В. А. Степанов

Многозначная логика для описания внешних операций самореферентных формул*

Аннотация: На основе динамической модели самореферентных предложений рассмотрен вариант многозначной логики, описывающий внешние операции таких предложений. Введено понятие «когерентных» и «некогерентных» вхождений самореферентных предложений в составную формулу. Принятие всех возможных вхождений самореферентных предложений когерентными генерирует 16-значную логику, построенную как декартова 4-я степень произведения классической пропозициональной логики. Некогерентными вхождениями в составную формулу признаются только такие атомарные формулы, оценки которых отличны друг от друга. Однако формулы, оценки которых совпадают, остаются когерентными. Оценки, различающие когерентные и некогерентные вхождения, образуют 9-значную логику. Из решетки значений 16-значной логики по установленной эквивалентности некоторых классов составных формул формируется 9-значная конструкция. Предложена трехмерная геометрическая диаграмма такой конструкции.

Ключевые слова: Самореферентные предложения, динамическая модель, многозначная логика, когерентные и некогерентные вхождения формул, многозначная решетка, геометрическая диаграмма.

Abstract: On the basis of dynamic model of self-referential statements the variant of multiple-valued logic describing external operations of such statements is considered. The concept of «coherent» and «non-coherent» occurrences of self-referential statements is entered into the compound formula. Acceptance of all possible occurrences of self-referential statements by the coherent generates the 16-valued logic constructed as 4th degree of the Cartesian product classical propositional logic. Non-coherent occurrences in the compound formula such atomic formulas which estimations are excellent from each other admit only. However the formulas which estimations coincide, remain coherent. The estimations distinguishing coherent and non-coherent occurrences, form the 9-valued logic. Of the lattice of values of 16-valued logic on the established equivalence of some classes of compound formulas it is formed 9-valued the construction. The three-dimensional geometrical diagram such construction is offered.

Keywords: Self-referential statements, dynamic model, multi-valued logics, coherent and non-coherent formulas' occurances, many-valued lattice, three-dimensional diagram.

Самореферентными назовем предложения, ссылающиеся на самих себя. Самым известным из них является предложение «Лжец». Конст-

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты №09-06-0125 и №10-07-00381.

руктивным анализом такого предложения занимался Ч. Пирс[1], который первым, насколько нам известно, обратил внимание в своих лекциях 1864–1865 гг. на то, что самореферентные предложения порождают бесконечную последовательность:

«S2. What is here written is not true.

Similarly concerning S2 Peirce says that we get an infinite number of propositions:

What is here written
The statement that that is false
The statement that that is false
The statement that that is false

and so on to infinity».

Это первое применение принципа, который во второй половине XX в. получил название «превращение порочного круга в креативный круг». Пирс утверждал, что для оценки полученного бесконечного предложения необходимо оценить «самое последнее», и это порождало очевидные проблемы.

Иной способ использовать сгенерированную последовательность — сосредоточиться на **траектории** такого движения и его характеристиках. Для этого обратимся к теории динамических систем, которая зарождалась в середине XIX в., как раз тогда, когда Пирс получил свои бесконечные предложения, и которая в 30-х годах XX в. получила свое современное определение в трудах, в частности А. А. Маркова, когда он еще не занимался математической логикой. Перспективность подхода динамических систем в семантике самореферентных предложений довольно часто высказывалась известными учеными, например Дж.Николисом[2].

Кратко опишем семантику предлагаемого подхода. Рассмотрим семантически замкнутый язык с переменными по формулам:

$$x, y, z,$$

предикатом истинности Тарского $Tr(x)$:

$$Tr(x) \leftrightarrow x, \tag{1}$$

и квантором самореферентности $\mathbf{S}x$:

$$\mathbf{S}xP(x) \leftrightarrow P(\mathbf{S}xP(x)). \tag{2}$$

Здесь $P(x)$ называется **ядром** самореферентного предложения, составленным из $Tr(x)$ и его отрицания с помощью классических пропозициональных связок. Если правое вхождение формулы $\mathbf{S}xP(x)$ в (2) заменить на эквивалентную ей формулу $P(\mathbf{S}xP(x))$, то в результате итерации такой замены мы получим сле-

[1] *Emily M.* Pierce's Paradoxical Solution to the Liar's Paradox // NDJFL. 1975. Vol. XII, N 3. С. 369–374.

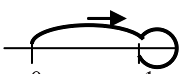
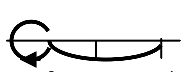
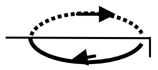
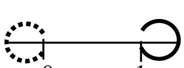
[2] *Николис Дж.* Динамика иерархических систем. М., 1989.

дующую бесконечную последовательность выражений, напоминающую последовательность Пирса:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}xP(x) &\leftrightarrow P(\mathbf{S}xP(x)) \\ &\leftrightarrow P(P(\mathbf{S}xP(x))) \\ &\leftrightarrow P(P(P(\mathbf{S}xP(x)))) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{3}$$

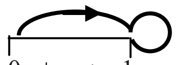
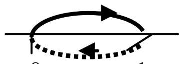
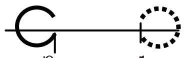
Динамическая интерпретация атомарных самореферентных формул $\mathbf{S}xP(x)$ состоит в приписывании каждой такой формуле двоичной динамической системы ($\{0,1\}$, $p(x)$) с орбитами $<p^n(x), n\in \mathbf{Z}^+>$, где $p^n(x)=pop^{n-1}(x)$ (см. А. Н. Шарковского и др.[3]). Предикатная формула $P(x)$ интерпретируется на булевой функции $p(x)$, рассматриваемой как отображение из множества истинностных значений $\{0,1\}$ в себя. Более подробное изложение описанной процедуры можно найти в работе «Семантика самореферентности: подход динамических систем»[4].

Орбиты динамических систем в нашем случае представляют собой пару бесконечных последовательностей из 0 и 1. Каждая такая последовательность является периодической с максимальным периодом, равным двум. Поэтому для описания таких последовательностей достаточно двух ее членов: 11, 10, 01, 00, а для описания пары последовательностей — всевозможные комбинации упомянутых четырех пар: <11/00>, <01/10> и т. д. Оценки <11/11> и <00/00> трактуются как **T** и **~T**, оценки <11/00> и <00/11> — как **V** и **~V** (**V**oid — пустота), а оценки <01/10> и <10/01> — как **A** и **~A** (**A**ntinomy — антиномия). Возможные атомарные самореферентные формулы с одной переменной, их орбиты и результаты действия операции внешнего отрицания представлены в следующей таблице:

(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)
$\mathbf{S}x(\neg Tr(x)\vee Tr(x))$	$\mathbf{S}x(\neg Tr(x)\ \&Tr(x))$	$\mathbf{S}x\ \neg Tr(x)$	$\mathbf{S}x\ Tr(x)$	1
$\boldsymbol{p}(x)=1$	$\boldsymbol{p}(x)=0$	$\boldsymbol{p}(x)=\neg x$	$\boldsymbol{p}(x)=x$	2
$x_0=1$: 1,1,1,1,...	$x_0=1$: 1,0,0,0,…	$x_0=1$: 0,1,0,1,…	$x_0=1$: 1,1,1,1	3
$x_0=0$: 0,1,1,1,...	$x_0=0$: 0,0,0,0,…	$x_0=0$: 1,0,1,0,…	$x_0=0$: 0,0,0,0,	4
 0 1 **T**	 0 1 **F**	 0 1 **A**	 0 1 **V**	5

[3] *Шарковский А. Н. и др.* Динамика одномерных отображений. Киев. 1989.

[4] *Степанов В. А.* Семантика самореферентности: подход динамических систем // Труды научно-исслед. семинара Логического центра Ин-та философии РАН. Вып. XVI. М., 2002. С. 97–108.

Результат действия операции (внешнего) отрицания **~ :**				
~S$x(\neg Tr(x) \vee Tr(x))$	**~S**$x(\neg Tr(x)\ \& Tr(x))$	**~S**$x\ \neg Tr(x)$	**~S**$x\ Tr(x)$	**6**
$\boldsymbol{p}(x)= 1$	$\boldsymbol{p}(x)= 0$	$\boldsymbol{p}(x)= \neg x$	$\boldsymbol{p}(x)= x$	**7**
x_0=1: 0,0,0,0,...	x_0=1: 0,1,1,1,…	x_0=1: 1,0,1,0,…	x_0=1: 0,0,0,0,	**8**
x_0=0: 1,0,0,0,...	x_0=0: 1,1,1,1,…	x_0=0: 0,1,0,1,…	x_0=0: 1,1,1,1,	**9**
 0 1 **~T (F)**	 0 1 **~F (T)**	 0 1 **~A**	 0 1 **~V**	**10**

Такая семантика генерирует 16-значную логику, которая есть декартова 4-я степень произведения классической двузначной логики $\mathbf{C_2}$ и описывается результирующей матрицей $\mathbf{M_{16}{}^c = (\ M_2{}^c\ )^4}$, где $\mathbf{M_2{}^c}$ есть матрица классической логики $\mathbf{C_2}$:

$$\mathbf{M_2{}^c} = <\{1{,}0\},\ \neg, \vee, \wedge, \{1\} > .$$

Тогда результирующая матрица $\mathbf{M_{16}{}^c = (\ M_2{}^c\ )^4}$ имеет вид:

$$\mathbf{M_{16}{}^c} =$$
$$=<\{11/11,\ 10/01,\ 11/00,\ldots,00/11,\ 01/10,\ 00/00\}, \underline{\neg}, \underline{\vee}, \underline{\triangle}, \{11/11\}>$$
$$=<\{\ \mathbf{T},\quad \mathbf{A},\quad \mathbf{V},\ldots\ldots,\mathbf{\sim V},\quad \mathbf{\sim A},\quad \mathbf{\sim T}\ \}, \underline{\neg}, \underline{\vee}, \underline{\triangle},\quad \{\ \mathbf{T}\ \}\ >$$

Здесь символ ~ кодирует знак $\underline{\neg}$. Известно, что операция произведения матриц, подобная нашей, сохраняет класс тавтологий исходной матрицы $\mathbf{M_2{}^c}$, т. е. сохраняются тавтологии классической пропозициональной логики[5]. Вариант 16-значной логики, построенный в предположении когерентности оценок всех формул этой логики (т. е. все 0-1-оценки предполагают одинаковые начальные значения x_0 для всех 0-1-траекторий атомарных формул, участвующих в построении), описан В. А. Степановым[6].

Диаграмма решетки истинностных значений такой 16-значной логики (когерентный случай) выглядит так, как показано на приводимом ниже рисунке (рис. 1).

Белые круги — оценки атомарных формул **T**, **~T**, **A**, **~A**, **V**, **~V**. Черные круги — оценки, полученные при взаимодействии атомарных формул вида **A** и **V**, например (**A** $\underline{\vee}$ **V**):

$$\mathbf{A} \underline{\vee} \mathbf{V} = <11/00> \underline{\vee} <01/10> = <11/10>.$$

[5] *Карпенко А. С.* Развитие многозначной логики. М., 2010.

[6] *Степанов В. А.* Использование динамических систем в семантике аутореферентных предложений. М., 1997.

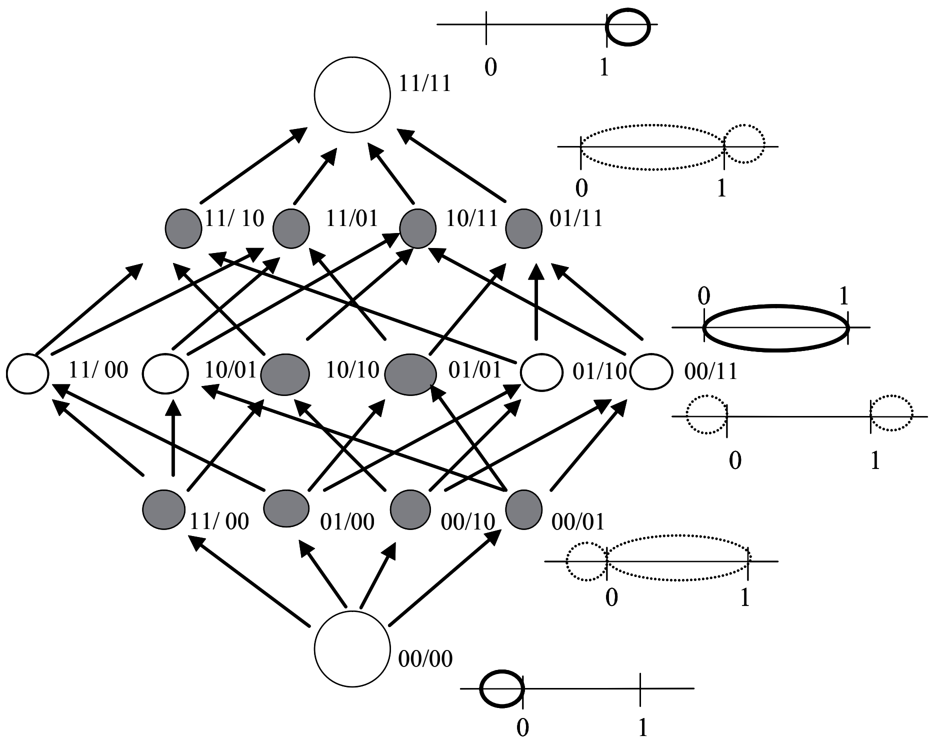


Рис. 1. Решетка значений 16-значной логики в предположении когерентности оценок всех формул.

Справа от графа решетки изображены траектории динамических систем, соответствующих каждому из горизонтальных уровней решетки оценок. Непрерывные линии траекторий изображают устойчивые неподвижные точки и устойчивый цикл. Прерывистые линии символизируют неустойчивые траектории, т. е. траектории, на которые перескакивают динамические системы, если, грубо говоря, поменять начальное исходное значение величины x_0 с 0 на 1 или наоборот.

Помеченные нами оценки **T**, **~T**, **A**, **~A, V**, **~V** представляют собой оценки **атомарных** самореферентных предложений. Оставшиеся (16-6=10) десять комбинаций последовательностей из 0 и 1 не получили своих имен и в записи матрицы $\mathbf{M}_{16}^{c}$ отображены многоточием.

Для описания <u>некогерентного</u> случая подчеркнем обозначения всех операций еще один раз: из $\underline{\vee}$ получим $\underline{\underline{\vee}}$ и т. д., причем оставим <u>когерентными</u> вхождения в составную формулу только таких атомарных формул, которые имеют одинаковые обозначения оценок: либо **A,** либо **V**. То есть оценки формул, например вида $(\mathbf{V} \mathbin{\underline{\underline{\vee}}} \sim\mathbf{V})$, вычисляют, как и в предыдущем (когерентном) случае, таким образом:

$$(\mathbf{V} \mathbin{\underline{\underline{\vee}}} \sim\mathbf{V}) = (\mathbf{V} \mathbin{\underline{\vee}} \sim\mathbf{V}) = (\langle 11/00\rangle \mathbin{\underline{\vee}} \langle 00/11\rangle) = (\langle 11/11\rangle) = \mathbf{T}.$$

Этому можно найти оправдание в том, что все атомарные самореферентные формулы с одинаковым ядром $P(x)$ интерпретируются одной и той же динамической системой, а потому их можно представить как одну и ту же формулу. А вот для формул с различными (неэквивалентными) ядрами, $\neg\,(P^1(x) \leftrightarrow P^2(x))$, такой аргумент привести уже нельзя, потому что атомарные самореферентные формулы являются замкнутыми, и представляющие их **различные** динамические системы отнюдь не обязаны начинать свое движение с одних и тех же начальных условий. Поэтому нам придется испытать все возможные комбинации исходных начальных условий, $x^1{}_0$ и $x^2{}_0$, которых всего лишь четыре. Тогда процесс оценки формулы составленной из **A** и **V**, например, такой: $(\mathbf{A} \mathbin{\underline{\underline{\vee}}} \mathbf{V})$ — суть попарно покоординатное взаимодействие элементов двух последовательностей сначала как в когерентном случае, а потом мы еще три раза поменяем стартовые значения начальных букв $x^1{}_0$ и $x^2{}_0$, и получим в результате множество из четырех пар траекторий:

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{V} \mathbin{\underline{\underline{\vee}}} \mathbf{A}) = \\
&=\{\langle 11/00\rangle \underline{\vee} \langle 01/10\rangle, \langle 11/00\rangle \underline{\vee} \langle 10/01\rangle, \langle 00/11\rangle \underline{\vee} \langle 01/10\rangle, \langle 00/11\rangle \underline{\vee} \langle 10/01\rangle\} \\
&=\{\quad \langle 11/10\rangle, \quad \langle 11/01\rangle, \quad \langle 01/11\rangle, \quad \langle 10/11\rangle \quad\} \qquad (4) \\
&=\{\quad (\mathbf{V} \mathbin{\underline{\vee}} \mathbf{A}), \quad (\mathbf{V} \mathbin{\underline{\vee}} \sim\mathbf{A}), \quad (\sim\mathbf{V} \mathbin{\underline{\vee}} \mathbf{A}), \quad (\sim\mathbf{V} \mathbin{\underline{\vee}} \sim\mathbf{A}) \quad\}.
\end{aligned}$$

В первой строке изображены четыре возможных варианта взаимодействия траекторий. Во второй строке — результат такого взаимодействия. Последняя строка описывает в терминах когерентных взаимодействий оценки, полученные во второй строке. Если **V** или **~V** обозначить как $\underline{\mathrm{V}}$, а **A** или **~A** обозначить как $\underline{\mathrm{A}}$, то последнюю строку мы свернем в такую формулу: $\{(\underline{\mathrm{V}} \mathbin{\underline{\vee}} \underline{\mathrm{A}})\}$. Тогда формула (4) будет выглядеть так:

$$(\mathbf{V} \mathbin{\underline{\underline{\vee}}} \mathbf{A}) = \{(\underline{\mathrm{V}} \mathbin{\underline{\vee}} \underline{\mathrm{A}})\}. \qquad (5)$$

Для других логических знаков также будут справедливы формулы, подобные формуле (5). Характеристическая матрица $\mathbf{M}_{16}{}^{c}$ для рассматриваемого случая и в новых обозначениях, подобных (5), превратится в фактор-матрицу $\mathbf{M}_9{}^{c}$ и будет выглядеть так:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{M}_9{}^{c} = \\
&=\langle\{11/11,\ 10/01,\ 11/00, \ldots\ldots, 00/11,\ 01/10,\ 00/00\}, \underline{\underline{\neg}}, \underline{\underline{\vee}}, \underline{\underline{\triangle}}, \{11/11\}\rangle \\
&=\langle\{\ \mathbf{T}, \mathbf{A}, \mathbf{V},\ (\mathbf{A} \mathbin{\underline{\underline{\vee}}} \mathbf{V}),\ (\mathbf{A} \mathbin{\underline{\underline{\leftrightarrow}}} \mathbf{V}),\ (\mathbf{A} \mathbin{\underline{\underline{\triangle}}} \mathbf{V}),\ \sim\mathbf{V},\ \sim\mathbf{A}, \sim\mathbf{T}\ \}, \underline{\underline{\neg}}, \underline{\underline{\vee}}, \underline{\underline{\triangle}},\ \{\ \mathbf{T}\ \}\ \rangle.
\end{aligned}$$

Смесь когерентных и некогерентных вхождений все равно подпадает под случай **только** когерентных вхождений, поскольку каждый из вновь полученных четырех значений результирующих формул в свою очередь можно рассматривать как когерентный. Это позволяет высказать как гипотезу следующую лемму.

Лемма: Класс тавтологий классической логики высказываний сохраняется и для случая смешения (взаимодействия) когерентных и некогерентных вхождений атомарных самореферентных формул.

Для случая некогерентных оценок решетка из 16 истинностных значений превращается в конструкцию из 9 истинностных значений путем склеивания эквивалентных «черных» истинностных значений по горизонтали.

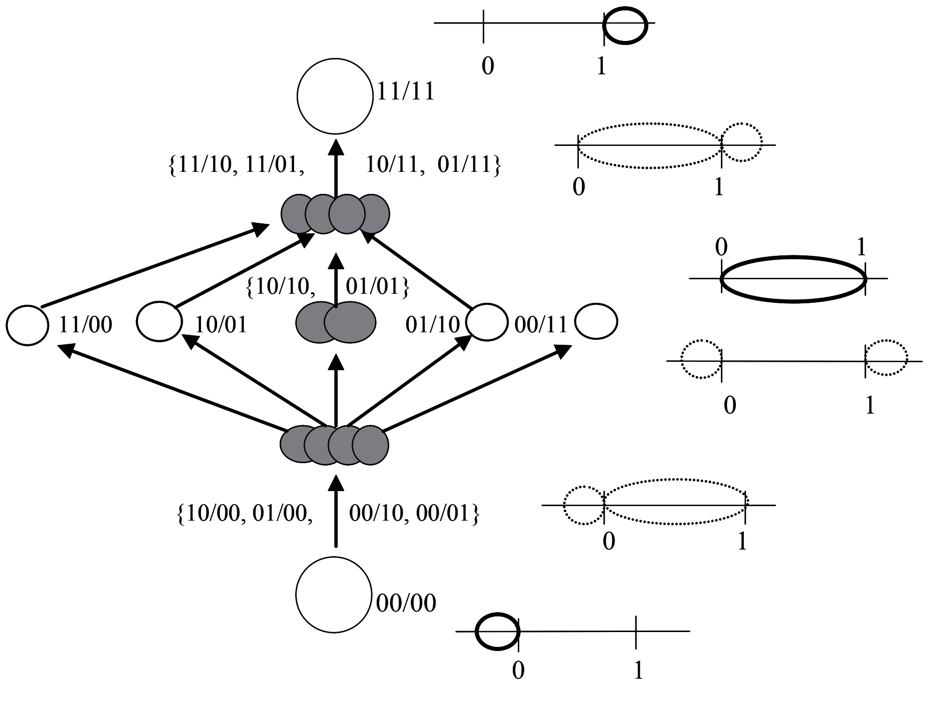


Рис. 2. Результат преобразования 16-значной решетки
в некогерентном случае.

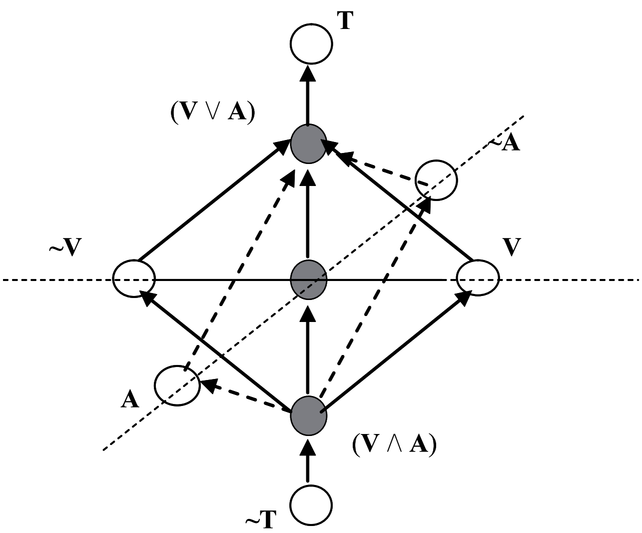


Рис. 3. Трехмерное представление истинностных значений для некогерентного случая.

Для наглядности диаграмму описанной конструкции можно расположить в трехмерном пространстве (см. рис. 3), как в работе В. А. Степанова[7], с такими же обозначениями осей:

(**T**, ~**T**), (**A**, ~**A**) и (**V**, ~**V**).

[7] *Степанов В. А.* Четырехзначная модальная логика Лукасевича в семантике самореферентных предложений // Философия, математика, лингвистика: аспекты взаимодействия. Материалы международной научной конференции. СПб., 20–22 ноября 2009 г. СПб., 2009. С. 198–200.