Олег Доманов[1]

КРОСС-МИРОВАЯ ПРЕДИКАЦИЯ: ТЕОРЕТИКО-ТИПОВАЯ И ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННАЯ ФОРМАЛИЗАЦИЯ

Аннотация. В статье описываются некоторые потенциальные проблемы теории кросс-мировой предикации Е. Борисова и предлагаются альтернативные формализации в терминах теории типов с зависимыми типами и теории множеств. Преимущество теоретико-типовой формализации состоит в её простоте, связанной с наличием в теории типов функций в зависимые типы. Преимущество предлагаемой теоретико-множественной формализации состоит в большей близости к традиционным подходам и отсутствии некоторых неинтуитивных следствий, таких как предикация по несуществующим объектам.
Ключевые слова: кросс-мировая предикация, теория типов, теория множеств.

Oleg Domanov

CROSS-WORLD PREDICATION: TYPE-THEORETICAL AND SET-THEORETICAL FORMALIZATION

Abstract. The paper examines some potential problems of the theory of cross-world predication by E. Borisov and suggests alternative formalizations in terms of type theory with dependent types and set theory. The advantage of the type-theoretical formalization lies in its simplicity based on the presence of functions to dependent types. The advantage of the proposed set-theoretical formalization is a greater closeness to traditional approaches and the lack of some non-intuitive effects such as the predication on non-existing objects.
Keywords: cross-world predication, type theory, set theory.

Для цитирования: *Доманов О. А.* Кросс-мировая предикация: теоретико-типовая и теоретико-множественная формализация // Логико-философские штудии. 2021. Т. 19, № 4. С. 273–282. DOI: 10.52119/LPHS.2021.13.88.006.

Евгений Борисов в своей статье предлагает интересную и изобретательную формализацию для кросс-мировой предикации и кросс-мировой квантификации — языковых явлений, с трудом поддающихся экспликации средствами первопорядковой логики (см. обзор подходов в этой области, например, в (Kocurek 2016)). Она, безусловно, выполняет свою работу, но вызывает вопросы, касающиеся возможного упрощения аппарата. Рассмотрим несколько таких вопросов, а также возможное

[1] *Доманов Олег Анатольевич* — кандидат философских наук, старший научный сотрудник Института философии и права СО РАН.
Oleg A. Domanov, PhD, Senior Researcher, Institute of Philosophy and Law SB RAS.
domanov@philosophy.nsc.ru

альтернативное построение семантики кросс-мировой предикации. Мой тезис состоит в том, что, во-первых, эта семантика может быть существенно проще в теоретико-типовом, а не теоретико-множественном представлении и, во-вторых, она может быть упрощена даже в последнем случае.

Ядром предлагаемой Борисовым формализации являются функции вида $G^n \to \mathcal{P}(D(M)^n)$, которые для каждого n-местного предиката P приписывают каждому кортежу миров длины n интерпретацию предиката для значений переменных из этих миров. При этом, как указывает автор, требуется определять значения предикатов даже на объектах, которые в соответствующих мирах не существуют. Хотя подобный подход встречается в литературе, он интуитивно малоудовлетворителен, и было бы лучше избежать подобных ситуаций. Однако при традиционном способе построения моделей это затруднительно сделать, поскольку требуются функции вида $G \ \to D$, где множество D само зависит от аргумента функции, то есть от мира $w \in G$. В то же время в современной теории типов имеется понятие зависимых типов, для которых такие функции являются вполне рядовыми. Мы увидим дальше, как зависимые типы помогают существенно упростить изложение и избежать указанных неинтуитивных ситуаций. Кроме того, ниже приведено сходное построение, имитирующее зависимые типы в рамках теории множеств. Читатель сможет сам оценить, насколько оно оказывается сложнее или проще.

Второй вопрос к предлагаемой формализации связан с представлением в ней констант. Формулы вида Pc, где c — константа, оказываются запрещены, и вместо них автор использует запись $(\lambda x.Px)(c)$. Это, согласно ему, необходимо для разрешения двусмысленности формул вида $\Diamond Pc$ и позволяет достичь однозначности, записывая различие в смысле как различие между $(\lambda x.\Diamond Px)(c)$ и $\Diamond(\lambda x.Px)(c)$. Борисов утверждает: «Эта однозначность достигается за счет того, что мы можем комбинировать константы и предикаты в формулах только при посредстве λ-оператора». Однако сама эта трудность, как представляется, не содержательна, а порождена выбором обозначений. Если мы вспомним, что операторы возможности и действительности являются квантификацией по мирам, то это различие легко записывается как различие между

$$\exists w Pc(w) \quad \text{и} \quad \exists w Pc(w_0).$$

Проблема, таким образом, связана с неудачным обозначением модальных операторов, затушёвывающим тот факт, что они являются квантификацией по возможным мирам. Если мы это учтём, то, как станет видно ниже, нам не потребуется менять язык теории, достаточно изменений лишь в процедуре его интерпретации.

На это можно возразить, что возможные миры не относятся к нашему объектному языку, в котором есть лишь термины для возможности и необходимости. Интерпретация их как кванторов будто бы вводит в язык то, чего там нет, а именно возможные миры. Однако мы вовсе не обязаны изменять наш объектный язык. Он по-прежнему не содержит возможных миров, квантификация же относится лишь к интерпретации — подобно тому как множества, предикаты и прочие структуры, на которых мы интерпретируем наш язык, также не обязаны входить в него.

Наконец, ещё один вопрос относится к предложенной автором VP-функции. Она вводится для контроля отнесения переменных к мирам и сопоставляет нужным переменным (эта функция — частичная) миры, в которых они должны оцениваться: $Var \to G$. Таким образом, при оценке формул мы не только приписываем переменной некоторый объект в качестве значения, но и указываем, в каком мире следует оценивать предикат для этого объекта. Это, безусловно, решает проблему, однако утяжеляет формализм, а кроме того вносит в процесс оценки формул излишний «динамизм», роль которого не вполне понятна. Почему, например, миры не могут приписываться переменным «одним действием», как это делается при приписывании им объектов функцией эвалюоации? Для этого можно лишь доопределить функцию эвалюоации до функции $Var \to D(M) \times G$. Оценка любой формулы полностью определяется приписыванием каждой переменной объекта и мира; миры определяют интерпретацию предиката, которую мы используем (она разная для каждого кортежа миров), а объекты — значение этого предиката. Почему для такого приписывания требуется некий динамический процесс пополнения VP-функции? Это не вполне ясно.

Вероятно, это связано с тем, что автор рассматривает миры как какие-то особые параметры. Однако, с формальной точки зрения, они ничем не отличаются от любой другой переменной, от которой зависят значения формул. Почему в случае других переменных возможно обойтись без всякого «динамизма», а в случае миров он оказывается необходим?

* * *

Рассмотрим теперь, как семантика кросс-мировой предикации может выглядеть в терминах теории типов. Одним из существенных преимуществ теории зависимых типов (Martin-Löf 1984) по сравнению с теорией множеств является то, что в ней естественным образом определяются типы, зависящие от других типов, в частности, например, тип $D(w)$, формализующий домен мира w. Это позволяет записывать функции вида $(\Pi w : G)\ D(w)$, то есть функции, аргументом которых является мир, а значением — объект *из этого* мира. Как мы увидим, это делает обозначения более простыми и обозримыми.

Пусть имеется универсум типов $\mathcal{U}$, тип миров $G : \mathcal{U}$ и домены миров $D : G \to \mathcal{U}$ (тип, зависимый от G). Определим модальные операторы. Для этого зададим отношение достижимости $R : G \to G \to \mathcal{U}$. Тип миров, достижимых из w, определяется как Σ-тип (здесь, как и далее, указывается сначала тип терма, а затем его значение):

$$
\begin{aligned}
&acc : G \to \mathcal{U} \\
&acc = (\lambda w : G)\ \big((\Sigma w_1 : G)\ R(w, w_1)\big).
\end{aligned}
$$

Это зависимый тип (зависящий от G), состоящий из пар, первые элементы которых — миры, а вторые — доказательства того, что эти миры достижимы из исходного. Этот тип позволяет определить оператор возможности «возможно в мире w»:

$$\Diamond : G \to (G \to \mathcal{U}) \to \mathcal{U}$$
$$\Diamond = (\lambda w : G)\ (\lambda P : G \to \mathcal{U})\ (\Sigma p : acc(w))\ P',$$
где
$$P' : acc(w) \to \mathcal{U}$$
$$P' = (\lambda x)\ P(proj_1(x)).$$

Это тип, зависящий от мира w и от пропозиции над миром $G \to \mathcal{U}$ и состоящий из пары, первым элементом которой служит p, само являющееся парой, состоящей из мира и доказательства того, что он достижим из w, а вторым элементом — доказательство P для первой проекции p (то есть для достижимого мира).

Аналогично определяется необходимость:

$$\Box : G \to (G \to \mathcal{U}) \to \mathcal{U}$$
$$\Box = (\lambda w : G)\ (\lambda P : G \to \mathcal{U})\ (\Pi p : acc(w))\ P',$$
где
$$P' : acc(w) \to \mathcal{U}$$
$$P' = (\lambda x)\ P(proj_1(x)).$$

На этом формализация кросс-мировой предикации завершается. Она, как мы видим, оказывается гораздо проще формализации в теории множеств, как предлагаемой Борисовым, так и в описанной ниже имитации зависимых типов. Причина этого в том, что теория типов, будучи интерпретирована на множествах, уже содержит в себе описанную ниже структуру расслоения (более точно, предпучков). Онтологически это означает, что теория типов является языком более сложной онтологии, чем обычно предполагается языком логики первого порядка. Разумеется, предпучки также могут быть описаны этим последним языком, но это потребует большей сложности на уровне теории, тогда как в теории типов этой сложности удаётся избежать за счёт более богатой исходной онтологии. В том числе удаётся избежать проблем, описанных выше: не вполне стандартного языка для представления констант и необходимости определения предикатов для несуществующих объектов (см. пример ниже).

Пример

Рассмотрим для примера интерпретацию фразы «Джон мог бы быть богаче (чем он есть в актуальном мире)». Пусть определён предикат (зависимый тип) «Человек в мире w_1 богаче человека в мире w_2»:

$$richer = (\Pi w_1 : G)\ (\Pi w_2 : G)\ (D(w_1) \to D(w_2) \to \mathcal{U}).$$

Как мы видим, ограничение области определения объектами соответствующего мира формулируется здесь простым и естественным образом. Не возникает необходимости определять предикат на объектах, отсутствующих в мирах.

Определим интенсионал «Джон в мире w»: $\hat{J} : (\Pi w : G)\ D(w)$. Тогда пропозиция (тип) «Джон в мире w_1 богаче Джона в мире w_2» выглядит так:

$$JR = (\lambda w_1 : G)\ (\lambda w_2 : G)\ richer(w_1, w_2, \hat{J}(w_1), \hat{J}(w_2)).$$

Наконец, пропозиция «Джон мог бы быть богаче (чем он есть в актуальном мире)» равна:

$$\Diamond(w_0, (\lambda w)\ JR(w, w_0)) = (\Sigma p : acc(w))\ P',$$

где

$$P' : acc(w) \to \mathcal{U}$$

$$P' = (\lambda x)\ richer\big(w_0, proj_1 x, \hat{J}(w_0), \hat{J}(proj_1 x)\big).$$

Более сложные примеры, такие как «То, что богатые могли бы быть бедными, необходимо», можно найти в формализации этой семантики в компьютерной системе Agda по адресу `https://github.com/odomanov/ttsemantics/blob/master/Agda/Experiments/CrossWorld.agda`.

* * *

Проведём теперь теоретико-множественную интерпретацию, имитирующую зависимые типы и функции в них. Она является упрощённым вариантом интерпретации теории типов на предпучках (Hofmann 1997). Для имитации нам потребуется построить онтологическую конструкцию, на которой мы и будем интерпретировать наш язык. При этом последний по существу не будет отличаться от обычного языка модальной логики. Всё отличие в семантике будет заключаться в том, что выступает его интерпретацией.

Пусть имеются переменные x, y, z, w (возможно, с индексами), функциональные символы $f_i^{(n)}$, предикатные символы $P_i^{(n)}$, логические символы $\neg, \wedge, \vee, \to$, $\exists, \forall$, а также символ равенства. Тогда термы определяются рекурсивно как:

(1) переменные,

(2) $f_i^{(n)}(t_1, \ldots, t_n)$, где $t_1, \ldots, t_n$ — термы.

Формулы определим обычным образом (здесь t_i — термы):

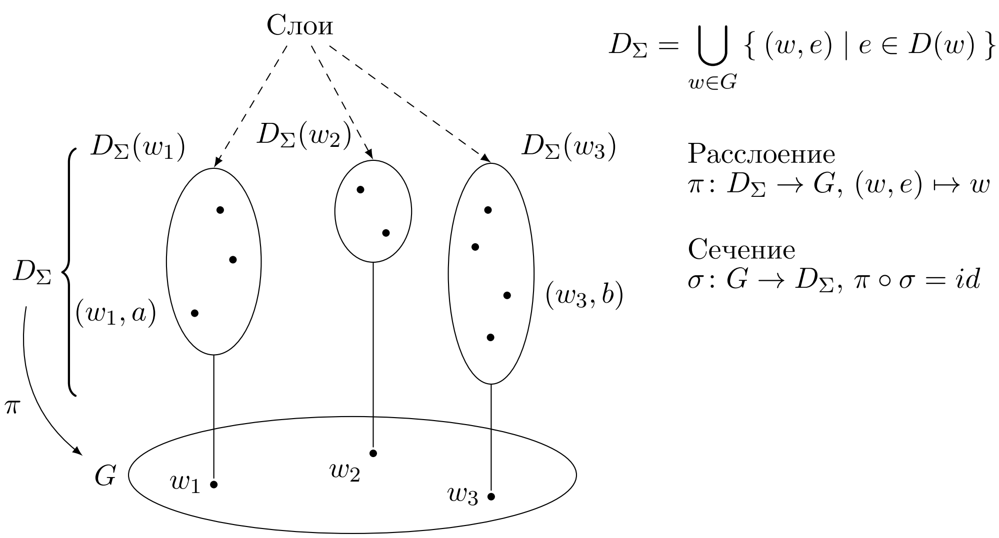

Рис. 1: Множество миров как расслоение

(F1) $P_i^{(n)}(t_1, \ldots, t_n)$,

(F2) $t_1 = t_2$,

(F3) $\neg\phi$,

(F4) $\phi \wedge \psi$, $\phi \vee \psi$, $\phi \to \psi$.

Эти определения не отличаются от обычных определений языка первого порядка. Далее мы дополнительно определим ещё некоторые формулы.

Построим теперь модель этого языка. Отличие предлагаемой модели от обычного случая модальной логики состоит в том, что мы интерпретируем переменные не на объектах, а на объектах вместе с указанием того, из какого мира эти объекты взяты, то есть на парах «мир, объект в *этом* мире». Это соответствует тому, что мы заменяем все указания на объекты e в наших интерпретациях на указания на «e в мире w».

Формально, модель $M = \langle G, R, D, I\rangle$, где G — множество миров, R — отношение достижимости, D — доменная функция, задающая для каждого мира w его домен $D(w)$, а I — функция интерпретации. Домены миров могут как пересекаться, так и не пересекаться. Дизъюнктивная сумма всех $D(w)$

$$D_\Sigma = \bigcup_{w\in G} \{ (w,e) \mid e \in D(w) \},$$

представляет собой множество объектов доменов $D(w)$, индексированных множеством миров G. Рассмотрим функцию $\pi\colon D_\Sigma \to G$, такую, что $(w,e) \mapsto w$. Она представляет собой расслоение множества D_Σ над G со слоями $\{\ (w, e) \mid e \in D(w)\ \}$ (см. рис. 1). Будем обозначать эти слои $D_\Sigma(w)$. Они совпадают с $D(w)$, но другое обозначение призвано подчеркнуть, что мы могли бы начать с множества D_Σ, понимая его как множество всех возможных объектов, и затем определить домены для каждого мира путём задания функции π. При этом какие-то объекты могут оказаться одновременно в нескольких мирах.

Чтобы построить модель для кросс-мировой предикации, построим обычную модель, взяв в качестве домена множество D_Σ. При этом функциональные символы $f_i^{(n)}(t_1, \ldots, t_n)$ интерпретируются как функции $I(f_i^{(n)})\colon D_\Sigma^n \to D_\Sigma$, а предикатные символы $P_i^{(n)}(t_1, \ldots, t_n)$ интерпретируются как подмножества декартовой степени $I(P_i^{(n)}) \subseteq D_\Sigma^n$.

Интерпретацию переменных (валюацию) $v(x)$ определим как функцию со значениями в D_Σ и расширим валюацию до интерпретации термов $s(t)$:

$$s(t) = \begin{cases} v(t) & \text{если } t \text{ — переменная} \\ I(f_i^{(n)})(s(t_1), \ldots, s(t_n)) & \text{если } t = f_i^{(n)}(t_1, \ldots, t_n) \end{cases}$$

Тем самым всякий терм интерпретируется как элемент $(w, e) \in D_\Sigma$, что означает, что в нём всегда $e \in D(w)$. Это автоматически исключает оценивание формул на объектах, отсутствующих в соответствующем мире.

Истина в модели для формул без кванторов определяется следующим образом:

(T1) $M \models_s P_i^{(n)}(t_1, \ldots, t_n)$ тттк $\langle s(t_1), \ldots, s(t_n)\rangle \in I(P_i^{(n)})$.

(T2) $M \models_s t_1 = t_2$ тттк $s(t_1) = s(t_2)$.

(T3) $M \models_s \neg\phi$ тттк $M \not\models_s \phi$.

(T4) $M \models_s \phi \wedge \psi$ тттк $M \models_s \phi$ и $M \models_s \psi$. Аналогично для других бинарных связок.

Эти определения также не отличаются от обычных для моделей языка первого порядка.

Чтобы определить формулы с кванторами и операторы возможности и необходимости, определим их общий вид. Пусть имеется формула $\phi(x_1, \ldots, x_n)$. Нам потребуется квантифицировать синхронно некоторый набор k переменных этой формулы по некоторому подмножеству множества D_Σ^k. Обозначим кортеж этих переменных $\vec{x}$. Чтобы обеспечить синхронность квантификации, будем квантифицировать по параметру, пробегающему по некоторому множеству D, и определим функцию $\xi\colon D \to D_\Sigma^k$ — тогда если x пробегает D, то $\xi(x)$ пробегает подмножество D_Σ^k.

Пусть, далее, $s[\vec{a}/\vec{x}]$ обозначает интерпретацию, отличающуюся от s тем, что переменные $\vec{x}$ в ней интерпретируются как $\vec{a}$, где $\vec{a} \in D_\Sigma^k$. Если $k = 1$, будем писать просто $s[a/x]$. Наконец, определим:

- $M \models_s \exists(x \in D)\phi$ тттк $\exists(a \in D)$, такое, что $M \models_{s[\xi(a)/\vec{x}]} \phi$.
  И аналогично для $\forall(x \in D)\phi$.

Это положение является схемой для различных вариантов условий истинности, зависящих от выбора D и ξ (которые сами относятся к метаязыку, а не к языку теории).

Рассмотрим три частных случая.

- $k = 1$, $D = D(w)$, где w — некоторый фиксированный мир (например, актуальный), $\xi(x) = \langle (w, x) \rangle$. В результате x пробегает по объектам мира w, и формула соответствует утверждению «В мире w существует x, такой, что ϕ». Мы можем обозначить этот вид формул $\exists_w x\phi$. Это актуалистская интерпретация квантора.

  Аналогично определяются формулы с универсальными кванторами.

- $k = 1$, $D = D_\Sigma$, $\xi(x) = x$. В результате x пробегает по всем объектам модели во всех мирах, и формула соответствует утверждению «Существует (в каком-то мире) x, такой, что ϕ». Мы можем обозначить этот вид формул $\exists x\phi$. Это поссибилистская интерпретация квантора.

  Аналогично определяются формулы с универсальными кванторами.

- Обозначим через w актуальный мир (или мир оценки). Пусть

  $$D = \{\, w' \in G \mid wRw' \,\}, \qquad \xi(x) = \langle (x, e_1(x)), \ldots, (x, e_k(x)) \rangle,$$

  где e_i — некоторые фиксированные интенсионалы. Тогда x пробегает по всем мирам, достижимым из w, а ϕ является утверждением о e_i, взятых в мире x. Соответственно, этот случай конкретизации общего утверждения соответствует формуле «Возможно (в актуальном мире или мире оценки), что ϕ». Мы можем обозначить этот вид формул $\Diamond_w\phi$ (здесь w — мир оценки).

  Аналогично определяются формулы $\Box_w\phi$.

Таким образом, мы определили три дополнительных вида формул:

(F5) $\exists_w x\phi$, $\forall_w x\phi$.

(F6) $\exists x\phi$, $\forall x\phi$.

(F7) $\Diamond_w\phi$, $\Box_w\phi$.

Соответствующие условия истинности выглядят следующим образом:

(T5) $M \models_s \exists_w x\phi$ тттк имеется a в $D(w)$, такой, что $M \models_{s[(w,a)/x]} \phi$.
Аналогично для $\forall_w x\phi$.

(T6) $M \models_s \exists x\phi$ тттк имеется a в D_Σ, такой, что $M \models_{s[a/x]} \phi$.
Аналогично для $\forall x\phi$.

(T7) $M \models_s \Diamond_w \phi$ тттк имеется мир w', такой, что wRw' и $M \models_{s[\overrightarrow{(w',e)}/\vec{x}]} \phi$ (здесь зависимость ϕ от мира неявно предполагается через зависимость от интенсионалов e_i).
Аналогично для $\Box_w \phi$.

Задавая другие множества D и функции ξ мы можем построить другие операторы, например «В принципе возможно (не обязательно в актуальном мире), что ϕ» или «Было возможно, что ϕ» и пр.

Интересно заметить, что любая одноместная формула вида $\phi(x)$ задаёт для фиксированного мира w класс таких x, для которых в этом мире верно $\phi(x)$. Соответственно, мы имеем семейство подмножеств D_Σ, индексированных мирами w. Тогда формула $\Diamond\phi$ соответствует объединению, а $\Box\phi$ — пересечению этих подмножеств.

Примеры

Пусть $richer(x, y)$ означает «x богаче y».

1. «Джон богаче всех (в актуальном мире)».

   Пусть w — актуальный мир, $j\colon G \to D_\Sigma$ — интенсионал «Джон», $D = D(w)$, $\phi(x_1, x_2) = \neg(x_1 = x_2) \to richer(x_1, x_2)$, $k = 1$, $i = 2$, $\xi(z) = \langle (w, z) \rangle$, $s(x_1) = (w, j(w))$. Тогда искомая пропозиция равна

   $$\forall (z \in D(w)) \Big(\neg (w, j(w)) = (w, z) \to richer\big((w, j(w)), (w, z)\big)\Big),$$

   то есть «Для любого z, кроме Джона, Джон богаче z в мире w».

2. «Джон мог бы быть богаче (чем он есть в актуальном мире)».

   Пусть w_0 — актуальный мир, $j\colon G \to D_\Sigma$ — интенсионал «Джон», $\phi(x_1, x_2) = richer(x_1, x_2)$, $k = 1$, $i = 1$, $D = \{\, w \in G \mid w_0 R w \,\}$, $\xi(z) = \langle (z, j(z)) \rangle$, $s(x_2) = (w_0, j(w_0))$, и искомая пропозиция интерпретируется как

   $$\exists w \Big[w_0 R w \wedge richer\Big(\big(w, j(w)\big), \big(w_0, j(w_0)\big)\Big)\Big].$$

3. «Джон может быть богаче всех».

   Пусть w_0 — актуальный мир, $j\colon G \to D_\Sigma$ — интенсионал «Джон», $\phi(x_1, x_2) = richer(x_1, x_2)$. Искомая формула должна содержать две квантификации: внешнюю — по мирам и внутреннюю — по объектам этих миров. Внутренняя квантификация проводится по объектам мира w, заданного внешней квантификацией. Для неё полагаем $k = 1$, $i = 2$, $D = D(w)$, $\xi(z) = \langle(w, z)\rangle$, $s(x_1) = x$. Тогда для внутреннего квантора получаем формулу

$$\forall(z \in D(w))\, richer(x, (w, z)).$$

Для внешней квантификации (по мирам) полагаем

$$k = 1, \quad i = 1, \quad D = \{\, w \in G \mid w_0 R w \,\}, \quad \xi(z) = \langle(z, j(z))\rangle\,.$$

Мы видим, что, поскольку формула замкнута, конечный результат не зависит от исходной интерпретации s.

В результате получаем формализацию:

$$\exists w \Big[w_0 R w \wedge \forall(z \in D(w))\, richer\big((w, j(w)), (w, z)\big) \Big].$$

Литература

Hofmann 1997 — *Hofmann M.* Syntax and semantics of dependent types // Extensional Constructs in Intensional Type Theory. London : Springer London, 1997. P. 13–54.

Kocurek 2016 — *Kocurek A. W.* The Problem of Cross-world Predication // Journal of Philosophical Logic. 2016. Vol. 45, no. 6. P. 697–742.

Martin-Löf 1984 — *Martin-Löf P.* An Intuitionistic Type Theory : Notes by Giovanni Sambin of a series of lectures given in Padua, June 1980. Napoli : Bibliopolis, 1984. 91 p. (Studies in Proof Theory).