Зинаида Кузичева[1]

О РОЛИ СМЫСЛООБРАЗОВАНИЯ В РАЗВИТИИ МАТЕМАТИКИ

Аннотация. В предлагаемом сообщении на примере развития арифметики показываются причины, вынуждающие создание новых разделов математики, и роль смыслообразования в этих процессах.

Ключевые слова: арифметика, операции прямые, операции обратные, обобщение, осмысление.

Zinaida Kuzicheva

ON THE ROLE OF THE MAKING OF SENSE IN THE DEVELOPMENT OF MATHEMATICS

Abstract. We show, using the example of the development of arithmetic, the reasons that stand behind the discovery of new areas in mathematics and the role of the making of sense in those processes.

Keywords: arithmetic, direct operations, inverse operations, generalization, making of sense.

Для цитирования: *Кузичева З. А.* О роли смыслообразования в развитии математики // Логико-философские штудии. 2022. Т. 20, № 3. С. 338–341. DOI: 10.52119/LPHS.2022.94.84.017.

Рассмотрим операции сложения и вычитания на множестве целых неотрицательных чисел N. Мы приписываем выражениям $m \oplus n$ $(m, n \in N_{+0})$ следующий смысл: каковы бы ни были m и n, существует p, принадлежащее N_{+0}, представленное этим выражением. Пусть $p > q$, операция вычитания определена и выражение $p - q$ имеет смысл, поскольку операция выполнима. Но если $p < q$, тогда о выражении $p - q$ нельзя сказать, что оно имеет некоторый смысл, поскольку ему не может быть сопоставлено никакое число из N_{+0}. Аналогично, если $a < b$ или a не содержит множителей кратных b, то в N_{+0} нет элемента, сопоставленного выражению $a : b$, оно лишено смысла.

Умножение по существу является сокращенным сложением, оно, естественно, всюду определено. Например, по определению, $5 + 5 + 5 = 15$, короче, $3 \cdot 5 = 15$. Результатом дальнейшего сокращения явилось действие возведения в степень,

[1] *Кузичева Зинаида Андреевна* — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, МГУ имени М. В. Ломоносова..
Zinaida Kuzicheva, candidate of phys.-math. sciences, senior researcher, Lomonosov Moscow State University.
zakuzicheva@mail.ru

например $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$. Обратным возведению в степень является извлечение корня, оно, как и деление, всюду определено.

Уильям Клиффорд полагает, что нет ничего более ценного, чем получающиеся в процессе выполнения обратных операций выражения, лишенные смысла. «Необходимо только дать себе отчет в том, что мы имеем дело именно с бессмыслицей и, установив это, придать ей смысл» (Клиффорд 1910: 36). С делением еще в древности нашли простой выход, его превратили в операцию всюду определенную, добавив к N_{+0} обыкновенные дроби.

Можно думать, что пополнение множества N_{+0} легко осуществить добавлением отрицательных чисел, ибо этот процесс аналогичен пополнению его дробными числами. Однако затруднение существовало, оно оказалось психологическим. Ясно, что, оперируя однородными предметами, вычитание требуемого числа предметов можно было продемонстрировать, просто убирая вычитаемое число предметов из наличного их набора; но тогда вычитание большего числа предметов из меньшего числа предметов заканчивалось, когда убиралось меньшее количество предметов. Больше нечего было убирать, предметов не оставалось. По сравнению с дробями, добавление к N_{+0} отрицательных чисел произошло довольно поздно.

Но все-таки ростовщичество в той или иной форме возникло довольно рано, некоторая модель отрицательного результата имелась, в конце концов стала осознаваться целесообразность пополнения N_{+0} не только дробными, но и отрицательными числами. Вместе с тем возникла и задача ввести операции на множестве с добавленными отрицательными элементами. Появление новых объектов неизбежно связано с необходимостью введения операций, по возможности согласованных с уже имеющимися арифметическими. В случае задания операций на множестве, полученном добавлением отрицательных чисел, наибольшие трудности были связаны с введением и объяснением правил знаков. Здесь стоит вспомнить трактат Луки Пачоли (ок. 1445 — ок. 1515) «Сумма (знаний) по арифметике, геометрии, пропорциям и пропорциональности» (Paccioli 1494), в котором содержалась изобретенная им двойная бухгалтерия. В этой бухгалтерии записи денежных операций велись в двух столбцах — дохода и долга. Вместо установившегося позднее знаков «плюс» и «минус» Пачоли использовал соответственно буквы p и m (плюс и минус) с волной сверху. Правила он ввел те же, что действуют и теперь, но объяснения не все были убедительны, особенно это касается правила «минус на минус дает плюс». На самом деле, как позднее было сказано Рафаэлем Бомбелли, правила знаков постулировались. Например, отказ от рассматриваемого здесь правила привел бы к нарушению дистрибутивности умножения относительно сложения и вычитания.

Операция, обратная возведению в степень, — извлечение корня, в нашем примере запишется в виде $\sqrt[3]{5^3}$, обозначается также в виде $(5^3)^{\frac{1}{3}}$, в общем случае $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. Как уже сказано выше, возможно, что результат извлечения корня не будет ни целым, ни дробным числом, такие числа были названы иррациональными и добавлены к множеству рациональных чисел. Но возможна и еще более сложная ситуация.

Необходимость извлекать корни возникает, например, в процессе решения уравнений. При этом под корнем четной степени может оказаться отрицательное число, то есть будем иметь выражение вида $\sqrt[2n]{-1 \cdot c}$. Но никакое число в четной степени не может быть отрицательным, таким выражениям что-либо сопоставить невозможно. Долгое время выражения вида $i^2 \sqrt[2n]{c}$, где $i = \sqrt{-1}$, полученные в процессе решения уравнений, оценивали как невозможные, как лишенные смысла. Но рано или поздно дело доходит и до бессмыслицы, появляется потребность найти способ осмыслить ее, найти ей полезное применение.

Как известно, в XVI в. в итальянской алгебраической школе были найдены общие решения уравнений третьей и четвертой степени. Например, формула Дж. Тартальи для решения уравнений вида $x^3 = ax + b$ представляла собой сумму двух корней третьей степени, подкоренное выражение каждого из которых включало корень квадратный из разности $(b/2)^2 - (a/3)^3$. В случаях, когда эта разность оказывалась отрицательной, вся формула лишалась смысла. Значит, чтобы избежать этого, следовало наложить ограничение $(b/2)^2 \geq (a/3)^3$. Но рассмотрим, например, уравнение $x^3 = 8x + 3$.

Здесь $(3/2)^2 - (8/3)^3 < 0$, следовательно, формула Тартальи в этом случае не работает, она лишена смысла. Однако уравнение имеет корень, равный 3. Более того, в случаях, когда указанная разность отрицательна, и только в этих случаях, уравнение третьей степени имеет три действительных корня. Отсюда следует, что указанное выше ограничение принять нельзя. Таким образом, использование формул для решения уравнений третьей степени приводит к необходимости принимать во внимание *квадратный корень из отрицательного числа*. То есть объекты, лишенные смысла, приходится учитывать наравне с осмысленными объектами математики, следовательно, так или иначе осмысливать, интерпретировать их.

Случай, когда квадратные корни, входящие в подкоренные выражения кубических корней в формулах Тартальи, мнимые, впервые исследовал Рафаэль Бомбелли (ок. 1526–1573) в первой книге своей «Алгебры» (Bombelli 1572), составленной уже к 1560 г. Положительный квадратный корень из отрицательного числа Бомбелли называет «плюсом минуса», отрицательный корень из отрицательного числа — «минусом минуса». Он первым приводит правила умножения мнимых и действительных чисел:

$$(\pm 1)(+i) = \pm i, (+i)(+i) = -1, (-i)(+i) = +i,$$
$$(\pm 1)(-i) = \mp i, (+i)(-i) = +1, (-i)(-i) = -1.$$

Тем самым создаются предпосылки для выполнения рекомендации Клиффорда — осмысление и использование мнимых чисел как равноправных объектов математики. Появляются геометрическая и тригонометрическая формы (трактовки) комплексного числа, в результате чего теория функций комплексного переменного оформляется в качестве самостоятельной области математики, которая находит многочисленные приложения не только в математике, но и в технике.

Литература

Клиффорд 1910 — *Клиффорд В.* Здравый смысл точных наук. Начала учения о числе и пространстве. М.: Типография Товарищества И. Д. Сытина, 1910.

Bombelli 1572 — *Bombelli R.* L'Algebra parte maggiore dell'Aritmetika. Bologna, 1572.

Paccioli 1494 — *Paccioli L.* Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita. 1494.