Владимир Попов[1]

О РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ВСЕХ ТАБЛИЧНЫХ PNL-ЛОГИК[2]

Аннотация. В (Попов 2018) проводилось исследование счетно-бесконечной иерархии табличных PNL-логик — логик $PNL[3]$, $PNL[4]$, $PNL[5]$ и т. д. Центральный результат предлагаемой статьи: $\cap_{i \in N} PNL[i+2]$ является разрешимой паранормальной логикой.
Ключевые слова: разрешимая логика, паранормальная логика, логическая матрица, табличная логика.

Vladimir Popov

ON THE DECIDABILITY OF THE INTERSECTION OF ALL TABULAR PNL-LOGICS

Abstract. In previous work (Попов 2018), we studied one countably infinite hierarchy of tabular PNL-logics (that is, $PNL[3]$, $PNL[4]$, $PNL[5]$ and so on). The central result of the present article: $\cap_{i \in N} PNL[i+2]$ is a decidable paranormal logic.
Keywords: decidable logic, paranormal logic, logical matrix, tabular logic.

Для цитирования: *Попов В. М.* О разрешимости пересечения всех табличных PNL-логик // Логико-философские штудии. 2021. Т. 19, № 3. С. 203–246. doi: 10.52119/LPHS.2021.85.26.003.

Основной текст работы состоит из двух параграфов (§ 1 и § 2). В § 1 описаны язык рассматриваемых логик и сами эти логики, даны требуемые определения, соглашения и замечания, доказано, что $\cap_{i \in N} PNL[i+2]$ является паранормальной логикой. В § 2 показано, что $\cap_{i \in N} PNL[i+2]$ есть разрешимая логика. Завершает статью миниатюрная заключительная часть, в которой сделан вывод о том, что $\cap_{i \in N} PNL[i+2]$ есть пересечение всех табличных PNL-логик, являющееся разрешимой нетабличной паранормальной логикой, и указано, что множество всех PNL-логик счетно-бесконечно.

[1] *Попов Владимир Михайлович* — кандидат философских наук, доцент кафедры логики философского факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.
Vladimir Popov, Ph.D., associate professor, Department of Logic, Faculty of Philosophy, Lomonosov Moscow State University.
pphiloslog@mail.ru
[2] Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 19-011-00536 А.

1

Язык L является стандартно определяемым пропозициональным языком, алфавит которого есть множество $\{\&, \vee, \supset, \neg,), (, p_1, p_2, p_3, ...\}$ символов. Здесь $\&$, $\vee$, $\supset$ — бинарные логические связки языка L, $\neg$ — унарная логическая связка языка L,), (— технические символы языка L, $p_1, p_2, p_3, ...$ — пропозициональные переменные языка L.

Определение L-формулы обычно: (1) если A есть пропозициональная переменная языка L, то A есть L-формула, (2) если A и B являются L-формулами, то $(A\&B)$, $(A \vee B)$, $(A{\supset}B)$, $(\neg A)$ являются L-формулами, (3) ничто другое не является L-формулой.

Определение 1. Логикой называем непустое множество L-формул, замкнутое относительно правила modus ponens в L и относительно правила пропозициональной подстановки в L.

Заметим, что «правило пропозициональной подстановки в L» есть сокращение для «правило подстановки L-формулы в L-формулу вместо пропозициональной переменной языка L».

Определение 2. Называем T теорией логики $\mathbf{L}$, если $\mathbf{L}$ есть логика, T есть множество L-формул, включающее $\mathbf{L}$ и замкнутое относительно правила modus ponens в L.

Определение 3. Называем T противоречивой теорией логики $\mathbf{L}$, если T есть теория логики $\mathbf{L}$ и для некоторой L-формулы A: $A \in T$ и $(\neg A) \in T$.

Определение 4. Называем T паранепротиворечивой теорией логики $\mathbf{L}$, если T есть противоречивая теория логики $\mathbf{L}$ и T не является множеством всех L-формул.

Определение 5. Называем $\mathbf{L}$ паранепротиворечивой логикой, если существует паранепротиворечивая теория логики $\mathbf{L}$.

Определение 6. Называем T полной теорией логики $\mathbf{L}$, если T есть теория логики $\mathbf{L}$ и для всякой L-формулы A: $A \in T$ или $(\neg A) \in T$.

Определение 7. Называем T параполной теорией логики $\mathbf{L}$, если T есть теория логики $\mathbf{L}$, не являющаяся полной теорией логики $\mathbf{L}$, и всякая полная теория логики $\mathbf{L}$, включающая T, равна множеству всех L-формул.

Определение 8. Называем $\mathbf{L}$ параполной логикой, если существует параполная теория логики $\mathbf{L}$.

Определение 9. Называем $\mathbf{L}$ паранормальной логикой, если $\mathbf{L}$ является паранепротиворечивой логикой и параполной логикой.

Соглашение 1. Обозначаем через N множество всех целых положительных чисел.

Соглашение 2. Обозначаем $\{x \mid k \in N, k > 2$, для некоторого y из N: $y \le k$ и $x = \dfrac{1}{y}\}$ через $[k]$.

Например, $[3] = \{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\}$, $[4] = \{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}\}$, $[5] = \{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}\}$.

Соглашение 3. Обозначаем $\{\langle x, y, z\rangle \mid k \in N,\ k > 2,\ x, y \in [k]$ и $z = min(\{x, y\})\}$ через $\&[k]$.

Соглашение 4. Обозначаем $\{\langle x, y, z\rangle \mid k \in N,\ k > 2,\ x, y \in [k]$ и $z = max(\{x, y\})\}$ через $\vee[k]$.

Соглашение 5. Обозначаем

$$\left\{\langle x, y, z\rangle \;\middle|\; k \in N, k > 2, x, y \in [k] \text{ и } z = \begin{cases} 1, \text{ если } x \le y, \\ y, \text{ если } x > y, \end{cases}\right\}$$

через $\supset[k]$.

Соглашение 6. Обозначаем

$$\left\{\langle x, y\rangle \mid k \in N, k > 2, x \in [k] \text{ и } y = \begin{cases} 1, \text{ если } x = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{2}, \text{ если } x = 1, \\ x, \text{ если } x \ne 1 \text{ и } x \ne \dfrac{1}{2}, \end{cases}\right\}$$

через $\neg[k]$.

Ясно, что для всякого целого числа k, которое больше 2, $\&[k]$, $\vee[k]$ и $\supset[k]$ являются бинарными операциями на $[k]$, а $\neg[k]$ есть унарная операция на k.

Соглашение 7. Обозначаем упорядоченную шестерку $\langle [k], \{1\}, \&[k], \vee[k], \supset[k], \neg[k]\rangle$, где $k \in N$ и $k > 2$, через $M[k]$.

Очевидно следующее: для всякого такого k, что $k \in N$ и $k > 2$, верно, что $M[k]$ есть логическая матрица.

Определение 10. Называем v оценкой языка L в логической матрице $M[k]$ (или $M[k]$-оценкой), если $k \in N$, $k > 2$ и v есть отображение множества всех пропозициональных переменных языка L в $[k]$.

Замечание 1. Можно доказать, что для всякого такого k из N, что $k > 2$, существует такое единственное отображение (обозначаем его через $f_{[k]}$) множества всех упорядоченных пар, имеющих вид $\langle A, v\rangle$, где A есть L-формула и v есть $M[k]$-оценка, в множество $[k]$, что выполняются следующие условия:

(У1.k) $f_{[k]}(\langle q, v\rangle) = v(q)$ для всякой $M[k]$-оценки v и для всякой пропозициональной переменной q языка L,

(У2.k) $f_{[k]}(\langle (A\&B), v\rangle) = (f_{[k]}(\langle A, v\rangle)\&[k]f_{[k]}(\langle B, v\rangle))$ для всякой $M[k]$-оценки v и для всяких L-формул A и B языка L,

(У3.k) $f_{[k]}(\langle (A \vee B), v\rangle) = (f_{[k]}(\langle A, v\rangle) \vee [k]f_{[k]}(\langle B, v\rangle))$ для всякой $M[k]$-оценки v и для всяких L-формул A и B языка L,

(У4.k) $f_{[k]}(\langle (A \supset B), v\rangle) = (f_{[k]}(\langle A, v\rangle) \supset [k]f_{[k]}(\langle B, v\rangle))$ для всякой $M[k]$-оценки v и для всяких L-формул A и B языка L,

(У5.k) $f_{[k]}(\langle (\neg A), v\rangle) = \neg[k](f_{[k]}(\langle A, v\rangle))$ для всякой $M[k]$-оценки v и для всякой L-формулы A языка L.

Соглашение 8. Результат применения отображения $f_{[k]}$ (где $k \in N$ и $k > 2$) к упорядоченной паре $\langle A, v\rangle$, где A есть L-формула и v есть $M[k]$-оценка, обозначаем через $|A|_v^{M[k]}$.

Определение 11. Называем A $M[k]$-общезначимой формулой, если A есть L-формула, $k \in N$, $k > 2$, для всякой $M[k]$-оценки v $|A|_v^{M[k]} = 1$.

Соглашение 9. Обозначаем $\{A \mid k \in N$, $k > 2$, A есть $M[k]$-общезначимая формула $\}$ через $PNL[k]$.

В [1] доказана теорема 5, гласящая, что для всякого целого числа k, которое больше 2, $PNL[k]$ есть паранормальная логика.

Замечание 2. $\cap_{i\in N}PNL[i+2]$ равно пересечению семейства $\{PNL[3]$, $PNL[4]$, $PNL[5], ...\}$ множеств.

Соглашение 10. Множество всех пропозициональных переменных языка L, входящих в L-формулу A, обозначаем через $W(A)$.

Лемма 1. $\cap_{i\in N}PNL[i+2]$ является логикой.

Ясно, что ввиду определения 1 для доказательства леммы 1 достаточно доказать следующие три утверждения.

Утверждение 1. $\cap_{i\in N}PNL[i+2]$ есть непустое множество L-формул.

Утверждение 2. Для всяких L-формул A и B: если $A \in \cap_{i\in N} PNL[i+2]$ и $(A \supset B) \in \cap_{i\in N} PNL[i+2]$, то $B \in \cap_{i\in N} PNL[i+2]$.

Утверждение 3. Для всяких L-формул A и B: если $A \in \cap_{i\in N} PNL[i+2]$ и B есть результат применения к A правила пропозициональной подстановки в L, то $B \in \cap_{i\in N} PNL[i+2]$.

Докажем утверждение 1.
Ясно, что

(1) $\cap_{i\in N} PNL[i+2]$ есть множество L-формул.

Легко убедиться, что

(2) для всякого i из N $(p_1 \supset p_1)$ есть $M[i+2]$-общезначимая формула.

(3) для всякого i из N $(p_1 \supset p_1) \in PNL[i+2]$ (из (2), по соглашению 9).

Опираясь на утверждение (3), получаем, что

(4) $(p_1 \supset p_1) \in \cap_{i\in N} PNL[i+2]$.

Опираясь на утверждения (1) и (4), получаем, что $\cap_{i\in N} PNL[i+2]$ есть непустое множество L-формул.
Утверждение 1 доказано.
Докажем утверждение 2.

(1) A_0 есть L-формула (допущение).

(2) B_0 есть L-формула (допущение).

(3) $A_0 \in \cap_{i\in N} PNL[i+2]$ и $(A_0 \supset B_0) \in \cap_{i\in N} PNL[i+2]$ (допущение).

(4) $B_0 \notin \cap_{i\in N} PNL[i+2]$ (допущение).

В свете утверждения (4) ясно, что

(5) для некоторого n из N $B_0 \notin PNL[n+2]$.

Пусть

(6) $n_0 \in N$, $B_0 \notin PNL[n_0+2]$.

(7) $n_0 \in N$ (из (6)).

(8) $B_0 \notin PNL[n_0+2]$ (из (6)).

Опираясь на утверждения (3) и (7), получаем, что

(9) $A_0 \in PNL[n_0 + 2]$ и $(A_0 \supset B_0) \in PNL[n_0 + 2]$.

Ввиду утверждения (9) и того, что $PNL[n_0 + 2]$ есть множество L-формул, замкнутых относительно modus ponens в L, получаем, что

(10) $B_0 \in PNL[n_0 + 2]$.

Утверждение (10) противоречит утверждению (8). Следовательно, неверно допущение (4). Но тогда

(11) $B_0 \in \cap_{i \in N} PNL[i + 2]$.

Снимая допущения (3), (2), (1) и обобщая, завершаем доказательство утверждения 2.

Утверждение 2 доказано.

Докажем утверждение 3.

(1) A_0 есть L-формула (допущение).

(2) B_0 есть L-формула (допущение).

(3) $A_0 \in \cap_{i \in N} PNL[i + 2]$ и B_0 есть результат применения к A_0 правила пропозициональной подстановки в L (допущение).

(4) $B_0 \notin \cap_{i \in N} PNL[i + 2]$ (допущение).

В свете утверждения (4) ясно, что

(5) для некоторого n из N $B_0 \notin PNL[n + 2]$.

Пусть

(6) $n_0 \in N$, $B_0 \notin PNL[n_0 + 2]$.

(7) $n_0 \in N$ (из (6)).

(8) $B_0 \notin PNL[n_0 + 2]$ (из (6)).

Опираясь на утверждения (3) и (7), получаем, что

(9) $A_0 \in PNL[n_0 + 2]$.

Ввиду утверждения (9) и того, что $PNL[n_0 + 2]$ есть множество L-формул, замкнутое относительно правила пропозициональной подстановки в L, получаем, что

(10) $B_0 \in PNL[n_0 + 2]$.

Утверждение (10) противоречит утверждению (8). Следовательно, неверно допущение (4). Но тогда

(11) $B_0 \in \cap_{i \in N} PNL[i+2]$.

Снимая допущения (3), (2), (1) и обобщая, завершаем доказательство утверждения 3.

Утверждение 3 доказано.

Итак, лемма 1 доказана.

Лемма 2. (принцип обратной наследуемости свойства «быть паранепротиворечивой логикой»). Для всяких логик L_1 и L_2: если L_1 включается в L_2 и L_2 есть паранепротиворечивая логика, то L_1 есть паранепротиворечивая логика.

Докажем лемму 2.

(1) L_1 есть логика (допущение).

(2) L_2 есть логика (допущение).

(3) L_1 включается в L_2 и L_2 есть паранепротиворечивая логика (допущение).

(4) L_1 включается в L_2 (из (3)).

(5) L_2 есть паранепротиворечивая логика (из (3)).

(6) Существует паранепротиворечивая теория логики L_2 (из (5), по определению 5).

Пусть

(7) T есть паранепротиворечивая теория логики L_2.

(8) T есть противоречивая теория логики L_2 (из (7), по определению 4).

(9) T не является множеством всех L-формул (из (7), по определению 4).

(10) T есть теория логики L_2 (из (8), по определению 3).

(11) Для некоторой L-формулы A: $A \in T$ и $(\neg A) \in T$ (из (8), по определению 3).

(12) T есть множество L-формул, включающее L_2 (из (10), по определению 2).

(13) T есть множество L-формул, замкнутое относительно правила modus ponens в L (из (10), по определению 2).

(14) T есть множество L-формул, включающее L_1 (из (4) и (12)).

Опираясь на утверждения (1), (13), (14) и используя определение 2, получаем, что

(15) T есть теория логики L_1.

(16) T есть противоречивая теория логики L_1 (из (11) и (15), по определению 3).

(17) T есть паранепротиворечивая теория логики L_1 (из (9) и (16), по определению 4).

Опираясь на утверждение (17) и используя определение 5, делаем вывод, что L_1 есть паранепротиворечивая логика.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. (принцип обратной наследуемости свойства «быть параполной логикой»). Для всяких логик L_1 и L_2: если L_1 включается в L_2 и L_2 есть параполная логика, то L_1 есть параполная логика.

Докажем лемму 3.

(1) L_1 есть логика (допущение).

(2) L_2 есть логика (допущение).

(3) L_1 включается в L_2 и L_2 есть параполная логика (допущение).

(4) L_1 включается в L_2 (из (3)).

(5) L_2 есть параполная логика (из (3)).

(6) Существует параполная теория логики L_2 (из (5), по определению 8).

Пусть

(7) T есть параполная теория логики L_2.

(8) T есть теория логики L_2, T не является полной теорией логики L_2, всякая полная теория логики L_2, включающая T, равна множеству всех L-формул (из (7), по определению 7).

(9) T есть теория логики L_2 (из (8)).

(10) T есть множество всех L-формул, включающее L_2 и замкнутое относительно правила modus ponens в L (из (9), по определению 2).

Опираясь на утверждение (10), получаем, что верны утверждения (11) и (12).

(11) T есть множество L-формул, включающее L_2.

(12) Для всяких L-формул A и B: если $A \in T$ и $(A \supset B) \in T$, то $B \in T$.

Опираясь на утверждения (4) и (11), получаем, что

(13) T есть множество L-формул, включающее L_1.

(14) T есть теория логики L_1 (из (1), (12), (13), по определению 2).

(15) T не является полной теорией логики L_2 (из (8))

Опираясь на утверждение (15) и применяя определение 6, получаем, что

(16) T не является теорией логики L_2 или для некоторой L-формулы A: $A \notin T$ и $(\neg A) \notin T$.

(17) Для некоторой L-формулы A: $A \in T$ и $(\neg A) \notin T$ (из (9) и (16)).

Применяя определение 6, получаем, что

(18) если T есть полная теория логики L_1, то для всякой L-формулы A: $A \in T$ или $(\neg A) \in T$.

(19) T не является полной теорией логики L_1 (из (17) и (18)).

(20) Всякая полная теория логики L_2, включающая T, равна множеству всех L-формул (из (6)).

Нам потребуется следующее утверждение (21).

(21) Для всякого множества Q L-формул, включающего T и замкнутого относительно правила modus ponens в L, выполняется условие: если для всякой L-формулы A верно, что $A \in Q$ или $(\neg A) \in Q$, то Q равно множеству всех L-формул.

Докажем утверждение (21).

(21.1) Q_0 есть множество L-формул (допущение).

(21.2) T включается в Q_0 (допущение).

(21.3) Q_0 замкнуто относительно правила modus ponens в L (допущение).

(21.4) Для всякой L-формулы A: $A \in Q_0$ или $(\neg A) \in Q_0$ (допущение).

(21.5) L_2 включается в Q_0 (из (11) и (21.2)).

(21.6) L_2 есть логика (из (2)).

(21.7) Q_0 есть теория логики L_2 (из (21.1), (21.3), (21.6), по определению 2).

(21.8) Q_0 есть полная теория логики L_2 (из (21.4), (21.7), по определению 6).

(21.9) Q_0 есть полная теория логики L_2, включающая T (из (21.2) и (21.8)).

(21.10) Q_0 равно множеству всех L-формул (из (20) и (21.9)).

Снимая допущения (21.4), (21.3), (21.2), (21.1) и обобщая, завершаем доказательство утверждения (21).

Утверждение (21) доказано.

Утверждение (21) используем при доказательстве следующего утверждения (22).

(22) Всякая полная теория логики L_1, включающая T, равна множеству всех L-формул.

Докажем утверждение (22).

(22.1) R есть полная теория логики L_1, включающая T (допущение).

(22.2) R есть полная теория логики L_1 (из (22.1)).

(22.3) T включается в R (из (22.1)).

(22.4) R есть теория логики L_1 (из (22.2), по определению 6).

(22.5) Для всякой L-формулы A: $A \in R$ или $(\neg A) \in R$ (из (22.2), по определению 6).

(22.6) R есть множество L-формул, замкнутое относительно правила modus ponens в L (из (22.4), по определению 2).

(22.7) R равно множеству всех L-формул (из (21), (22.3), (22.5), (22.6)).

Снимая допущение (22.1) и обобщая, завершаем доказательство утверждения (22).

Утверждение (22) доказано.

(23) T является параполной теорией логики L_1 (из (14), (19), (22), по определению 7).

Опираясь на утверждение (23) и используя определение 8, получаем, что

(24) L_1 есть параполная логика.

Снимая допущения (3), (2), (1) и обобщая, завершаем доказательство леммы 3.

Лемма 3 доказана.

Используя лемму 2, лемму 3 и определение 9, приходим к выводу, что верна следующая лемма 4.

Лемма 4. (принцип обратной наследуемости свойства «быть паранормальной логикой»). Для всяких логик L_1 и L_2: если L_1 включается в L_2 и L_2 есть паранормальная логика, то L_1 есть паранормальная логика.

Теорема 1. $\cap_{i \in N} PNL[i+2]$ есть паранормальная логика.

Докажем теорему 1.

Опираясь на теорему 5 из (Попов 2018) (формулировка этой теоремы приводилась выше) и учитывая, что 3 есть целое число, которое больше 2, получаем, что

(1) $PNL[3]$ есть паранормальная логика.

Ясно, что верны следующие утверждения (2) и (3).

(2) $PNL[3]$ есть логика.

(3) $\cap_{i \in N} PNL[i+2]$ включается в $PNL[3]$.

(4) если $\cap_{i \in N} PNL[i+2]$ включается в $PNL[3]$ и $PNL[3]$ есть паранормальная логика, то $\cap_{i \in N} PNL[i+2]$ есть паранормальная логика (из утверждения (2) и леммы 4).

(5) $\cap_{i \in N} PNL[i+2]$ есть паранормальная логика (из (1), (3) и (4)).

Теорема 1 доказана.

2

В этом параграфе дано доказательство разрешимости паранормальной логики $\cap_{i \in N} PNL[i+2]$.

Методом индукции по построению формулы доказаны нижеследующие лемма 5, лемма 6 и лемма 7.

Лемма 5. Для всякой L-формулы A, для всякого n из N, для всяких $M[n+2]$-оценок v_1 и v_2: если всякая пропозициональная переменная q языка L, входящая в A, такова, что $v_1(q) = v_2(q)$, то $|A|_{v_1}^{M[n+2]} = |A|_{v_2}^{M[n+2]}$.

Лемма 6. Для всякой L-формулы A, для всяких m и n из N и для всякой $M[m+2]$-оценки v верно, что $|A|_v^{M[m+2]} = |A|_v^{M[m+n+2]}$.

Лемма 7. Для всякой L-формулы A, для всякого m из N, для всяких таких пропозициональных переменных $z_1, \ldots, z_m$ языка L, что $W(A)$ включается в $\{z_1, \ldots, z_m\}$, для всякого такого n из N, что $n > 2$, и для всякой $M[n]$-оценки v верно, что $|A|_v^{M[n]} \in \{1, \frac{1}{2}, v(z_1), \ldots, v(z_m)\}$.

Лемма 8. Для всякой L-формулы A и для всякого m из N: если число всех пропозициональных переменных языка L, входящих в A, меньше или равно m, то верно следующее: A есть $M[m+2]$-общезначимая формула тогда и только тогда, когда для всякого n из N A есть $M[m+n+2]$-общезначимая формула.

Докажем лемму 8.

(1) A_0 есть L-формула (допущение).

(2) $m_0 \in N$ (допущение).

(3) Число всех пропозициональных переменных языка L, входящих в A_0, меньше или равно m_0 (допущение).

(4) A_0 есть $M[m_0+2]$-общезначимая формула (допущение).

(5) Неверно, что для всякого n из N A_0 есть $M[m_0+n+2]$-общезначимая формула (допущение).

(6) Для некоторого n из N A_0 не есть $M[m_0+n+2]$-общезначимая формула (из (5)).

Пусть

(7) $n_0 \in N$, A_0 не есть $M[m_0+n_0+2]$-общезначимая формула.

(8) $n_0 \in N$ (из (7)).

(9) A_0 не есть $M[m_0+n_0+2]$-общезначимая формула (из (7)).

Разумеется, что

(10) $m_0+n_0+2 \in N$ и $m_0+n_0+2 > 2$.

В свете утверждений (1), (9), (10) и определения 11 ясно, что

(11) для некоторой $M[m_0+n_0+2]$-оценки v $|A_0|_v^{M[m_0+n_0+2]} \neq 1$.

Пусть

(12) v_0 есть $M[m_0+n_0+2]$-оценка, $|A_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \neq 1$.

(13) v_0 есть $M[m_0+n_0+2]$-оценка (из (12)).

(14) $|A_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \neq 1$ (из (12)).

В свете утверждения (3) ясно, что

(15) существуют такие попарно различные пропозициональные переменные $z_1, \dots, z_{m_0}$ языка L, среди которых имеются все пропозициональные переменные языка L, входящие в A_0.

Пусть

(16) $q_1, \dots, q_{m_0}$ — попарно различные пропозициональные переменные языка L, причем множество всех пропозициональных переменных языка L, входящих в A_0, включается в $\{q_1, \dots, q_{m_0}\}$.

(17) $\{q_1, \dots, q_{m_0}\}$ — попарно различные пропозициональные переменные языка L (из (16)).

(18) Множество всех пропозициональных переменных языка L, входящих в A_0, включается в $\{q_1, \dots, q_{m_0}\}$ (из (16)).

(19) $v_0(q_1) \in M[m_0+2], \dots, v_0(q_{m_0}) \in M[m_0+2]$ (допущение).

Условимся, что

(20) $$w = \left\{ \langle q, x \rangle \;\middle|\; q \text{ есть пропозициональная переменная языка } L \text{ и } x = \begin{cases} v_0(q), & \text{если } v_0(q) \in M[m_0+2], \\ 1, & \text{если } v_0(q) \notin M[m_0+2] \end{cases} \right\}.$$

Ясно, что верны следующие утверждения (21), (22) и (23).

(21) w есть $M[m_0+2]$-оценка.

(22) w есть $M[m_0+n_0+2]$-оценка.

(23) $m_0 + n_0 \in N$.

(24) Если для всякой пропозициональной переменной q языка L, входящей в A_0, $v_0(q) = w(q)$, то $|A_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = |A_0|_{w}^{M[m_0+n_0+2]}$ (из (1), (13), (22), (23), по лемме 5).

(25) q_0 есть пропозициональная переменная языка L, входящая в A_0 (допущение).

(26) $q_0 \in \{q_1, \dots, q_{m_0}\}$ (из (18) и (25)).

(27) $v_0(q_0) \in [m_0+2]$ (из (19) и (26)).

Опираясь на утверждение (20), получаем, что

(28) $\langle q_0, v_0(q_0)\rangle \in w$ тогда и только тогда, когда

$$\langle q_0, v_0(q_0)\rangle \in \left\{ \langle q, x\rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} q \text{ есть пропозициональная переменная языка } L \\ \text{и } x = \begin{cases} v_0(q), \text{ если } v_0(q) \in [m_0+2], \\ 1, \text{ если } v_0(q) \notin [m_0+2] \end{cases} \end{array} \right\}.$$

Ясно, что

(29) $$\langle q_0, v_0(q_0)\rangle \in \left\{ \langle q, x\rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} q \text{ есть пропозициональная переменная языка } L \\ \text{и } x = \begin{cases} v_0(q), \text{ если } v_0(q) \in [m_0+2], \\ 1, \text{ если } v_0(q) \notin [m_0+2] \end{cases} \end{array} \right\}$$

тогда и только тогда, когда q_0 есть пропозициональная переменная языка L и $v_0(q_0) = \begin{cases} v_0(q_0), \text{ если } v_0(q) \in [m_0+2], \\ 1, \text{ если } v_0(q) \notin [m_0+2] \end{cases}$.

Опираясь на утверждение (25) и (27), получаем, что

(30) q_0 есть пропозициональная переменная языка L и

$$v_0(q_0) = \begin{cases} v_0(q_0), \text{ если } v_0(q) \in [m_0+2], \\ 1, \text{ если } v_0(q) \notin [m_0+2] \end{cases}.$$

(31) $\langle q_0, v_0(q_0)\rangle \in w$ (из (28), (29) и (30)).

Опираясь на утверждение (31), получаем, что

(32) $v_0(q_0) = w(q_0)$.

Снимая допущение (25) и обобщая, получаем, что

(33) для всякой пропозициональной переменной q_0 языка L, входящей в A_0, $v_0(q_0) = w(q_0)$.

(34) $|A_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = |A_0|_{w}^{M[m_0+n_0+2]}$ (из (24) и (33)).

(35) $|A_0|_{w}^{M[m_0+n_0+2]} \neq 1$ (из (14) и (34)).

(36) $|A_0|_{w}^{M[m_0+2]} = |A_0|_{w}^{M[m_0+n_0+2]}$ (из (1), (2), (8), (21), по лемме 6).

(37) $|A_0|_{w}^{M[m_0+2]} \neq 1$ (из (35) и (36)).

(38) Для некоторой $M[m_0+2]$-оценки v $|A_0|_v^{M[m_0+2]} \neq 1$ (из (21) и (37)).

(39) Неверно, что A_0 есть $M[m_0+2]$-общезначимая формула (из (38), по определению 11).

Утверждение (39) противоречит утверждению (4). Следовательно, неверно допущение (19). Но тогда верно следующее утверждение (40).

(40) Существует такая пропозициональная переменная q языка L, что $q \in \{q_1, \ldots, q_{m_0}\}$ и $v_0(q) \notin [m_0+2]$.

Вспомним, что

(41) $1, \dfrac{1}{2} \in [m_0+2]$.

(42) Существует такая пропозициональная переменная q языка L, что $q \in \{q_1, \ldots, q_{m_0}\}$ и $v_0(q) \notin \{1, \dfrac{1}{2}\}$ (из (40) и (41)).

Разумеется, что

(42) число всех таких x, что $x = v_0(q)$ для некоторой пропозициональной переменной q языка L, принадлежащей множеству $\{q_1, \ldots, q_{m_0}\}$, есть целое положительное число, которое меньше или равно m_0.

Опираясь на утверждения (41) и (42), получаем, что

(43) число всех таких x, что $x = v_0(q)$ для некоторой пропозициональной переменной q языка L, принадлежащей множеству $\{q_1, \ldots, q_{m_0}\}$, и при этом $x \notin \{1, \dfrac{1}{2}\}$, есть целое положительное число, которое меньше или равно m_0.

Условимся, что

(44) m' есть число всех таких x, что $x = v_0(q)$ для некоторой пропозициональной переменной q языка L, принадлежащей множеству $\{q_1, \ldots, q_{m_0}\}$, и при этом $x \notin \{1, \dfrac{1}{2}\}$.

Ввиду утверждений (43) и (44) ясно, что

(45) m' есть целое положительное число.

Условимся, что

(46) $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m'}$ — все такие x, что $x = v_0(q)$ для некоторой пропозициональной переменной q языка L, принадлежащей множеству $\{q_1, \ldots, q_{m_0}\}$, и $x \notin \{1, \dfrac{1}{2}\}$, причем $\alpha_1 > \ldots > \alpha_{m'}$.

Ясно, что

(47) $\{v_0(q_1), \ldots, v_0(q_{m_0})\} \subseteq \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{m'}\} \cup \{1, \frac{1}{2}\}$.

Можно доказать, что

(48) существует единственное множество всех таких упорядоченных пар, каждая упорядоченная пара $\langle q, x\rangle$ из которого такова, что q есть пропозициональная переменная языка L, а

$$x = \begin{cases} v_0(q), \text{ если } q \in \{q_1, \ldots, q_{m_0}\} \text{ и при этом } v_0(q) = 1 \text{ или } v_0(q) = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{1+2}, \text{ если } q \in \{q_1, \ldots, q_{m_0}\} \text{ и } v_0(q) = \alpha_1, \\ \vdots \\ \dfrac{1}{m'+2}, \text{ если } q \in \{q_1, \ldots, q_{m_0}\} \text{ и } v_0(q) = \alpha_{m'}, \\ 1, \text{ если } q \notin \{q_1, \ldots, q_{m_0}\}. \end{cases}$$

Условимся, что

(49) u есть то самое множество, существование и единственность которого утверждается в (48).

Понятно, что

(50) u есть $M[m_0+2]$-оценка.

Можно доказать, что

(51) существует единственное множество всех таких упорядоченных пар, каждая упорядоченная пара $\langle x, y\rangle$ из которого такова, что $x \in [m_0 + n_0 + 2]$, а

$$y = \begin{cases} x, \text{ если } x = 1 \text{ или } x = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{1+2}, \text{ если } x = \alpha_1, \\ \vdots \\ \dfrac{1}{m'+2}, \text{ если } x = \alpha_{m'}, \\ 1, \text{ если } x \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_,}\}. \end{cases}$$

Условимся, что

(52) h есть то самое множество существование и единственность которого утверждается в (51).

Опираясь на то, что $m' \leq m_0$, нетрудно доказать, что

(53) h есть отображение множества $[m_0 + n_0 + 2]$ в множество $[m_0 + 2]$.

Нетрудно убедиться, что верны нижеследующие утверждения (54), (55), (56), (57) и (58).

(54) Для всяких непустых конечных подмножеств M_1 и M_2 множества $[m_0+n_0+2]$: если $M_1 = M_2$, то $min(M_1) = min(M_2)$.

(55) Для всяких непустых конечных подмножеств M_1 и M_2 множества $[m_0 + 2]$: если $M_1 = M_2$, то $min(M_1) = min(M_2)$.

Заметим, что не существует минимума ни пустого множества, ни какого-либо бесконечного подмножества множества $[m_0 + n_0 + 2]$.

(56) Для всякого x из $[m_0 + n_0 + 2]$ $h(x) = h(x)$.

Заметим, что результат применения h к x не является определенным, если $x \notin [m_0 + n_0 + 2]$.

(57) $h(1) = 1$.

(58) $h(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

Докажем теперь следующее утверждение (59).

(59) Для всякой L-формулы B и для всякой L-формулы C: если $W(B) \subseteq \{q_1, \dots, q_{m_0}\}$, $W(C) \subseteq \{q_1, \dots, q_{m_0}\}$ и $|B|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} < |C|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}$, то $h(|B|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) < h(|C|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})$.

(59.1) B_0 есть L-формула (допущение).

(59.2) C_0 есть L-формула (допущение).

(59.3) $W(B_0) \subseteq \{q_1, \dots, q_{m_0}\}$, $W(C_0) \subseteq \{q_1, \dots, q_{m_0}\}$ и $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} < |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}$ (допущение).

(59.4) $W(B_0) \subseteq \{q_1, \dots, q_{m_0}\}$ (из (59.3)).

(59.5) $W(C_0) \subseteq \{q_1, \dots, q_{m_0}\}$ (из (59.3)).

(59.6) $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} < |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}$ (из (59.3)).

Ясно, что

(59.7) $m_0 + n_0 + 2 \in N$и $m_0 + n_0 + 2 > 2$.

Опираясь на утверждения (2), (13), (18), (59.1), (59.2), (59.4), (59.5), (59.7) и используя лемму 7, получаем, что верны следующие утверждения (59.8) и (59.9).

(59.8) $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \in \{1, \dfrac{1}{2}, v_0(q_1), \dots, v_0(q_{m_0})\}$.

(59.9) $|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \in \{1, \dfrac{1}{2}, v_0(q_1), \dots, v_0(q_{m_0})\}$.

Опираясь на то, что $\{1, \dfrac{1}{2}, v_0(q_1), \dots, v_0(q_{m_0})\} \subseteq \{\alpha_1, \dots, \alpha_{m'}\} \cup \{1, \dfrac{1}{2}\}$ (см. утверждение (47)), и на утверждения (59.8) и (59.9), получаем, что верны следующие утверждения (59.10) и (59.11).

(59.10) $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{m'}\} \cup \{1, \dfrac{1}{2}\}$.

(59.11) $|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{m'}\} \cup \{1, \dfrac{1}{2}\}$.

Опираясь на утверждения (59.10) и (59.11), получаем, что

(59.12) $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{m'}\}$ и $|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{m'}\}$,

или

$$|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{m'}\} \text{ и } |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = 1,$$

или

$$|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{m'}\} \text{ и } |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \frac{1}{2},$$

или

$$|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = 1 \text{ и } |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{m'}\},$$

или

$$|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = 1 \text{ и } |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = 1,$$

или

$$|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = 1 \text{ и } |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \frac{1}{2},$$

или

$$|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \frac{1}{2} \text{ и } |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{m'}\},$$

или

$$|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \frac{1}{2} \text{ и } |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = 1,$$

или

$$|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \frac{1}{2} \text{ и } |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \frac{1}{2}.$$

Опираясь на утверждения (59.6) и (59.12), получаем, что

(59.13) $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{m'}\}$ и $|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{m'}\}$,

или

$$|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{m'}\} \text{ и } |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = 1,$$

или

$$|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{m'}\} \text{ и } |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \frac{1}{2},$$

или

$$|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \frac{1}{2} \text{ и } |B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = 1.$$

(59.14) $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{m'}\}$ и $|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{m'}\}$ (допущение).

Опираясь на утверждения (45), (59.14) и на соглашение 1, получаем, что

(59.15) для некоторого i из N верно, что $i \leq m'$ и $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \alpha_i$, и для некоторого j из N верно, что $j \leq m'$ и $|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \alpha_j$.

Пусть

(59.16) $i_0 \in N$, $i_0 \leq m'$, $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \alpha_{i_0}$, $j_0 \in N$, $j_0 \leq m'$, $|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \alpha_{j_0}$,

(59.17) $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \alpha_{i_0}$, $|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \alpha_{j_0}$ (из (59.16)).

(59.18) $\alpha_{i_0} < \alpha_{j_0}$ (из (59.6) и (59.17)).

Но тогда

(59.19) $\alpha_{j_0} < \alpha_{i_0}$.

(59.20) $i_0 \in N$, $i_0 \leq m'$, $j_0 \in N$, $j_0 \leq m'$ (из (59.16)).

(59.21) $i_0 > j_0$ (из (46), (59.19) и (59.20)).

Опираясь на утверждения (51), (52), (53), (59.20), получаем, что

(59.22) $h(\alpha_{i_0}) = \dfrac{1}{i_0+2}$ и $h(\alpha_{j_0}) = \dfrac{1}{j_0+2}$.

В свете утверждения (59.21) ясно, что

(59.23) $\dfrac{1}{i_0+2} < \dfrac{1}{j_0+2}$.

(59.24) $h(\alpha_{i_0}) < h(\alpha_{j_0})$ (из (59.22) и (59.23)).

(59.25) $h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) < h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})$ (из (59.17) и (59.24)).

Снимая допущение (59.14), получаем, что

(59.26) если $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{m'}\}$ и $|C_0|_{v_0}^{M[m0+n0+2]} \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{m'}\}$, то $h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) < h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})$.

(59.27) $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{m'}\}$ и $|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = 1$ (допущение).

Опираясь на утверждения (45), (59.27) и на соглашение 1, получаем, что

(59.28) существует такое i из N, что $i \leq m'$ и $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \alpha_i$.

Пусть

(59.29) $i_0 \in N$, $i_0 \leq m'$, $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \alpha_{i_0}$.

Опираясь на утверждения (51), (52), (53) и (59.29), получаем, что

(59.30) $h(\alpha_{i_0}) = \dfrac{1}{i_0 + 2}$.

В свете того, что $i_0 \in N$, ясно, что

(59.31) $\dfrac{1}{i_0 + 2} < 1$.

(59.32) $h(\alpha_{i_0}) < h(1)$ (из (57), (59.30) и (59.31)).

(59.33) $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \alpha_{i_0}$ и $|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = 1$ (из (59.27) и (59.29)).

(59.34) $h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) < h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})$ (из (59.32) и (59.33)).

Снимая допущение (59.27), получаем, что

(59.35) если $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{m'}\}$ и $|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = 1$, то $h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})$ $< h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})$.

(59.36) $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{m'}\}$ и $|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \dfrac{1}{2}$ (допущение).

Опираясь на утверждения (45), (59.36) и на соглашение 1, получаем, что

(59.37) существует такое i из N, что $i \leq m'$ и $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \alpha_i$.

Пусть

(59.38) $i_0 \in N$, $i_0 \leq m'$, $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \alpha_{i_0}$.

Опираясь на утверждения (51), (52), (53) и (59.38), получаем, что

(59.39) $h(\alpha_{i_0}) = \dfrac{1}{i_0 + 2}$.

В свете того, что $i_0 \in N$, ясно, что

(59.40) $\dfrac{1}{i_0 + 2} < \dfrac{1}{2}$.

(59.41) $h(\alpha_{i_0}) < h(\dfrac{1}{2})$ (из (58), (59.39) и (59.40)).

(59.42) $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \alpha_{i_0}$ и $|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \dfrac{1}{2}$ (из (59.36) и (59.38)).

(59.43) $h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) < h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})$ (из (59.41) и (59.42)).

Снимая допущение (59.36), получаем, что

(59.44) если $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{m'}\}$ и $|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \dfrac{1}{2}$,
то $h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) < h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})$.

(59.45) $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \dfrac{1}{2}$ и $|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = 1$ (допущение).

Опираясь на утверждения (57) и (58), получаем, что

(59.46) $h(\dfrac{1}{2}) < h(1)$.

(59.47) $h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) < h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})$ (из (59.45) и (59.46)).

Снимая допущение (59.45), получаем, что

(59.48) если $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \dfrac{1}{2}$ и $|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = 1$,
то $h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) < h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})$.

(59.49) $h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) < h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})$ (из (59.13), (59.26), (59.35), (59.44) и (59.48)).

Снимая допущения (59.3), (59.2), (59.1) и обобщая, завершаем доказательство утверждения (59).

Утверждение (59) доказано.

Теперь докажем, что

(60) для всякой L-формулы A: если $W(A) \subseteq \{q_1, \dots, q_{m_0}\}$, то $h(|A|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |A|_u^{M[m_0+2]}$.

Для доказательства утверждения (60) методом индукции по построению L-формулы достаточно доказать следующие утверждения (60.1), (60.2), (60.3), (60.4) и (60.5).

(60.1) Для всякой пропозициональной переменной q языка L: если $W(q) \subseteq \{q_1, \dots, q_{m_0}\}$, то $h(|q|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |q|_u^{M[m_0+2]}$.

(60.2) Для всякой L-формулы B, для всякой L-формулы C:
если [(если $W(B) \subseteq \{q_1, \dots, q_{m_0}\}$, то $h(|B|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |B|_u^{M[m_0+2]}$

и

(если $W(C) \subseteq \{q_1, \dots, q_{m_0}\}$, то $h(|C|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |C|_u^{M[m_0+2]}$],
то верно следующее:
если $W((B\&C)) \subseteq \{q_1, \dots, q_{m_0}\}$, то $h(|(B\&C)|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |(B\&C)|_u^{M[m_0+2]}$.

(60.3) Для всякой L-формулы B, для всякой L-формулы C:
если [(если $W(B) \subseteq \{q_1, \dots, q_{m_0}\}$, то $h(|B|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |B|_u^{M[m_0+2]}$)

и

(если $W(C) \subseteq \{q_1, \dots, q_{m_0}\}$, то $h(|C|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |C|_u^{M[m_0+2]}$)],
то верно следующее:
если $W((B \vee C)) \subseteq \{q_1, \dots, q_{m_0}\}$, то $h(|(B \vee C)|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |(B \vee C)|_u^{M[m_0+2]}$.

(60.4) Для всякой L-формулы B, для всякой L-формулы C:
если [(если $W(B) \subseteq \{q_1, \dots, q_{m_0}\}$, то $h(|B|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |B|_u^{M[m_0+2]}$)

и

(если $W(C) \subseteq \{q_1, \dots, q_{m_0}\}$, то $h(|C|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |C|_u^{M[m_0+2]}$)],
то верно следующее:
если $W((B \supset C)) \subseteq \{q_1, \dots, q_{m_0}\}$, то $h(|(B \supset C)|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |(B \supset C)|_u^{M[m_0+2]}$.

(60.5) Для всякой L-формулы B: если (если $W(B) \subseteq \{q_1, \dots, q_{m_0}\}$, то $h(|B|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |B|_u^{M[m_0+2]}$,
то верно следующее:
если $W((\neg B)) \subseteq \{q_1, \dots, q_{m_0}\}$), то $h(|(\neg B)|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |(\neg B)|_u^{M[m_0+2]}$.

Докажем утверждение (60.1).

(60.1.1) q_0 есть пропозициональная переменная языка L (допущение).

(60.1.2) $W(q) \subseteq \{q_1, \dots, q_{m_0}\}$ (допущение).

В свете утверждения (60.1.2) и того, что $W(q_0) = \{q_0\}$, ясно, что

(60.1.3) $q_0 \in \{q_1, \dots, q_{m_0}\}$.

Ввиду утверждения (60.1.3) понятно, что

(60.1.4) $v_0(q_0) \in \{v_0(q_1), \dots, v_0(q_{m_0})\}$.

(60.1.5) $v_0(q_0) \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{m'}\} \cup \{1, \frac{1}{2}\}$ (из (47) и (60.1.4)).

(60.1.6) $v_0(q_0) \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{m'}\}$ или $v_0(q_0) \in \{1, \frac{1}{2}\}$ (из (60.1.5)).

Ясно, что

(60.1.7) $|q_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = v_0(q_0)$.

(60.1.8) $v_0(q_0) \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{m'}\}$ (допущение).

(60.1.9) $|q_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{m'}\}$ (из (60.1.7) и (60.1.8)).

(60.1.10) Существует такое целое положительное число i, что $i \leq m'$ и $|q_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \alpha_i$ (из (45) и (60.1.9)).

Пусть

(60.1.11) i_0 есть целое положительное число, $i_0 \leq m'$ и $|q_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \alpha_{i_0}$.

(60.1.12) $|q_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \alpha_{i_0}$ (из (60.1.11)).

(60.1.13) $\alpha_{i_0} \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{m'}\}$ (из (60.1.9) и (60.1.12)).

(60.1.14) $h(\alpha_{i_0}) = \dfrac{1}{i_0 + 2}$ (из (51), (52), (53) и (60.1.13)).

(60.1.15) $h(|q_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = \dfrac{1}{i_0 + 2}$ (из (60.1.12) и (60.1.14)).

(60.1.16) $v_0(q_0) = \alpha_{i_0}$ (из (60.1.7) и (60.1.12)).

(60.1.17) $q_0 \in \{q_1, \dots, q_{m_0}\}$ и $v_0(q_0) = \alpha_{i_0}$ (из (60.1.3) и (60.1.16)).

(60.1.18) i_0 есть целое положительное число, $i_0 \leq m'$ (из (60.1.11)).

Опираясь на утверждения (48), (49), (50), (60.1.17) и (60.1.18), получаем, что

(60.1.19) $u(q_0) = \dfrac{1}{i_0 + 2}$.

Ясно, что

(60.1.20) $|q_0|_{u}^{M[m_0+2]} = u(q_0)$.

(60.1.21) $|q_0|_{u}^{M[m_0+2]} = \dfrac{1}{i_0 + 2}$ (из (60.1.19) и (60.1.20)).

(60.1.22) $h(|q_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |q_0|_{u}^{M[m_0+2]}$ (из (60.1.15) и (60.1.21)).

Снимая допущение (60.1.8), получаем, что

(60.1.23) если $v_0(q_0) \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{m'}\}$, то $h(|q_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |q_0|_u^{M[m_0+2]}$.

(60.1.24) $v_0(q_0) \in \{1, \frac{1}{2}\}$ (допущение).

(60.1.25) $v_0(q_0) = 1$ или $v_0(q_0) = \frac{1}{2}$ (из (60.1.24)).

(60.1.26) $v_0(q_0) = 1$ (допущение).

(60.1.27) $|q_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = 1$ (из (60.1.7) и (60.1.26)).

(60.1.28) $h(|q_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = 1$ (из (57) и (60.1.27)).

(60.1.29) $q_0 \in \{q_1, \ldots, q_{m_0}\}$ и при этом $v_0(q_0) = 1$ или $v_0(q_0) = \frac{1}{2}$(из (60.1.3) и (60.1.25)).

(60.1.30) $\langle q_0, v_0(q_0)\rangle \in u$ (из (48), (49) и (60.1.29)).

Опираясь на утверждения (50) и (60.1.30), получаем, что

(60.1.31) $u(q_0) = v_0(q_0)$.

(60.1.32) $u(q_0) = 1$ (из (60.1.26) и (60.1.31)).

Ясно, что

(60.1.33) $|q_0|_u^{M[m_0+2]} = u(q_0)$.

(60.1.34) $|q_0|_u^{M[m_0+2]} = 1$ (из (60.1.32) и (60.1.33)).

(60.1.35) $h(|q_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |q_0|_u^{M[m_0+2]}$ (из (60.1.28) и (60.1.34)).

Снимая допущение (60.1.26), получаем, что

(60.1.36) если $v_0(q_0) = 1$, то $h(|q_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |q_0|_u^{M[m_0+2]}$.

Можно построить доказательство нижеследующего утверждения (∗), аналогичное данному выше доказательству утверждения (60.1.36).

(∗) Если $v_0(q_0) = \frac{1}{2}$, то $h(|q_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |q_0|_u^{M[m_0+2]}$.

Опираясь на утверждения (60.1.25), (60.1.36) и (∗), делаем вывод о том, что

(**) $h(|q_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |q_0|_u^{M[m_0+2]}$.

Снимая допущение (60.1.24), получаем, что

(***) если $v_0(q_0) \in \{1, \frac{1}{2}\}$, то $h(|q_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |q_0|_u^{M[m_0+2]}$.

(****) $h(|q_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |q_0|_u^{M[m_0+2]}$ (из (60.1.6), (60.1.23) и (***)).

Снимая допущения (60.1.2), (60.1.1) и обобщая, завершаем доказательство утверждения (60.1).

Утверждение (60.1) доказано.

Докажем утверждение (60.2).

(60.2.1) B_0 есть L-формула (допущение).

(60.2.2) C_0 есть L-формула (допущение).

(60.2.3) Если $W(B_0) \subseteq \{q_1, \ldots, q_{m_0}\}$, то $h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |B_0|_u^{M[m_0+2]}$, и если $W(C_0) \subseteq \{q_1, \ldots, q_{m_0}\}$, то $h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |C_0|_u^{M[m_0+2]}$ (допущение).

(60.2.4) $W((B_0\&C_0)) \subseteq \{q_1, \ldots, q_{m_0}\}$ (допущение).

Ясно, что

(60.2.5) $W(B_0) \subseteq W((B_0\&C_0))$ и $W(C_0) \subseteq W((B_0\&C_0))$.

(60.2.6) $W(B_0) \subseteq \{q_1, \ldots, q_{m_0}\}$ и $W(C_0) \subseteq \{q_1, \ldots, q_{m_0}\}$ (из (60.2.4) и (60.2.5)).

(60.2.7) $h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |B_0|_u^{M[m_0+2]}$ и $h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |C_0|_u^{M[m_0+2]}$ (из (60.2.3) и (60.2.6)).

Опираясь на утверждения (1) и (8), получаем, что

(60.2.8) $m_0 + n_0 + 2 \in N$, $m_0 + n_0 + 2 > 2$.

(60.2.9) $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \in \{1, \frac{1}{2}, v_0(q_1), \ldots, v_0(q_{m_0})\}$ и $|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \in \{1, \frac{1}{2}, v_0(q_1), \ldots, v_0(q_{m_0})\}$ (из (1), (13), (17), (60.2.1), (60.2.2), (60.2.6), (60.2.8), по лемме 7).

Понятно, что верны следующие утверждения (60.2.10) и (60.2.11).

(60.2.10) $|(B_0\&C_0)|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = (|B_0|_{v_0}^{M[m0+n0+2]}\&[m_0+n_0+2]|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})$.

(60.2.11) $(|(B_0)|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}\&[m_0+n_0+2]|(C_0)|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = min(\{|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}, |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}\})$.

Опираясь на утверждение (56) и на то, что $|(B_0\&C_0)|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \in [m_0+n_0+2]$, получаем, что

(60.2.12) $h(|(B_0\&C_0)|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = h(|(B_0\&C_0)|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})$.

(60.2.13) $h(|(B_0\&C_0)|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = h((|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}\&[m_0+n_0+2]|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}))$ (из (60.2.10) и (60.2.12)).

(60.2.14) $h(|(B_0\&C_0)|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = h(min(\{|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}, |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}\}))$ (из (60.2.11) и (60.2.13)).

Понятно, что верны следующие утверждения (60.2.15) и (60.2.16).

(60.2.15) $|(B_0\&C_0)|_u^{M[m_0+2]} = (|B_0|_u^{M[m_0+2]}\&[m_0+2]|C_0|_u^{M[m_0+2]})$.

(60.2.16) $(|B_0|_u^{M[m_0+2]}\&[m_0+2]|C_0|_u^{M[m_0+2]}) = min(\{|B_0|_u^{M[m_0+2]}, |C_0|_u^{M[m_0+2]}\})$.

(60.2.17) $|(B_0\&C_0)|_u^{M[m_0+2]} = min(\{|B_0|_u^{M[m_0+2]}, |C_0|_u^{M[m_0+2]}\})$ (из (60.2.15) и (60.2.16)).

(60.2.18) $|(B_0\&C_0)|_u^{M[m_0+2]} = min(\{h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}), h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})\})$ (из (60.2.7) и (60.2.17)).

Покажем, что

(60.2.19) $h(min(\{|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}, |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}\})) = min(\{h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}),\ h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})\})$.

Ясно, что

(60.2.20) $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} < |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}$, или $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}$, или $|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} < |B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}$.

(60.2.21) $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} < |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}$ (допущение).

Опираясь на утверждение (60.2.21), получаем, что

(60.2.22) $min(\{|B_0|_{v_0}^{M[m_0+2]}, |C_0|_{v_0}^{M[m_0+2]}\}) = |B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}$.

Ясно, что

(60.2.23) $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \in [m_0+n_0+2]$.

(60.2.24) $h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})$ (из (56) и (60.2.23)).

(60.2.25) $h(min(\{|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}, |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}\})) = h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})$ (из (60.2.22) и (60.2.24)).

(60.2.26) $h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) < h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})$ (из (59), (60.2.1), (60.2.2) и (60.2.6)).

Опираясь на утверждение (60.2.26), получаем, что

(60.2.27) $min(\{h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}), h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})\}) = h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})$.

(60.2.28) $h(min(\{|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}, |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}\})) =$
$min(\{h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}), h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})\})$ (из (60.2.25) и (60.2.27)).

Снимая допущение (60.2.20), получаем, что

(60.2.29) если $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} < |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}$,
то $h(min(\{|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}, |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}\})) =$
$min(\{h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}), h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})\})$.

(60.2.30) $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}$ (допущение).

Опираясь на утверждение (60.2.30), получаем, что

(60.2.31) $min(\{|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}, |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}\}) = |B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}$.

Ясно, что

(60.2.32) $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \in [m_0 + n_0 + 2]$.

(60.2.33) $h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})$ (из (56) и (60.2.23)).

(60.2.34) $h(min(\{|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}, |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}\})) = h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})$ (из (60.2.31) и (60.2.33)).

(60.2.35) $h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})$ (из (60.2.30) и (60.2.33)).

Опираясь на утверждения (60.2.32) и (60.2.35), получаем, что

(60.2.36) $min(\{h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}), h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})\}) = h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})$.

(60.2.37) $h(min(\{|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}, |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}\})) = m$
$in(\{h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}),\ h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})\})$ (из (60.2.34) и (60.2.36)).

Снимая допущение (60.2.30), получаем, что

(60.2.38) если $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}$,
то $h(min(\{|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}, |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}\})) =$
$min(\{h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}),\ h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})\})$.

Обоснование нижеследующего утверждения ($\star$1) аналогично данному выше обоснованию утверждения (60.2.29).

($\star$1) Если $|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} < |B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}$,
то $h(min(\{|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}, |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}\})) =$
$min(\{h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}),\ h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})\})$.

($\star$2) $h(min(\{|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}, |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}\})) =$
$min(\{h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}),\ h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})\})$
(из (60.2.20), (60.2.29), (60.2.38), ($\star$1)).

Опираясь на утверждения (60.2.10), (60.2.11), ($\star$2), получаем, что

($\star$3) $h(|(B_0\&C_0)|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = min(\{h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}), h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})\})$.

($\star$4) $h(|(B_0\&C_0)|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = min(\{|B_0|_{u}^{M[m_0+2]},\ |C_0|_{u}^{M[m_0+2]}\})$ (из (60.2.7) и ($\star$3)).

($\star$5) $h(|(B_0\&C_0)|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |(B_0\&C_0)|_{u}^{M[m_0+2]}$ (из (60.2.15), (60.2.16) и ($\star$4)).

Снимая допущения (60.2.3), (60.2.2), (60.2.1) и обобщая, завершаем доказательство утверждения (60.2).

Утверждение (60.2) доказано.

Аналогично доказано утверждение (60.3).

Докажем утверждение (60.4).

(60.4.1) B_0 есть L-формула (допущение).

(60.4.2) C_0 есть L-формула (допущение).

(60.4.3) Если $W(B_0) \subseteq \{q_1, \dots, q_{m_0}\}$, то $h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |B_0|_{u}^{M[n_0+2]}$, и если $W(C_0) \subseteq \{q_1, \dots, q_{m_0}\}$, то $h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |C_0|_{u}^{M[n_0+2]}$ (допущение).

(60.4.4) $W((B_0 \supset C_0)) \subseteq \{q_1, \dots, q_{m_0}\}$ (допущение).

Ясно, что

(60.4.5) $W(B_0) \subseteq W((B_0 \supset C_0))$ и $W(C_0) \subseteq W((B_0 \supset C_0))$.

(60.4.6) $W(B_0) \subseteq \{q_1, \dots, q_{m_0}\}$ и $W(C_0) \subseteq \{q_1, \dots, q_{m_0}\}$ (из (60.4.4) и (60.4.5)).

(60.4.7) $h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |B_0|_u^{M[m_0+2]}$ и $h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |C_0|_u^{M[m_0+2]}$ (из (60.4.3) и (60.4.6)).

Нетрудно убедиться, что верны следующие утверждения (60.4.8), (60.4.9), (60.4.10).

(60.4.8) $|(B_0 \supset C_0)|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = (|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \supset [m_0+n_0+2] |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})$.

(60.4.9) $(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \supset [m_0+n_0+2] |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) =$

$$= \begin{cases} 1, \text{ если } |B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \leq |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}, \\ |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}, \text{ если } |B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} > |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}. \end{cases}$$

(60.4.10) $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \leq |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}$ или $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} > |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}$.

(60.4.11) $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \leq |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}$ (допущение).

(60.4.12) $(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \supset [m_0+n_0+2] |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = 1$ (из (60.4.9) и (60.4.11)).

Опираясь на утверждения (57) и (60.4.12), получаем, что

(60.4.13) $h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \supset [m_0+n_0+2] |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = 1$.

(60.4.14) $h(|(B_0 \supset C_0)|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = 1$ (из (60.4.8) и (60.4.13)).

Ясно, что

(60.4.15) $|(B_0 \supset C_0)|_u^{M[m_0+2]} = (|B_0|_u^{M[m_0+2]} \supset [m_0+2] |C_0|_u^{M[m_0+2]})$.

(60.4.16) $(|B_0|_u^{M[m_0+2]} \supset [m_0+2] |C_0|_u^{M[m_0+2]}) =$
$(h(|B_0|_u^{M[m_0+n_0+2]}) \supset [m_0+2] h(|C_0|_u^{M[m_0+n_0+2]}))$
(из (60.4.7), (60.4.8) и (60.4.15)).

Ясно, что

(60.4.17) $(h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) \supset [m_0+2] h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})) =$

$$= \begin{cases} 1, \text{ если } h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) \leq h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}), \\ h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}), \text{ если } h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) > h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}). \end{cases}$$

Опираясь на утверждение (60.4.11), получаем, что

(60.4.18) $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} < |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}$ или $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}$.

(60.4.19) $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} < |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}$ (допущение).

(60.4.20) $h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) < h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})$ (из (59), (60.4.1), (60.4.2), (60.4.6), (60.4.19)).

(60.4.21) $h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) \leq h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})$ (из (60.4.20)).

(60.4.22) $(h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) \supset [m_0+2]\ h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})) = 1$ (из (60.4.17) и (60.4.21)).

(60.4.23) $(|B_0|_u^{M[m_0+2]} \supset [m_0+2]|C_0|_u^{M[m_0+2]}) = 1$ (из (60.4.7), (60.4.8) и (60.4.22)).

Ясно, что

(60.4.24) $|(B_0 \supset C_0)|_u^{M[m_0+2]} = (|B_0|_u^{M[m_0+2]} \supset [m_0+2]|C_0|_u^{M[m_0+2]})$.

(60.4.25) $|(B_0 \supset C_0)|_u^{M[m_0+2]} = 1$ (из (60.4.23) и (60.4.24)).

(60.4.26) $h(|B_0 \supset C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |(B_0 \supset C_0)|_u^{M[m_0+2]}$ (из (60.4.14) и (60.4.25)).

Снимая допущение (60.4.19), получаем, что

(60.4.27) если $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} < |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}$,
то $h(|B_0 \supset C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |(B_0 \supset C_0)|_u^{M[m_0+2]}$.

(60.4.28) $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}$ (допущение).

В свете утверждения (56) и того, что $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \in [m_0+n_0+2]$, получаем, что

(60.4.29) $h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})$.

(60.4.30) $h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})$ (из (60.4.28) и (60.4.29)).

(60.4.31) $h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) \leq h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})$ (из (60.4.30)).

(60.4.32) $(h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) \supset [m_0+2]h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})) = 1$ (из (60.4.17) и (60.4.31)).

(60.4.33) $(|B_0|_u^{M[m_0+2]}) \supset [m_0+2]|C_0|_u^{M[m_0+2]}) = 1$ (из (60.4.7), (60.4.8) и (60.4.32)).

Ясно, что

(60.4.34) $|(B_0 \supset C_0)|_u^{M[m_0+2]} = (|B_0|_u^{M[m_0+2]}) \supset [m_0+2]|C_0|^{M[m_0+2]})$.

(60.4.35) $|(B_0 \supset C_0)|_u^{M[m_0+2]} = 1$ (из (60.4.33) и (60.4.34)).

(60.4.36) $h(|(B_0 \supset C_0)|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |(B_0 \supset C_0)|_u^{M[m_0+2]}$ (из (60.4.14) и (60.4.35)).

Снимая допущение (60.4.28), получаем, что

(60.4.37) если $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}$, то $(h(|B_0 \supset C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |(B_0 \supset C_0)|_u^{M[m_0+2]}$.

(60.4.38) $h(|B_0 \supset C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |(B_0 \supset C_0)|_u^{M[m_0+2]}$ (из (60.4.18), (60.4.27) и (60.4.37)).

Снимая допущение (60.4.11), получаем, что

(60.4.39) если $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \leq |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}$, то $h(|B_0 \supset C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |(B_0 \supset C_0)|_u^{M[m_0+2]}$.

(60.4.40) $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} > |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}$ (допущение).

(60.4.41) $(|B_0|_{v_0}^{M[m0+n0+2]} \supset [m_0+n_0+2]|C_0|_{v_0}^{M[m0+n0+2]}) = |C_0|_{v_0}^{M[m0+n0+2]}$ (из (60.4.9) и (60.4.40)).

Ясно, что

(60.4.42) $|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \in [m_0 + n_0 + 2]$.

(60.4.43) $h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})$ (из (56) и (60.4.42)).

(60.4.44) $h((|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \supset [m_0 + n_0 + 2]|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})) = h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})$ (из (60.4.41) и (60.4.43)).

(60.4.45) $h(|B_0 \supset C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})$ (из (60.4.8) и (60.4.44)).

Ясно, что верны следующие утверждения (60.4.46) и (60.4.47).

(60.4.46) $|B_0 \supset C_0|_{v_0}^{M[m_0+2]} = (|B_0|_u^{M[m_0+2]} \supset [m_0 + 2]|C_0|_u^{M[m_0+2]|})$.

(60.4.47) $(|B_0|_u^{M[m_0+2]} \supset [m_0 + 2]|C_0|_u^{M[m_0+2]}) =$

$$= \begin{cases} 1, \text{ если } |B_0|_u^{M[m_0+2]} \leq |C_0|_u^{M[m_0+2]}, \\ |C_0|_u^{M[m_0+2]}, \text{ если } |B_0|_u^{M[m_0+2]} > |C_0|^{M[m_0+2]}. \end{cases}$$

(60.4.48) $|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} < |B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}$ (из (60.4.40)).

Опираясь на утверждения (59), (60.4.1), (60.4.2), (60.4.6) и (60.4.48), получаем, что

(60.4.49) $h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) < h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})$.

(60.4.50) $h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) > h(|C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})$ (из (60.4.49)).

(60.4.51) $|B_0|_u^{M[m_0+2]} > |C_0|_u^{M[m_0+2]}$ (из (60.4.7) и (60.4.50)).

(60.4.52) $(|B_0|_u^{M[m_0+2]} \supset [m_0+2]|C_0|_u^{M[m_0+2]}) = |C_0|_u^{M[m_0+2]}$ (из (60.4.47) и (60.4.51)).

(60.4.53) $(|B_0 \supset C_0|_u^{M[m_0+2]}) = |C_0|_u^{M[m0+2]}$ (из (60.4.46) и (60.4.53)).

(60.4.54) $h(|B_0 \supset C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |B_0 \supset C_0|_u^{M[m_0+2]}$ (из (60.4.7), (60.4.45) и (60.4.53)).

Снимая допущение (60.4.40), получаем, что

(60.4.55) если $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} > |C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}$,
то $h(|B_0 \supset C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |B_0 \supset C_0|_u^{M[m_0+2]}$.

(60.4.56) $h(|B_0 \supset C_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = (|B_0 \supset C_0|_u^{M[m_0+2]})$ (из (60.4.10), (60.4.39) и (60.4.55)).

Снимая допущения (60.4.3), (60.4.2), (60.4.1) и обобщая, завершаем доказательство утверждения (60.4).

Утверждение (60.4) доказано.

Докажем утверждение (60.5).

(60.5.1) B_0 есть L-формула (допущение).

(60.5.2) Если $W(B_0) \subseteq \{q_1, \dots, q_{m_0}\}$, то $h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |B_0|_u^{M[n_0+2]}$ (допущение).

(60.5.3) $W((\neg B_0)) \subseteq \{q_1, \dots, q_{m_0}\}$ (допущение).

Разумеется, что

(60.5.4) $W(B_0) \subseteq W((\neg B_0))$.

(60.5.5) $W(B_0) \subseteq \{q_1, \dots, q_{m_0}\}$ (из (60.5.3) и (60.5.4)).

(60.5.6) $h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |B_0|_u^{M[n_0+2]}$ (из (60.5.2) и (60.5.5)).

Ясно, что верны следующие утверждения (60.5.7), (60.5.8), (60.5.9), (60.5.10) и (60.5.11).

(60.5.7) $|(\neg B_0)|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \neg[m_0+n_0+2](|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]})$.

(60.5.8) $\neg[m_0+n_0+2](|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) =$
$$\begin{cases} 1, \text{ если } |B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, \text{ если } |B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = 1, \\ |B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}, \text{ если } |B_0|_{v_0}^{M[m0+n0+2]} \notin \{1, \frac{1}{2}\}. \end{cases}$$

(60.5.9) $|(\neg B_0)|_u^{M[m_0+2]} = \neg[m_0+2](|B_0|_u^{M[m_0+2]})$.

(60.5.10) $\neg[m_0+2](|B_0|_u^{M[m_0+2]}) = \begin{cases} 1, \text{ если } |B_0|_u^{M[m_0+2]} = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, \text{ если } |B_0|_u^{M[m_0+2]} = 1, \\ |B_0|_u^{M[m_0+2]}, \text{ если } |B_0|_u^{M[m_0+2]} \notin \{1, \frac{1}{2}\}. \end{cases}$

(60.5.11) $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = 1, \text{или} \, |B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \frac{1}{2}, \text{или} \, |B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \notin \{1, \frac{1}{2}\}$.

(60.5.12) $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = 1$ (допущение).

(60.5.13) $\neg[m_0+n_0+2](|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = \frac{1}{2}$ (из (60.5.8) и (60.5.12)).

(60.5.14) $|(\neg B_0)|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \frac{1}{2}$ (из (60.5.7) и (60.5.13)).

Опираясь на утверждения (58) и (60.5.14), получаем, что

(60.5.15) $h(|(\neg B_0)|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = \frac{1}{2}$.

Опираясь на утверждения (57) и (60.5.12), получаем, что

(60.5.16) $h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = 1$.

(60.5.17) $|B_0|_u^{M[m_0+2]} = 1$ (из (60.5.6) и (60.5.16)).

(60.5.18) $\neg[m_0+2](|B_0|_u^{M[m_0+2]}) = \frac{1}{2}$ (из (60.5.10) и (60.5.17)).

(60.5.19) $|(\neg B_0)|_u^{M[m_0+2]} = \frac{1}{2}$ (из (60.5.9) и (60.5.18)).

(60.5.20) $h(|(\neg B_0)|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = h(|(\neg B_0)|_u^{M[m_0+2]})$ (из (60.5.15) и (60.5.19)).

Снимая допущение (60.5.12), получаем, что

(60.5.21) если $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = 1$, то $h(|(\neg B_0)|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |(\neg B_0)|_{u}^{M[m_0+2]}$.

(60.5.22) $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \dfrac{1}{2}$ (допущение).

(60.5.23) $\neg[m_0+n_0+2](|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = 1$ (из (60.5.8) и (60.5.22)).

(60.5.24) $|(\neg B_0)|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = 1$ (из (60.5.7) и (60.5.23)).

Опираясь на утверждения (57) и (60.5.24), получаем, что

(60.5.25) $h(|(\neg B_0)|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = 1$.

Опираясь на утверждения (58) и (60.5.22), получаем, что

(60.5.26) $h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = \dfrac{1}{2}$.

(60.5.27) $|B_0|_{u}^{M[m_0+2]} = \dfrac{1}{2}$ (из (60.5.6) и (60.5.26)).

(60.5.28) $\neg[m_0+2](|B_0|_{u}^{M[m_0+2]}) = 1$ (из (60.5.10) и (60.5.27)).

(60.5.29) $|(\neg B_0)|_{u}^{M[m_0+2]} = 1$ (из (60.5.9) и (60.5.28)).

(60.5.30) $h(|(\neg B_0)|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |(\neg B_0)|_{u}^{M[n_0+2]}$ (из (60.5.25) и (60.5.29)).

Снимая допущение (60.5.22), получаем, что

(60.5.31) если $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \dfrac{1}{2}$, то $h(|(\neg B_0)|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |(\neg B_0)|_{u}^{M[n_0+2]}$.

(60.5.32) $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \notin \{1, \dfrac{1}{2}\}$ (допущение).

Опираясь на утверждения (12), (16), (60.5.1) и (60.5.5), а также опираясь на то, что $m_0+n_0+2 \in N$ и $m_0+n_0+2 > 2$, получаем, используя лемму 7, что

(60.5.33) $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \in \{1, \dfrac{1}{2}, v_0(q_1), \dots, v_0(q_{m_0})\}$.

Опираясь на утверждение (47), делаем вывод о том, что

(60.5.34) $\{1, \dfrac{1}{2}, v_0(q_1), \dots, v_0(q_{m_0})\} \subseteq \{\alpha_1, \dots, \alpha_{m'}\} \cup \{1, \dfrac{1}{2}\}$.

(60.5.35) $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{m'}\} \cup \{1, \dfrac{1}{2}\}$ (из (60.5.33) и (60.5.34)).

(60.5.36) $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{m'}\}$ (из (60.5.32) и (60.5.35)).

Ввиду утверждений (45) и (60.5.36) ясно, что

(60.5.37) для некоторого i из N верно, что $i \leq m'$ и $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \alpha_i$.

Пусть

(60.5.38) $i_0 \in N$, $i_0 \leq m'$, $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \alpha_{i_0}$.

(60.5.39) $i_0 \in N$, $i_0 \leq m'$ (из (60.5.38)).

(60.5.40) $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \alpha_{i_0}$ (из (60.5.38)).

(60.5.41) $\neg[m_0+n_0+2](|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}$ (из (60.5.8) и (60.5.32)).

(60.5.42) $|(\neg B_0)|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = |B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}$ (из (60.5.7) и (60.5.41)).

Опираясь на утверждение (56) и тот факт, что $\alpha_{i_0} \in [m_0+n_0+2]$, получаем, что

(60.5.43) $h(\alpha_{i_0}) = h(\alpha_{i_0})$.

(60.5.44) $|(\neg B_0)|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \alpha_{i_0}$ (из (60.5.40) и (60.5.42)).

(60.5.45) $h(|(\neg B_0)|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = h(\alpha_{i_0})$ (из (60.5.43) и (60.5.44)).

(60.5.46) $h(|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = h(\alpha_{i_0})$ (из (60.5.40) и (60.5.43)).

(60.5.47) $|B_0|_u^{M[m_0+2]} = h(\alpha_{i_0})$ (из (60.5.6) и (60.5.46)).

(60.5.48) $h(|(\neg B_0)|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |B_0|_u^{M[m_0+2]}$ (из (60.5.45) и (60.5.47)).

(60.5.49) $|(\neg B_0)|_u^{M[m_0+2]} = \neg[m_0+2](h(\alpha_{i_0}))$ (из (60.5.9) и (60.5.47)).

Опираясь на утверждения (51), (52), (53) и (60.5.39), получаем, что

(60.5.50) $h(\alpha_{i_0}) = \dfrac{1}{i_0+2}$.

Разумеется, что

(60.5.51) $m_0+2 \in N$, $m_0+2 > 2$ и $m' \leq m_0$.

Опираясь на утверждения (60.5.39), (60.5.51) и применяя соглашение 2, получаем, что

(60.5.52) $\dfrac{1}{i_0+2} \in [m_0+2]$.

В свете того, что $i_0 \in N$ (см. утверждение (60.5.39)), ясно, что

(60.5.53) $\dfrac{1}{i_0+2} \notin \{1, \dfrac{1}{2}\}$.

Опираясь на утверждения (60.5.52) и (60.5.53) и на то, что $m_0+2 \in N$, $m_0+2>2$, получаем, используя соглашение 6, что

(60.5.54) $\neg[m_0+2](\dfrac{1}{i_0+2}) = \dfrac{1}{i_0+2}$.

(60.5.55) $\neg[m_0+2](h(\alpha_{i_0})) = h(\alpha_{i_0})$ (из (60.5.50) и (60.5.54)).

(60.5.56) $|(\neg B_0)|_u^{M[m_0+2]} = h(\alpha_{i_0})$ (из (60.5.49) и (60.5.55)).

(60.5.57) $|(\neg B_0)|_u^{M[m_0+2]} = |B_0|_u^{M[m_0+2]}$ (из (60.5.47) и (60.5.56)).

(60.5.58) $h(|(\neg B_0)|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |(\neg B_0)|_u^{M[m_0+2]}$ (из (60.5.48) и (60.5.57)).

Снимая допущение (60.5.32), получаем, что

(60.5.59) если $|B_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \notin \{1, \dfrac{1}{2}\}$, то $h(|(\neg B_0)|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |(\neg B_0)|_u^{M[m_0+2]}$.

(60.5.60) $h(|(\neg B_0)|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |(\neg B_0)|_u^{M[m_0+2]}$ (из (60.5.11), (60.5.21), (60.5.31) и (60.5.59)).

Снимая допущения (60.5.3), (60.5.2), (60.5.1) и обобщая, завершаем доказательство утверждения (60.5).

Утверждение (60.5) доказано.

Утверждение (60) доказано.

(61) $h(|A_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = |A_0|_u^{M[m_0+2]}$ (из (1), (16) и (60)).

(62) $|A_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \in \{1, \dfrac{1}{2}, v_0(q_1), \ldots, v_0(q_{m_0})\}$ (из (1), (3), (7), (13), по лемме 7).

Опираясь на утверждение (47), получаем, что

(63) $\{1, \dfrac{1}{2}, v_0(q_1), \ldots, v_0(q_{m_0})\} \subseteq \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{m'}\} \cup \{1, \dfrac{1}{2}\}$.

(64) $|A_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{m'}\} \cup \{1, \dfrac{1}{2}\}$ (из (62) и (63)).

(65) $|A_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{m'}\}$ или $|A_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \in \{1, \frac{1}{2}\}$ (из (64)).

Опираясь на утверждения (1), (2), (4) и используя определение 11, получаем, что

(66) для всякой $M[m_0+2]$-оценки v $|A_0|_v^{M[m_0+2]} = 1$.

(67) $|A_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{m'}\}$ (допущение).

(68) Существует такое целое положительное число i, что $i \leq m'$ и $|A_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \alpha_i$ (из (45) и (67)).

Пусть

(69) $i_0 \in N$, $i_0 \leq m'$, $|A_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \alpha_{i_0}$.

(70) $i_0 \in N$, $i_0 \leq m'$ (из (69)).

Опираясь на утверждения (51), (52), (53), (70), получаем, что

(71) $h(\alpha_{i_0}) = \dfrac{1}{i_0+2}$.

В свете того, что $i_0 \in N$(см. утверждение (70)) ясно, что

(72) $\dfrac{1}{i_0+2} \neq 1$.

(73) $h(\alpha_{i_0}) \neq 1$ (из (71) и (72)).

(74) $|A_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \alpha_{i_0}$ (из (69)).

(75) $h(|A_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) \neq 1$ (из (73) и (74)).

(76) $|A_0|_u^{M[m_0+2]} \neq 1$ (из (61) и (75)).

(77) Для некоторой $M[m_0+2]$-оценки v $|A_0|_v^{M[m_0+2]} \neq 1$ (из (50) и (76)).

Утверждение (77) противоречит утверждению (66). Следовательно, неверно допущение (67).

Таким образом,

(78) $|A_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{m'}\}$.

(79) $|A_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} \in \{1, \frac{1}{2}\}$ (из (65) и (78)).

(80) $|A_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]} = \frac{1}{2}$ (из (14) и (79)).

Ясно, что

(81) $\frac{1}{2} \in [m_0 + n_0 + 2]$.

(82) $h(\frac{1}{2}) = h(\frac{1}{2})$ (из (56) и (81)).

(83) $h(|A_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = h(\frac{1}{2})$ (из (80) и (82)).

(84) $h(|A_0|_{v_0}^{M[m_0+n_0+2]}) = \frac{1}{2}$ (из (58) и (83)).

(85) $|A_0|_{u}^{M[m_0+2]} = \frac{1}{2}$ (из (61) и (84)).

(86) $|A_0|_{u}^{M[m_0+2]} \neq 1$ (из (85)).

(87) Для некоторой $M[m_0 + 2]$-оценки v $|A_0|_{v}^{M[m_0+2]} \neq 1$ (из (50) и (86)).

Утверждение (87) противоречит утверждению (66). Следовательно, неверно допущение (5). Но тогда

(88) для всякого n из N A_0 есть $M[m_0 + n + 2]$-общезначимая формула.

Снимая допущение (4), получаем, что

(89) если A_0 есть $M[m_0 + 2]$-общезначимая формула, то для всякого n из N A_0 есть $M[m_0 + n + 2]$-общезначимая формула.

(90) Для всякого n из N A_0 есть $M[m_0 + n + 2]$-общезначимая формула (допущение).

(91) Неверно, что A_0 есть $M[m_0 + 2]$-общезначимая формула (допущение).

В свете утверждений (1), (2), (91) и определения 11 ясно, что

(92) для некоторой $M[m_0 + 2]$-оценки v $|A_0|_{v}^{M[m_0+2]} \neq 1$.

Пусть

(93) v_0 есть $M[m_0 + 2]$-оценка и $|A_0|_{v_0}^{M[m_0+2]} \neq 1$.

(94) v_0 есть $M[m_0 + 2]$-оценка (из (93)).

(95) $|A_0|_{v_0}^{M[m0+2]} \neq 1$ (из (93)).

Разумеется, что

(96) $1 \in N$.

Опираясь на утверждения (1), (2), (94), (96) и на лемму 6, получаем, что

(97) $|A_0|_{v_0}^{M[m_0+2]} = |A_0|_{v_0}^{M[m_0+1+2]}$.

(98) $|A_0|_{v_0}^{M[m_0+1+2]} \neq 1$ (из (95) и (97)).

(99) A_0 есть $M[m_0 + 1 + 2]$-общезначимая формула (из (90) и (96)).

Опираясь на утверждение (99) и используя определение 11, получаем, что

(100) для всякой $M[m_0 + 1 + 2]$-оценки v $|A_0|_v^{M[m_0+1+2]} = 1$.

Ввиду утверждения (94) понятно, что

(101) v_0 есть $M[m_0 + 1 + 2]$-оценка.

(102) $|A_0|_{v_0}^{M[m_0+1+2]} = 1$ (из (100) и (101)).

Утверждение (102) противоречит утверждению (98). Следовательно, неверно допущение (91). Но тогда

(103) A_0 есть $M[m_0 + 2]$-общезначимая формула.

Снимая допущение (90), получаем, что

(104) если для всякого n из N A_0 есть $M[m_0 + n + 2]$-общезначимая формула, то A_0 есть $M[m_0 + 2]$-общезначимая формула.

(105) A_0 есть $M[m_0 + 2]$-общезначимая формула тогда и только тогда, когда для всякого n из N A_0 есть $M[m_0 + n + 2]$-общезначимая формула (из (89) и (104)).

Снимая допущения (3), (2), (1) и обобщая, завершаем доказательство леммы 8.

Лемма 8 доказана.

Простым следствием леммы 8 и того, что для всякой L-формулы A число всех пропозициональных переменных языка L, входящих в A, принадлежит множеству N, является следующая лемма 9.

Лемма 9. Для всякой L-формулы A: если m есть число всех пропозициональных переменных языка L, входящих в A, то верно следующее: A есть $M[m + 2]$-общезначимая формула тогда и только тогда, когда для всякого n из N A есть $M[m + n + 2]$-общезначимая формула.

Лемма 10. Для всякой L-формулы A, для всяких m и n из N: если A есть $M[m+n+2]$-общезначимая формула, то A есть $M[m+2]$-общезначимая формула.

Лемма 10 доказана методом от противного с использованием леммы 6.

Лемма 11. Для всякой L-формулы A: если m есть число всех пропозициональных переменных языка L, входящих в A, то верно следующее: A есть $M[m+2]$-общезначимая формула тогда и только тогда, когда для всякого n из N A есть $M[n+2]$-общезначимая формула.

Докажем лемму 11.

(1) A_0 есть L-формула (допущение).

(2) m_0 есть число всех пропозициональных переменных языка L, входящих в A_0 (допущение).

(3) A_0 есть $M[m+2]$-общезначимая формула (допущение).

(4) $n_0 \in N$ (допущение).

Разумеется, что

(5) $m_0 \in N$.

В свете утверждений (4) и (5) понятно, что

(6) $m_0 < n_0$, или $m_0 = n_0$, или $n_0 < m_0$.

(7) $m_0 < n_0$ (допущение).

Опираясь на утверждения (4), (5), (7), делаем вывод, что

(8) для некоторого k из N $m_0 + k = n_0$.

Пусть

(9) $k_0 \in N$, $m_0 + k_0 = n_0$.

(10) $k_0 \in N$ (из (9)).

(11) $m_0 + k_0 = n_0$ (из (9)).

Опираясь на утверждения (1), (2) и используя лемму 9, получаем, что

(12) A_0 есть $[m_0 + 2]$-общезначимая формула тогда и только тогда, когда для всякого n из N A_0 есть $[m_0 + n + 2]$-общезначимая формула.

(13) Для всякого n из N A_0 есть $[m_0 + n + 2]$-общезначимая формула (из (3) и (12)).

(14) A_0 есть $[m_0 + k_0 + 2]$-общезначимая формула (из (10) и (13)).

(15) A_0 есть $[n_0 + 2]$-общезначимая формула (из (11) и (14)).

Снимая допущение (7), получаем, что

(16) если $m_0 < n_0$, то A_0 есть $[n_0 + 2]$-общезначимая формула.

В свете утверждения (3) ясно, что

(17) если $n_0 = m_0$, то A_0 есть $[n_0 + 2]$-общезначимая формула.

(18) $n_0 < m_0$ (допущение).

Опираясь на утверждения (4), (5), (18), делаем вывод, что

(19) для некоторого k из N $n_0 + k = m_0$.

Пусть

(20) $k_0 \in N$, $n_0 + k_0 = m_0$.

(21) $k_0 \in N$ (из (20)).

(22) $n_0 + k_0 = m_0$ (из (20))

(23) A_0 есть $M[m_0 + k_0 + 2]$-общезначимая формула (из (3) и (22)).

Опираясь на утверждения (4), (21) и используя лемму 10, получаем, что

(24) если A_0 есть $M[n_0 + k_0 + 2]$-общезначимая формула, то A_0 есть $M[n_0 + 2]$-общезначимая формула.

(25) A_0 есть $[n_0 + 2]$-общезначимая формула (из (23) и (24)).

Снимая допущение (18), получаем, что

(26) если $n_0 < m_0$, то A_0 есть $[n_0 + 2]$-общезначимая формула.

(27) A_0 есть $M[n_0 + 2]$-общезначимая формула (из (6), (16), (17), (26)).

Снимая допущение (4) и обобщая, получаем, что

(28) для всякого n из N A_0 есть $M[n + 2]$-общезначимая формула.

Снимая допущение (3), получаем, что

(29) если A_0 есть $M[m_0+2]$-общезначимая формула, то для всякого n из N A_0 есть $M[n+2]$-общезначимая формула.

Очевидно, что

(30) если для всякого n из N A_0 есть $M[n+2]$-общезначимая формула, то A_0 есть $M[m_0+2]$-общезначимая формула.

(31) A_0 есть $M[m_0+2]$-общезначимая формула тогда и только тогда, когда для всякого n из N A_0 есть $M[n+2]$-общезначимая формула (из (29) и (30)).

Снимая допущения (2), (1) и обобщая, завершаем доказательство леммы 11.

Лемма 11 доказана.

Опираясь на лемму 11 и соглашение 9, приходим к выводу о том, что имеет место следующая теорема 2.

Теорема 2. Для всякой L-формулы A: если m есть число пропозициональных переменных языка L, входящих в A, то верно следующее: $A \in PNL[m+2]$ тогда и только тогда, когда $A \in \cap_{i\in N} PNL[i+2]$.

Опираясь на теорему 2, установим разрешимость логики $\cap_{i\in N} PNL[i+2]$. Пусть дана L-формула A. Требуется ответит на вопрос о том, принадлежит ли A логике $\cap_{i\in N} PNL[i+2]$. Для ответа на этот вопрос выполняем четыре действия.

Первое действие. Находим по A число всех пропозициональных переменных языка L, входящих в A (имеется эффективный метод нахождения по любой L-формуле числа всех пропозициональных переменных языка L, входящих в эту L-формулу).

Второе действие. Строим по полученному в результате выполнения первого действия числу n из N логическую матрицу $M[n+2]$ (имеется эффективный метод построения по любому k из N логической матрицы $M[k+2]$).

Третье действие. Решаем вопрос о том, является ли L-формула A $M[n+2]$-общезначимой формулой (имеется эффективный метод, позволяющий по каждой упорядоченной паре $\langle F, M[k+2]\rangle$, где F есть L-формула и $k \in N$, ответить на вопрос о том, является ли F $M[k+2]$-общезначимой формулой).

Четвертое действие. Если вопрос о том, является ли L-формула A $M[n+2]$-общезначимой формулой, решен положительно, то делаем (опираясь на теорему 2 и на соглашение 9) вывод о том, что $A \in \cap_{i\in N} PNL[i+2]$, а если указанный вопрос решен отрицательно, то делаем (опираясь на теорему 2 и на соглашение 9) вывод о том, что $A \notin \cap_{i\in N} PNL[i+2]$.

Таким образом, справедлива следующая теорема 3.

Теорема 3. $\cap_{i\in N} PNL[i+2]$ является разрешимой логикой.

Заключительная часть

Определение 12. Называем $\mathbf{L}$ PNL-логикой, если $\mathbf{L} = \cap_{i \in N} PNL[i+2]$ или для некоторого n из N $\mathbf{L} = PNL[n+2]$.

Можно доказать, что верно следующее замечание 3.

Замечание 3. $PNL[3]$, $PNL[4]$, $PNL[5]$, ...являются табличными логиками, а $\cap_{i \in N} PNL[i+2]$ есть нетабличная логика.

Опираясь на теорему 1, на теорему 3, на определение 12 и на замечания 2 и 3, приходим к выводу о том, что $\cap_{i \in N} PNL[i+2]$ есть пересечение всех табличных PNL-логик, являющееся разрешимой нетабличной паранормальной логикой.

Следует заметить, что множество всех табличных PNL-логик, то есть множество $\{PNL[3], PNL[4], PNL[5], ...\}$, счетно-бесконечно. То, что данное множество счетно-бесконечно нетрудно обосновать с помощью теоремы 2 работы (Попов 2018). Эта теорема утверждает, что для всякого целого числа k, которое больше 2, и для всякого целого числа j, которое больше k, $PNL[j]$ строго включается в $PNL[k]$.

Литература

Попов 2018 — *Попов В. М.* Об одной последовательности табличных линейных паранормальных логик с неклассической импликацией // Евразийский союз ученых (ЕСУ). Ежемесячный научный журнал. 2018. № 7 (52), ч. 3. С. 20–28.