $\supset(1,0,0,1)$; эта упорядоченная четверка $\langle\{1,1/2,0\}, \{1\}, \underline{\&}, \supset(1,0,0,1)\rangle$ есть $L_{\&\supset}$-матрица.

Утверждение 1. $\langle\{1,1/2,0\}, \{1\}, \underline{\&}, \supset(1,0,0,1)\rangle$ есть $L_{\&\supset}$-матрица, адекватная классической конъюнктивно-импликативной логике.

Поскольку классическая конъюнктивно-импликативная логика является $L_{\&\supset}$-логикой (см. замечание 2), а $\langle\{1,1/2,0\}, \{1\}, \underline{\&}, \supset(1,0,0,1)\rangle$ является $L_{\&\supset}$-матрицей (см. замечание 3), то, ввиду определения 5, для доказательства утверждения 1 достаточно доказать, что для всякой $L_{\&\supset}$-формулы A верно следующее: A принадлежит классической конъюнктивно-импликативной логике тогда и только тогда, когда A есть $L_{\&\supset}$-формула, общезначимая в $L_{\&\supset}$-матрице $\langle\{1,1/2,0\}, \{1\}, \underline{\&}, \supset(1,0,0,1)\rangle$.

Таким образом, для доказательства утверждения 1 достаточно доказать следующие утверждение 1.1 и утверждение 1.2.

Утверждение 1.1. Для всякой $L_{\&\supset}$-формулы A: если A принадлежит классической конъюнктивно-импликативной логике, то A есть $L_{\&\supset}$-формула, общезначимая в $L_{\&\supset}$-матрице $\langle\{1,1/2,0\}, \{1\}, \underline{\&}, \supset(1,0,0,1)\rangle$.

Утверждение 1.2. Для всякой $L_{\&\supset}$-формулы A: если A есть $L_{\&\supset}$-формула, общезначимая в $L_{\&\supset}$-матрице $\langle\{1,1/2,0\}, \{1\}, \underline{\&}, \supset(1,0,0,1)\rangle$, то A принадлежит классической конъюнктивно-импликативной логике.

При доказательстве утверждения 1.1 будем использовать исчисление $HCl_{\&\supset}$ гильбертовского типа. Языком этого исчисления является $L_{\&\supset}$. Правило modus ponens в $L_{\&\supset}$ есть единственное правило исчисления $HCl_{\&\supset}$. Аксиомами этого исчисления являются все те и только те $L_{\&\supset}$-формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих видов (здесь A, B и C – $L_{\&\supset}$-формулы): (1) $((A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)))$, (2) $((A\&B) \supset A)$, (3) $((A\&B) \supset B)$, (4) $((C \supset A) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset (A\&B))))$, (5) $((A \supset (B \supset C)) \supset ((A\&B) \supset C))$, (6) $(((A\&B) \supset C) \supset (A \supset (B \supset C)))$, (7) $(((A \supset B) \supset A) \supset A)$.

Определение $HCl_{\&\supset}$-доказательства $L_{\&\supset}$-формулы обычно: α есть $HCl_{\&\supset}$-доказательство $L_{\&\supset}$-формулы A, если существует такое целое положительное число

n и такие $L_{\&\supset}$-формулы $A_1, \dots, A_n$, что α есть n-членная последовательность $L_{\&\supset}$-формул, первый член которой есть A_1, ..., n-й член которой есть A_n, и выполняются следующие два условия: (I) A_n есть A, (II) для всякого целого положительного числа i, которое $\leq n$, A_i есть аксиома исчисления $HCl_{\&\supset}$ или существуют такие целые положительные числа k и l, каждое из которых меньше i, что $\langle A_k, A_l, A_i\rangle$ есть применение правила modus ponens в $L_{\&\supset}$. Можно доказать следующую теорему об аксиоматизируемости классической конъюнктивно-импликативной логики посредством исчисления $HCl_{\&\supset}$: для всякой $L_{\&\supset}$-формулы A: A принадлежит классической конъюнктивно-импликативной логике тогда и только тогда, когда существует $HCl_{\&\supset}$-доказательство $L_{\&\supset}$-формулы A.

Легко проверить, что верна следующая лемма 1.

Лемма 1. Всякая аксиома исчисления $HCl_{\&\supset}$ является $L_{\&\supset}$-формулой, общезначимой в $L_{\&\supset}$-матрице $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \underline{\&}, \supset(1, 0, 0, 1)\rangle$.

Лемма 2. Для всяких $L_{\&\supset}$-формул A и B: если A есть $L_{\&\supset}$-формула, общезначимая в $L_{\&\supset}$-матрице $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \underline{\&}, \supset(1, 0, 0, 1)\rangle$, и $(A \supset B)$ есть $L_{\&\supset}$-формула, общезначимая в $L_{\&\supset}$-матрице $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \underline{\&}, \supset(1, 0, 0, 1)\rangle$, то B есть $L_{\&\supset}$-формула, общезначимая в $L_{\&\supset}$-матрице $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \underline{\&}, \supset(1, 0, 0, 1)\rangle$.

Можно построить доказательство леммы 2, аналогичное доказательству леммы 6, данному в (Попов 2019), опираясь на следующий аналог леммы 5, сформулированной в (Попов 2019): для всякой $L_{\&\supset}$-формулы A, для всякой оценки v языка $L_{\&\supset}$ в $L_{\&\supset}$-матрице $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \underline{\&}, \supset(1, 0, 0, 1)\rangle$: если $|A|_v^{\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\underline{\&},\supset(1,0,0,1)\rangle} = 1/2$, то A есть пропозициональная переменная языка $L_{\&\supset}$.

Лемма 3. Для всякого целого положительного числа n и для всяких $L_{\&\supset}$-формул $A_1, \dots, A_n$: если для всякого целого положительного числа i, которое $\leq n$, A_i есть аксиома исчисления $HCl_{\&\supset}$ или существуют такие целые положительные числа k и l, каждое из которых меньше i, что $\langle A_k, A_l, A_i\rangle$ есть применение правила modus ponens в $L_{\&\supset}$, то A есть $L_{\&\supset}$-формула, общезначимая в $L_{\&\supset}$-матрице $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \underline{\&}, \supset(1, 0, 0, 1)\rangle$.

Стандартное индуктивное доказательство (методом возвратной индукции) леммы 3 проведено с использованием лемм 1 и 2.

Докажем теперь утверждение 1.1.

(1) A_0 есть $L_{\&\supset}$-формула (допущение).

(2) A_0 принадлежит классической конъюнктивно-импликативной логике (допущение).

(3) A_0 принадлежит классической конъюнктивно-импликативной логике тогда и только тогда, когда существует $HCl_{\&\supset}$-доказательство $L_{\&\supset}$-формулы A_0 (из (1) и теоремы об аксиоматизируемости классической конъюнктивно-импликативной логики посредством исчисления $HCl_{\&\supset}$).

(4) Существует $HCl_{\&\supset}$-доказательство $L_{\&\supset}$-формулы A_0 (из (2) и (3)).

Пусть

(5) α_0 есть $HCl_{\&\supset}$-доказательство $L_{\&\supset}$-формулы A_0.

(6) Существует такое целое положительное число n и такие $L_{\&\supset}$-формулы $A_1, \dots,$ A_n, что α_0 есть n-членная последовательность $L_{\&\supset}$-формул, первый член которой есть A_1, ..., n-й член которой есть A_n и выполняются следующие два условия: (I) A_n есть A_0, (II) для всякого целого положительного числа i, которое $\leq n$, A_i есть аксиома исчисления $HCl_{\&\supset}$ или существуют такие целые положительные числа k и l, каждое из которых меньше i, что $\langle A_k, A_l, A_i\rangle$ есть применение правила modus ponens в $L_{\&\supset}$.

Пусть

(7) n_0 — целое положительное число, $A'_1, \dots, A'_{n_0}$ — $L_{\&\supset}$-формулы, α_0 есть n-членная последовательность $L_{\&\supset}$-формул, первый член которой есть A'_1, ..., n_0-й член которой есть A'_{n_0} и выполняются следующие два условия: (I) A'_{n_0} есть A_0, (II) для всякого целого положительного числа i, которое $\leq n$, A'_i есть аксиома исчисления $HCl_{\&\supset}$ или существуют такие целые положительные числа k и l, каждое из которых меньше i, что $\langle A'_k, A'_l, A'_i\rangle$ есть применение правила modus ponens в $L_{\&\supset}$.

Опираясь на утверждение (7) и используя лемму 3, получаем, что

(8) A_0 есть $L_{\&\supset}$-формула, общезначимая в $L_{\&\supset}$-матрице $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \underline{\&}, \supset(1, 0, 0, 1)\rangle$.

Снимая допущения (2) и (1) и обобщая, завершаем доказательство утверждения 1.1.

Утверждение 1.1 доказано.

Методом индукции по построению $L_{\&\supset}$-формулы нетрудно доказать следующую лемму 4.

Лемма 4. Для всякой $L_{\&\supset}$-формулы A, для всякой оценки v языка $L_{\&\supset}$ в $L_{\&\supset}$-матрице $M^2_{\&\supset}$: $|A|_v^{M^2_{\&\supset}} = |A|_v^{\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\underline{\&},\supset(1,0,0,1)\rangle}$.

Лемма 4 доказана методом индукции по построению $L_{\&\supset}$-формулы.

Докажем утверждение 1.2.

(1) A_0 есть $L_{\&\supset}$-формула (допущение).

(2) A_0 есть $L_{\&\supset}$-формула, общезначимая в $L_{\&\supset}$-матрице $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \underline{\&}, \supset(1, 0, 0, 1)\rangle$ (допущение).

(3) Существует такая оценка v языка $L_{\&\supset}$ в $L_{\&\supset}$-матрице $M^2_{\&\supset}$, что $|A|_v^{M^2_{\&\supset}} \neq 1$ (допущение).

Пусть

(4) w есть оценка языка $L_{\&\supset}$ в $L_{\&\supset}$--матрице $M^2_{\&\supset}$, что $|A_0|_w^{M^2_{\&\supset}} \neq 1$.

(5) w есть оценка языка $L_{\&\supset}$ в $L_{\&\supset}$-матрице $M^2_{\&\supset}$ (из (4)).

(6) $|A_0|_w^{M^2_{\&\supset}} \neq 1$ (из (4)).

(7) $|A_0|_w^{M^2_{\&\supset}} = |A_0|_w^{\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\underline{\&},\supset(1,0,0,1)\rangle}$ (из (1) и (5), по лемме 4).

(8) $|A_0|_w^{\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\underline{\&},\supset(1,0,0,1)\rangle} \neq 1$ (из (6) и (7)).

Разумеется, что

(9) w есть оценка языка $L_{\&\supset}$ в $L_{\&\supset}$-матрице $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \underline{\&}, \supset(1, 0, 0, 1)\rangle$.

(10) Существует такая оценка v языка $L_{\&\supset}$ в $L_{\&\supset}$-матрице $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \underline{\&}, \supset(1, 0, 0, 1)\rangle$, что $|A_0|_v^{\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\underline{\&},\supset(1,0,0,1)\rangle} \neq 1$ (из (8) и (9)).

Ввиду утверждения (10), определения 2, замечания 1 и определения 4 ясно, что

(11) A_0 не является $L_{\&\supset}$-формулой, общезначимой в $L_{\&\supset}$-матрице $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \underline{\&}, \supset(1, 0, 0, 1)\rangle$.

Утверждение (11) противоречит утверждению (2). Следовательно, неверно допущение (3). В таком случае справедливо утверждение (12).

(12) Для всякой оценки v языка $L_{\&\supset}$ в $L_{\&\supset}$-матрице $M^2_{\&\supset}$, что $|A_0|_v^{M^2_{\&\supset}} = 1$.

Но тогда очевидно, что

(13) A_0 есть $L_{\&\supset}$-формула, общезначимая в $L_{\&\supset}$-матрице $M^2_{\&\supset}$.

(14) A_0 принадлежит классической конъюнктивно-импликативной логике (из (13), по определению 6).

Снимая допущение (2), получаем, что

(15) если A_0 есть $L_{\&\supset}$-формула, общезначимая в $L_{\&\supset}$-матрице $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \underline{\&}, \supset(1, 0, 0, 1)\rangle$, то A_0 принадлежит классической конъюнктивно-импликативной логике.

Снимая допущение (1) и обобщая, завершаем доказательство утверждения 1.2.

Утверждение 1.2 доказано.

Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. Не существует операции ψ, для которой $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \psi, \supset(1/2, 0, 0, 1/2)\rangle$ есть $L_{\&\supset}$-матрица, адекватная классической конъюнктивно-импликативной логике.

Доказательство утверждения 2 проводим методом от противного.

(1) Существует операция ψ, для которой $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \psi, \supset(1/2, 0, 0, 1/2)\rangle$ есть $L_{\&\supset}$-матрица, адекватная классической конъюнктивно-импликативной логике (допущение).

Пусть

(2) ψ_0 есть операция, для которой $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \psi_0, \supset(1/2, 0, 0, 1/2)\rangle$ есть $L_{\&\supset}$-матрица, адекватная классической конъюнктивно-импликативной логике.

(3) $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \psi_0, \supset(1/2, 0, 0, 1/2)\rangle$ есть $L_{\&\supset}$-матрица, адекватная классической конъюнктивно-импликативной логике (из (2)).

(4) Для всякой $L_{\&\supset}$-формулы A верно следующее: A принадлежит классической конъюнктивно-импликативной логике тогда и только тогда, когда A есть $L_{\&\supset}$-формула, общезначимая в $L_{\&\supset}$-матрице $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \psi_0, \supset(1/2, 0, 0, 1/2)\rangle$ (из (3) и замечания 2, по определению 5).

Легко убедиться, что

(5) $((p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset ((p_1 \& p_2) \supset p_3))$ есть $L_{\&\supset}$-формула, общезначимая в $L_{\&\supset}$-матрице $M^2_{\&\supset}$.

(6) $((p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset ((p_1 \& p_2) \supset p_3))$ принадлежит классической конъюнктивно-импликативной логике тогда и только тогда, когда $((p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset ((p_1 \& p_2) \supset p_3))$ есть $L_{\&\supset}$-формула, общезначимая в $L_{\&\supset}$-матрице $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \psi_0, \supset(1/2, 0, 0, 1/2)\rangle$ (из (4) и того, что $((p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset ((p_1 \& p_2) \supset p_3))$ есть $L_{\&\supset}$-формула).

(7) $((p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset ((p_1 \& p_2) \supset p_3))$ принадлежит классической конъюнктивно-импликативной логике (из (5), по определению 6).

(8) $((p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset ((p_1 \& p_2) \supset p_3))$ есть $L_{\&\supset}$-формула, общезначимая в $L_{\&\supset}$-матрице $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \psi_0, \supset(1/2, 0, 0, 1/2)\rangle$ (из (6) и (7)).

(9) $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \psi_0, \supset(1/2, 0, 0, 1/2)\rangle$ есть $L_{\&\supset}$-матрица (из (3)).

Опираясь на утверждение (9) и на определение 2, получаем, что

(10) ψ_0 есть бинарная операция на $\{1, 1/2, 0\}$.

Ввиду утверждения (10) понятно, что

(11) для всяких x и y из $\{1, 1/2, 0\}$ $(x\psi_0 y) \in \{1, 1/2, 0\}$.

Но тогда

(12) $(1/2\psi_0 0) \in \{1, 1/2, 0\}$.

(13) $(1/2\psi_0 0) = 1$, или $(1/2\psi_0 0) = 1/2$, или $(1/2\psi_0 0) = 0$ (из (12)).

Ясно, что

(14) $\{\langle p_2, 0\rangle\} \cup \{\langle p_i, 1/2\rangle \mid i$ есть целое положительное число, отличное от $2\}$ и $\{p_1, 1/2\rangle\} \cup \{\langle p_i, 0\rangle \mid i$ есть целое положительное число, отличное от $1\}$ являются оценками языка $L_{\&\supset}$ в $L_{\&\supset}$-матрице $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \psi_0, \supset(1/2, 0, 0, 1/2)\rangle$.

Условимся, что

(15) $v_1 = \{\langle p_2, 0\rangle\} \cup \{\langle p_i, 1/2\rangle \mid i$ есть целое положительное число, отличное от $2\}$ и $v_2 = \{\langle p_1, 1/2\rangle\} \cup \{\langle p_i, 0\rangle \mid i$ есть целое положительное число, отличное от $1\}$.

(16) $(1/2\psi_0 0) = 1$ (допущение).

Опираясь на утверждения (9), (14), (15), (16), на замечание 1 и на то, что $p_1, p_2, p_3, (p_1 \& p_2), (p_2 \supset p_3), ((p_1 \& p_2) \supset p_3), (p_1 \supset (p_2 \supset p_3))$ являются $L_{\&\supset}$-формулами, получаем, что

(17) $|((p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset ((p_1 \& p_2) \supset p_3))|_{v_1}^{\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\psi_0,\supset(1/2,0,0,1/2)\rangle} = 1/2$.

Опираясь на (17), получаем, что

(18) $|((p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset ((p_1 \& p_2) \supset p_3))|_{v_1}^{\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\psi_0,\supset(1/2,0,0,1/2)\rangle} \notin \{1\}$.

(19) Для некоторой оценки v языка $L_{\&\supset}$ в $L_{\&\supset}$-матрице $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \psi_0, \supset(1/2, 0, 0, 1/2)\rangle$ верно, что

$$|((p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset ((p_1 \& p_2) \supset p_3))|_{v}^{\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\psi_0,\supset(1/2,0,0,1/2)\rangle} \notin \{1\}$$

(из (14), (15) и (18)).

Снимая допущение (16), получаем, что

(20) Если $(1/2\psi_0 0) = 1$, то для некоторой оценки v языка $L_{\&\supset}$ в $L_{\&\supset}$-матрице $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \psi_0, \supset(1/2, 0, 0, 1/2)\rangle$ верно, что $|((p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset ((p_1 \& p_2) \supset p_3))|_v^{\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\psi_0,\supset(1/2,0,0,1/2)\rangle} \notin \{1\}$.

(21) $(1/2\psi_0 0) = 1/2$ (допущение).

Опираясь на утверждения (9), (14), (15), (21), на замечание 1 и на то, что p_1, p_2, p_3, $(p_1 \& p_2), (p_2 \supset p_3), ((p_1 \& p_2) \supset p_3), (p_1 \supset (p_2 \supset p_3))$ являются $L_{\&\supset}$-формулами, получаем, что

(22) $|((p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset ((p_1 \& p_2) \supset p_3))|_{v_2}^{\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\psi_0,\supset(1/2,0,0,1/2)\rangle} = 0$.

Но тогда

(23) $|((p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset ((p_1 \& p_2) \supset p_3))|_{v_2}^{\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\psi_0,\supset(1/2,0,0,1/2)\rangle} \notin \{1\}$.

(24) Для некоторой оценки v языка $L_{\&\supset}$ в $L_{\&\supset}$-матрице $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \psi_0$, $\supset(1/2, 0, 0, 1/2)\rangle$ верно, что

$$|((p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset ((p_1 \& p_2) \supset p_3))|_v^{\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\psi_0,\supset(1/2,0,0,1/2)\rangle} \notin \{1\}$$

(из (14), (15) и (23)).

Снимая допущение (21), получаем, что

(25) Если $(1/2\psi_0 0) = 1/2$, то для некоторой оценки v языка $L_{\&\supset}$ в $L_{\&\supset}$-матрице $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \psi_0, \supset(1/2, 0, 0, 1/2)\rangle$ верно, что $|((p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset ((p_1 \& p_2) \supset p_3))|_v^{\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\psi_0,\supset(1/2,0,0,1/2)\rangle} \notin \{1\}$.

(26) $(1/2\psi_0 0) = 0$ (допущение).

Опираясь на утверждения (9), (14), (15), (26), на замечание 1 и на то, что p_1, p_2, p_3, $(p_1 \& p_2), (p_2 \supset p_3), ((p_1 \& p_2) \supset p_3), (p_1 \supset (p_2 \supset p_3))$ являются $L_{\&\supset}$-формулами, получаем, что

(27) $|((p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset ((p_1 \& p_2) \supset p_3))|_{v_2}^{\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\psi_0,\supset(1/2,0,0,1/2)\rangle} = 1/2$.

Но тогда

(28) $|((p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset ((p_1 \& p_2) \supset p_3))|_{v_2}^{\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\psi_0,\supset(1/2,0,0,1/2)\rangle} \notin \{1\}$.

(29) Для некоторой оценки v языка $L_{\&\supset}$ в $L_{\&\supset}$-матрице $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \psi_0$, $\supset(1/2, 0, 0, 1/2)\rangle$ верно, что

$$|((p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset ((p_1 \& p_2) \supset p_3))|_v^{\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\psi_0,\supset(1/2,0,0,1/2)\rangle} \notin \{1\}$$

(из (14), (15) и (28)).

Снимая допущение (26), получаем, что

(30) Если $(1/2\psi_0 0) = 0$, то для некоторой оценки v языка $L_{\&\supset}$ в $L_{\&\supset}$-матрице $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \psi_0, \supset(1/2, 0, 0, 1/2)\rangle$ верно, что $|((p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset ((p_1 \& p_2) \supset p_3))|_v^{\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\psi_0,\supset(1/2,0,0,1/2)\rangle} \notin \{1\}$.

(31) Для некоторой оценки v языка $L_{\&\supset}$ в $L_{\&\supset}$-матрице $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \psi_0, \supset(1/2, 0, 0, 1/2)\rangle$ верно, что

$$|((p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset ((p_1 \& p_2) \supset p_3))|_v^{\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\psi_0,\supset(1/2,0,0,1/2)\rangle} \notin \{1\}$$

(из (13), (20), (25) и (30)).

Опираясь на утверждение (8) и применяя определения 2 и 4, делаем вывод о том, что

(32) Для всякой оценки v языка $L_{\&\supset}$ в $L_{\&\supset}$-матрице $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \psi_0, \supset(1/2, 0, 0, 1/2)\rangle$ верно, что

$$|((p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset ((p_1 \& p_2) \supset p_3))|_v^{\langle\{1,1/2,0\},\{1\},\psi_0,\supset(1/2,0,0,1/2)\rangle} \in \{1\}.$$

Утверждение (32) противоречит утверждению (31). Следовательно, неверно допущение (1). Таким образом, не существует операции ψ, для которой $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \psi, \supset(1/2, 0, 0, 1/2)\rangle$ есть $L_{\&\supset}$-матрица, адекватная классической конъюнктивно-импликативной логике.

Утверждение 2 доказано.

Литература

Попов 2019 — *Попов В. М.* Трехзначные логические матрицы с одним выделенным значением, адекватные классической импликативной логике // Логико-философские штудии. 2019. Т. 17, № 2. С. 142–193.